View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Funes

LAS CÓNICAS Y OTRAS CURVAS MARAVILLOSAS

Alicia Guzmán y Carlos Álvarez
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Ana.guzman@escuelaing.edu.co, carlos.alvarez@escuelaing.edu.co

En el cursillo construiremos algunos lugares geométricos por medio de envolventes de familias de curvas. Iniciamos con algunas construcciones básicas que se pueden desarrollar con instrumentos de trazo, continuamos con construcciones de lugares geométricos, instancia en la que resulta más útil apoyarse en la geometría dinámica (e.g., GeoGebra). Finalizaremos con un proceso en doble vía para asociar lugares geométricos con sus ecuaciones.

INTRODUCCIÓN

El tratamiento de lugares geométricos y el estudio de las cónicas en particular se abordan desde argumentos algebraicos, que tienen como objetivo la deducción de la ecuación en términos de vértices, focos, lados rectos, entre otros. En el cursillo ofrecemos un tratamiento complementario que permite por un lado obtener sus gráficas por métodos constructivos y deducir sus ecuaciones acordes a dicho método, constituyéndose en alternativa para profesores interesados en promover el desarrollo de habilidades matemáticas por medio de proyectos, en los que se vinculen conceptos básicos de la geometría euclidiana y de la geometría analítica. En este documento presentamos sólo un ejemplo desarrollado. Los demás serán objeto de estudio en el cursillo.

GENERALIDADES

Desarrollaremos construcciones de algunos lugares geométricos, por medio de envolventes de familias de curvas. Nos familiarizaremos con términos como curva, familia de curvas, lugar geométrico, envolvente de una familia de curvas. Aunque estos conceptos pueden tratarse de manera intuitiva, a continuación se dan las definiciones que aparecen en publicaciones reconocidas.

Curva: La gráfica de una función continua definida de un intervalo cerrado [a, b] en el plano, es llamada una curva. Si además la función es diferenciable, entonces la curva es suave (Apostol, 1967/988).

Guzmán, A. y Álvarez, C. (2013). Las cónicas y otras curvas maravillosas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 67-70). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Lugar geométrico: Curva trazada por un punto que se mueve según una ley definida. El término fue acuñado probablemente por Tales (Newman, 1956/1985), o también, "el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano, y solamente aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen una propiedad geométrica que puede estar dada por una ecuación $f(x, y) = 0$, se conoce como lugar geométrico o gráfica de la ecuación" (Lehmann, 1959/2002).

Familia de curvas: Si se tiene una familia de funciones continuas que dependen de uno o más parámetros, entonces las gráficas que se obtienen al variar el (los) parámetro(s) es una familia de curvas (Apostol, 1967/1988).

Envolvente: Dada una familia de curvas se denomina envolvente de esta familia a la curva que en cada uno de sus puntos es tangente a una de las curvas de la familia (Boltianski, 1977).

Las construcciones geométricas aquí presentadas requieren:

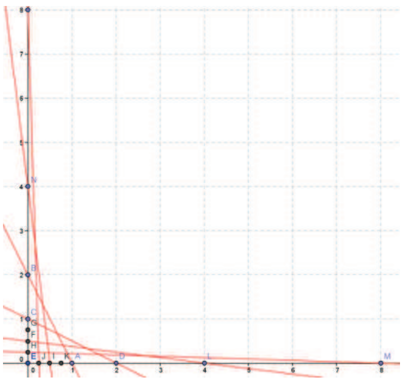
- Del uso de instrumentos de dibujo geométrico y la elaboración de varios casos particulares que cumplan las condiciones dadas.
- Incorporar las representaciones **dinámicas**, que a partir de mover y transformar, un ejemplo particular, "permite estudiar las variaciones, dar indicios de las invariantes, y posiblemente facilita las bases intuitivas para dar justificaciones formales de conjeturas y proposiciones matemáticas" (Arcavi y Hadas, 2000).
- Aprovechar información de la tabulación para el estudio de otras características que finalmente contribuyan a la deducción de la ecuación del lugar geométrico, para nuestro caso en dos variables.

Iniciaremos con el siguiente ejemplo:

> Consideraremos una familia de triángulos rectángulos con área constante, digamos una unidad cuadrada (1ud^2).

Para ello se sugiere construir un triángulo con un vértice en el origen del sistema cartesiano (primer cuadrante) y los catetos sobre los ejes cartesianos, identificar desde la construcción varios casos o una familia de triángulos que también cumplan la propiedad, observar el comportamiento de la recta AB, que genera la envolvente que deseamos estudiar, deducir la ecuación de la familia de rectas (variables y parámetros).

