

# NÚMEROS

Revista de Didáctica de las Matemáticas

<http://www.sinewton.org/numeros>

ISSN: 1887-1984

Volumen 85, marzo de 2014, páginas 5-23

## Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado.

Claudia Vásquez (Pontificia Universidad Católica de Chile. Chile)  
Ángel Alsina (Universidad de Girona. España)

*Fecha de recepción: 9 de julio de 2013*

*Fecha de aceptación: 30 de octubre de 2013*

---

### Resumen

En los últimos años la probabilidad se ha incorporado fuertemente en el currículo escolar de muchos países, transformándose en un desafío para las instituciones formadoras y el profesorado. Con este artículo se busca aportar evidencias sobre los conocimientos matemáticos y didácticos que deben poner en juego los profesores de educación primaria para la enseñanza de la probabilidad. Para ello, se ha realizado un análisis exploratorio de referentes curriculares internacionales y nacionales sobre enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, así como de algunos modelos sobre el conocimiento didáctico y matemático del profesor. En base a dicho análisis, se concluye con algunas directrices para la formación del profesorado que contribuyen a mejorar la comprensión de la probabilidad, y procurar así la transformación progresiva de la práctica docente.

### Palabras clave

Conocimiento matemático y didáctico, probabilidad, educación primaria, formación inicial y continua de profesores.

---

### Abstract

In the last years, probability has become a major component of school curriculum in many countries and a challenge to both, educational institutions and teachers. The purpose of this article is to provide evidence about the mathematical and didactic knowledge that primary school teachers must bring into play to teach probability. To do that, an exploratory analysis of international and national curricular benchmarks of probability teaching and learning, well as some models of teacher's mathematical and didactic knowledge, has been conducted. Based on that, it concludes with some teacher education guidelines that contribute to improving the understanding of probability, and enable the progressive transformation of teaching practices.

### Keywords

Mathematical and didactic knowledge, probability, primary education, initial and on-going training of teachers.

---

## 1. Introducción

No es desconocido que los requerimientos de la sociedad varían muy rápidamente, cambiando al mismo tiempo lo que los alumnos necesitan aprender en la escuela. Estos cambios exigen una mayor preparación por parte de los profesores para ejercer la enseñanza en los distintos ciclos educacionales que conforman el sistema escolar. Tal es el caso de la probabilidad, que durante los últimos veinticinco años aproximadamente se ha ido incorporando fuertemente en los currículos de matemática a nivel parvulario, básico, medio y superior en gran parte de los países desarrollados. Algunos de los principales motivos son su utilidad y presencia en numerosas situaciones de la vida



diaria, en las que es necesario disponer de un razonamiento crítico que permita interpretar y comunicar distintos tipos de información, además de su estrecho vínculo con distintas disciplinas. Esta iniciativa ha contado, desde 1989, con el apoyo del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) al ser este organismo pionero en incluir “Datos y Azar” como una área temática en el currículo de matemáticas *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics* (NCTM, 1989). Esta iniciativa ha ido cobrando fuerza con el transcurso de los años, generando una verdadera reforma en los currículos de matemática de diversos países que se ha plasmado, en la última década, en los *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000). Estos estándares buscan proveer de una visión y dirección necesarias para una educación matemática de alta calidad para todos los alumnos.

Dada esta situación de cambios se hace necesario contar con profesores preparados que logren que sus alumnos alcancen estos nuevos requerimientos y que utilicen enfoques adecuados para enseñar los contenidos recientemente incorporados, como es el caso de la probabilidad. Esta transformación curricular representa un verdadero desafío para las instituciones formadoras, ya que la gran mayoría de profesores no han contado durante su formación inicial con asignaturas que les permitan alcanzar una enseñanza eficaz de la probabilidad. Bajo esta perspectiva, es necesario contar con estudios sobre la enseñanza de la probabilidad en educación primaria, y más específicamente vinculados a los conocimientos matemáticos y didácticos que los profesores de primaria deben poner en juego a la hora de enseñar estos contenidos, sobre todo en países como Chile en el que tales estudios son aún muy escasos. Es en este escenario que surge este trabajo, a través del cual se busca vislumbrar y analizar el conocimiento matemático y didáctico que los profesores de primaria necesitan para la enseñanza de la probabilidad.

## **2. La probabilidad en el currículo escolar**

Un punto central en este estudio es el relacionado con la presencia y el rol otorgado a la probabilidad dentro del currículo escolar tanto a nivel internacional como nacional. En esta sección se describen los contenidos vinculados al estudio de la probabilidad en las orientaciones curriculares de la NCTM (2000), los Estándares Comunes (CCSSI, 2010), en el currículo chileno para la educación básica (Mineduc, 2012) y por último en el currículo español para la educación primaria (MEC, 2007). Esto nos permitirá contar con una visión panorámica en torno al tratamiento otorgado al estudio de la probabilidad, y de este modo tener claridad, en parte, acerca del conocimiento de la probabilidad y su enseñanza que necesitan los profesores de primaria para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje con sus estudiantes.

### **2.1. La probabilidad en el currículo escolar internacional**

Para establecer la presencia y el rol otorgado a la probabilidad en el currículo escolar internacional, se analizan los Principios y Estándares para la Educación Matemática del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), y los Estándares Comunes para las Matemáticas de la *Common Core State Standard Initiative* (CCSSI, 2010), al tratarse de documentos de referencia que han tenido gran influencia tanto en el currículo de EEUU como en el de muchos otros países como Chile y España.

Actualmente existe un acuerdo generalizado en que la probabilidad, debido a sus múltiples aplicaciones en distintas áreas del saber, es parte importante de la matemática, por lo que es necesario que el pensamiento probabilístico se desarrolle desde las primeras edades (nivel parvulario). Como se ha indicado, esta fue adoptada por la NCTM (1989), al incluir como área temática en el *Curriculum*

and Evaluation Standard for School Mathematics a Datos y Azar, iniciativa que desde entonces ha cobrado fuerza y se ha plasmado, últimamente, en los *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000). Por medio de tales Principios y Estándares se busca “describir las características particulares de una educación matemática de gran calidad”, además de “describir los contenidos y procesos matemáticos que deberían aprender los estudiantes” (NCTM, 2000, p. 11). Para lograr este propósito se proponen los Principios de: igualdad, currículo, enseñanza, aprendizaje, evaluación y tecnología para las matemáticas escolares. Además de un conjunto de conocimientos y competencias matemáticas que buscan desarrollar en los estudiantes, la capacidad de pensar y razonar matemáticamente. Es así como emergen los Estándares de Contenidos y los Estándares de Procesos. Los primeros describen explícitamente los contenidos que deberían aprender los estudiantes desde el *Prekindergarten* al nivel 12, en relación a Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de datos y probabilidad, mientras que los segundos exponen distintas formas de adquisición y usos de dichos contenidos, como un continuo en el currículo escolar, por medio de los procesos de:

- Resolución de problemas: se enfatiza la construcción de nuevos conocimientos a partir de la exploración de métodos de resolución de problemas, ya sea del ámbito de la matemática o de otros contextos, lo que permitirá que los estudiantes reflexionen y apliquen sus conocimientos y estrategias en busca de una solución.
- Razonamiento y demostración: se pretende capacitar a los estudiantes para reconocer la importancia del razonamiento y la demostración en el desarrollo de la matemática, como herramientas que permiten formular, desarrollar y evaluar distintos tipos de argumentos matemáticos.
- Comunicación: se entiende como una parte esencial de las matemáticas, pues a través de ella los estudiantes estarían capacitados para organizar, comunicar, analizar y evaluar, de forma rigurosa, tanto su pensamiento matemático como el de los demás.
- Conexiones: se enfatiza que los estudiantes sean capaces de vincular distintas ideas matemáticas entre sí, generando nuevas ideas, además de reconocer la aplicabilidad en contextos no matemáticos.
- Representación: se busca mejorar la comprensión de distintos tipos de ideas matemáticas por medio de amplio espectro de representaciones otorgadas a los estudiantes de modo que estos sean capaces de seleccionar, aplicar y traducir aquellas que sean más adecuadas a un determinado problema.

Estos diez estándares se encuentran presentes de forma continua y gradual a lo largo de todo el currículo escolar, respondiendo a las distintas necesidades presentes en cada una de las distintas etapas de la formación escolar, tal y como es posible apreciar en la figura 1.

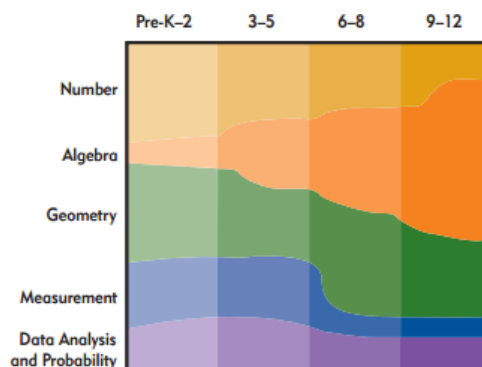


Figura 1. Nivel de atención que deberían recibir los diferentes estándares de contenidos desde Prekindergarten al nivel 12 (NCTM, 2000, p. 32)



## Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado

C. Vásquez, Á. Alsina

Dado que nuestro estudio se centra específicamente en el contenido de probabilidad, el análisis se focaliza en el estándar de contenido de Análisis de datos y probabilidad (NCTM, 2000), puesto que en él se abordan conceptos básicos y distintas aplicaciones de la probabilidad que permitirían a los estudiantes establecer, de manera progresiva, conexiones entre las matemáticas y otros ámbitos del saber, así como con experiencias de la vida diaria, de modo que al finalizar su formación escolar los estudiantes posean una sólida formación en lo que se refiere al análisis de datos y probabilidad. Es por esta razón que este estándar propone, específicamente para el tema de probabilidad, “capacitar a los estudiantes, en las distintas etapas, para: desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos; y comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad.” (NCTM, 2000, p. 51)

Para ello, se propone iniciar el estudio de la probabilidad y de los contenidos vinculados a partir del *Prekindergarten* (preescolar) de forma continua hasta el nivel 12 (bachillerato), de tal manera que se favorezca la adquisición progresiva de los siguientes contenidos:

	<b>Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos</b>	<b>Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad</b>
<b>Pre K-2</b>	Discutir sucesos probables e improbables relacionados con las experiencias de los alumnos.	
<b>3-5</b>	Proponer y justificar conclusiones y predicciones basadas en datos, y diseñar estudios para investigarlas más a fondo.	<p>Describir sucesos como probables o no probables, y discutir su grado de probabilidad usando expresiones como seguro, igualmente probable e improbable;</p> <p>Predecir la probabilidad de resultados de experimentos sencillos, y someter a prueba tales predicciones;</p> <p>Comprender que la medida de la probabilidad de un suceso puede representarse por un número comprendido entre 0 y 1.</p>
<b>6-8</b>	<p>Utilizar observaciones relativas a las diferencias entre dos o más muestras, para formular conjeturas sobre las poblaciones de las que se han extraído;</p> <p>Formular conjeturas sobre las posibles relaciones entre dos características de una muestra, a partir de nubes de puntos de los datos y líneas de ajuste aproximadas;</p> <p>Utilizar las conjeturas para formular nuevas preguntas y programar nuevos estudios para contestarlas.</p>	<p>Comprender y utilizar la terminología apropiada para describir sucesos complementarios y mutuamente excluyentes;</p> <p>Utilizar la proporcionalidad y una comprensión básica de la probabilidad para formular y comprobar conjeturas sobre los resultados de experimentos y simulaciones;</p> <p>Calcular probabilidades de sucesos compuestos sencillos, utilizando métodos como listas organizadas, diagramas de árbol y modelos de área.</p>
<b>9-12</b>	<p>Utilizar simulaciones para explorar la variabilidad de muestras estadísticas de una población conocida, y para construir distribuciones muestrales;</p> <p>Comprender cómo las muestras estadísticas</p>	<p>Comprender los conceptos de espacio muestral y distribución de probabilidad, y construir espacios muestrales y distribuciones en casos sencillos;</p> <p>Utilizar simulaciones para construir distribuciones de probabilidad empíricas;</p>

<p>reflejan los valores de los parámetros de la población, y utilizar las distribuciones muestrales como base para inferencias informales;</p> <p>Evaluar informes basados en datos, examinando el diseño del estudio, lo apropiado del análisis de los datos y la validez de las conclusiones;</p> <p>Comprender cómo se utilizan técnicas estadísticas básicas en los lugares de trabajo, para controlar características del proceso de producción.</p>	<p>Calcular e interpretar el valor esperado de variables aleatorias en casos sencillos;</p> <p>Comprender los conceptos de probabilidad condicionada y sucesos independientes;</p> <p>Comprender cómo se calcula la probabilidad de un suceso compuesto.</p>
---	--

**Tabla 1.** Contenidos en relación al tema de probabilidad desde *Prekindergarten* al nivel 12 (NCTM, 2000)

Como se puede apreciar en la Tabla 1, el desarrollo de los conceptos básicos de probabilidad pasa por diferentes fases: a) se inicia de manera informal en las primeras etapas, introduciendo en primer lugar el vocabulario vinculado a las nociones de probabilidad por medio de actividades centradas en los juicios que emiten los estudiantes en base a sus propias experiencias, llevándoles a responder preguntas sobre la probabilidad de sucesos, cuyas respuestas consideren el empleo de términos tales como: más probable, menos probable o imposible; b) sigue con la realización de experimentos aleatorios con material concreto como bolitas, fichas de colores, monedas, ruletas, etc. y de este modo comenzar a aprender cómo cuantificar la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso. Además de empezar a comprender que la probabilidad de un suceso imposible se designa por medio del 0 y la de un suceso seguro por medio del 1, vinculando así a los estudiantes con la asignación numérica de probabilidad a la ocurrencia de ciertos sucesos; y c) se finaliza la educación primaria con el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos sencillos, dejando para la educación secundaria el cálculo de probabilidad de sucesos dependientes e independientes, así como conceptos de mayor complejidad.