Obsérvese que se empieza a formar una curva, o mejor una poligonal. En este caso parece que la cantidad de rectas no es suficiente, pero se podrían trazar otras. En la Figura 1 se ilustra la situación.



Coordenadas de A	Coordenadas de B	Área OAB	Pendiente de AB
(1,0)	(0,2)	1	-2
(4,0)	(0,1/2)	1	-1/8
		1	
$(a, 0)$	$(0, 2/a)$	1	$-2/a$

Figura 1

Ahora realizaremos una construcción que permite ver todos los casos de una manera dinámica y está basada en la semejanza de los triángulos OQP y ORS. Para este caso fijaremos los puntos $P(1,0)\ y\ \ Q(0,2)$, tomaremos un punto que pueda moverse $R(a, 0)$, a (parámetro) en los reales. La posición de S la obtendremos al trazar la recta RS paralela a PQ y su coordenada en función de a será $s\left(0, \frac{2}{a^2}\right)$. Al cambiar la posición de R y observar la familia de rectas RS, vemos la envolvente de la recta que es una curva (ver Figuras 2 y 3).

Figura 2

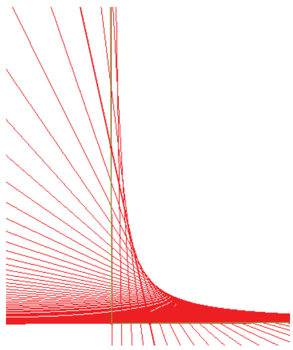


Figura 3

La envolvente parece ser una hipérbola, astroide o algo similar. Así se hace necesario hallar una ecuación algebraica para la familia de rectas, calcular su derivada respecto de la variable o parámetro y tratar de eliminar el parámetro. En estudio más detallado sobre envolventes (Boltianski, 1997) se justifica por qué para hallar la ecuación de la envolvente de una familia de curvas $f(x, y, \alpha) = 0$ debe eliminarse el parámetro α entre esta ecuación y

$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, \alpha) = 0$. Si la familia depende de dos parámetros $f(x, y, \alpha, \beta) = 0$ y los parámetros se relacionan según $g(\alpha, \beta) = 0$ entonces deben eliminarse los dos parámetros entre estas dos ecuaciones y la siguiente $\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial g}{\partial \beta} - \frac{\partial g}{\partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$.

De acuerdo a lo descrito en la Figura 2, la pendiente de la recta *RS* es $m = -\frac{2}{a}$, la ecuación algebraica de la familia está dada por $f(x, y, a) = a^2 y + 2x - 2a$ y por consiguiente $\frac{\partial}{\partial a} f(x, y, a) = 2ay - 2$. Si igualamos estas ecuaciones a cero y eliminamos el parámetro a, obtenemos $xy = 2$, es decir que efectivamente la curva es una rama de una hipérbola equilátera (Apóstol, 1967/1988).

Resumiendo, tenemos una situación que requirió para su solución la articulación de la geometría euclidiana y la geometría analítica, que nos permitió caracterizar el lugar geométrico descrito por la familia de rectas. Recordemos que algunas de las preguntas orientadoras fueron: ¿Qué ocurre si la cantidad de puntos se aumenta?, ¿Cómo realizar una construcción dinámica de la situación descrita, que nos permita involucrar infinitos puntos? La envolvente que se genera ¿a qué lugar geométrico corresponde? ¿Cuál será la ecuación del lugar geométrico?

REFERENCIAS

Apostol, T.M. (1988). *Calculus. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades* (vols. 1 y 2; 2da ed.) (Francisco Vélez Cantarell, Tr.). Bogotá, Colombia: Editorial Reverté S.A. (Primera edición en inglés, 1967).

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Matemathical Learning*, 5, 25-45.

Boltianski, V.G. (1977). *La envolvente. Lecciones populares de matemáticas* (V. Llanos, Tr.). Moscú, Rusia: Editorial Mir.

Lehmann, C. (2002). *Geometría analítica* (34ta. ed.) (Rafael García Díaz, Tr.). México: Limusa S.A. (Primera edición en inglés, 1959).

Newman, J.R. (1985). *Sigma. El mundo de las matemáticas* (tomo 1; 10ª ed.) (B. Carreras, J. Carreras, M. Muntaner, M. Abelló, R. Obiols, R. Carbó, X. Rubert, J. Sempere y M. Sacristán, Trs.). Barcelona, España: Editorial Grijalbo (primera edición en inglés, 1956).