La adquisición de estos contenidos, como se ha indicado, se ve complementada con los estándares de procesos, pues éstos ofrecen un conjunto de herramientas (Resolución de problemas, Razonamiento y prueba, Comunicación, Conexiones y Representación) que facilitan la adquisición y uso de tales contenidos en los estudiantes, ya que a partir de los estándares de procesos los estudiantes se introducen progresivamente en las formas de pensar propias de las matemáticas como: razonar, argumentar, descubrir, representar, modelizar, demostrar, etc. Estos procesos de pensamiento matemático les permiten construir nuevos conocimientos y sobre todo otorgar aplicabilidad a los distintos contenidos tratados, vinculándoles no tan solo con otros contenidos matemáticos y de otras disciplinas, sino también con contextos de la vida cotidiana (Alsina, 2012). En este punto es crucial la labor del profesor, pues éste debe ser capaz de lograr una correcta interacción entre los estándares de contenidos y los de procesos, para así contribuir al desarrollo de la competencia matemática en los estudiantes, lo cual de acuerdo con Alsina (2009) implica:

- Pensar matemáticamente: construir conocimiento matemático en situaciones donde tenga sentido, experimentar, intuir, relacionar conceptos y abstraer.
- Razonar matemáticamente: realizar deducciones e inducciones, particularizar y generalizar; argumentar las decisiones, así como los procesos y las técnicas.
- Plantear y resolver problemas: leer y entender el enunciado, generar preguntas, planificar y desarrollar estrategias de resolución y validar soluciones.
- Obtener, interpretar y generar información con contenido matemático.



- Usar técnicas matemáticas básicas (para contar, operar, medir, situarse en el espacio y organizar y analizar datos) e instrumentos (calculadoras y tecnologías de la información, de dibujo y medida) para hacer matemáticas.
- Interpretar y representar expresiones, procesos y resultados matemáticos con palabras, dibujos, símbolos, números y materiales.
- Comunicar el trabajo y los descubrimientos a los demás, tanto oralmente como por escrito, usando de forma progresiva el lenguaje matemático.

Es precisamente en este punto donde todo lo anterior es de gran relevancia para este estudio pues uno de los principales objetivos de este análisis es proporcionar información sobre el conocimiento matemático y didáctico que necesitan los profesores de educación básica para enseñar probabilidad, es decir del conocimiento necesario para propiciar el desarrollo de la competencia matemática en sus estudiantes.

Otro referente internacional en esta línea son los *Common Core State Standards for Mathematics* o Estándares Comunes para las Matemáticas de la *Common Core State Standards Initiative* (CCSSI, 2010). Estos estándares describen los conocimientos y habilidades que los profesores deben ser capaces de desarrollar en sus estudiantes en cada nivel, es decir, “lo que se espera que los estudiantes aprendan y sean capaces de hacer” (CCSSI, 2010, p. 5). Se trata de un conjunto de orientaciones para la práctica de matemáticas y del contenido en matemáticas, con el objeto de lograr una educación de alta calidad que permita a los estudiantes acceder a los conocimientos y habilidades necesarios para sus vidas después de la escuela, ya sea en la universidad o en el mundo laboral.

Los estándares para la práctica de matemáticas buscan describir la variedad de experiencias (habilidades) que los profesores deben desarrollar en todos sus estudiantes desde la educación infantil hasta el décimo segundo grado (nivel 12), para que éstos puedan aplicar los conocimientos matemáticos, es decir, sean matemáticamente competentes. Tales estándares se basan, por un lado en los estándares de procesos de la NCTM, y por otro en las competencias matemáticas descritas en el informe *Adding It del National Council Research*, surgiendo de esta manera los siguientes ocho estándares para la práctica de matemática, que a continuación se mencionan:

- Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos
- Desarrollar un razonamiento abstracto y cuantitativo
- Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros
- Modelar usando matemáticas
- Usar herramientas adecuadas de manera estratégica
- Reconocer la importancia de la precisión
- Buscar y hacer uso de una estructura
- Buscar y expresar regularidades en un razonamiento repetido

Mientras que los estándares para la práctica de matemáticas definen las experiencias que los profesores deberían desarrollar en sus estudiantes, los estándares para el contenido en matemáticas presentan una combinación equilibrada entre los procedimientos y la comprensión de conceptos centrales en la formación de los estudiantes, es decir, lo que los estudiantes saben sobre matemáticas. Así, se busca conectar las prácticas con los contenidos, estableciendo un conjunto de estándares específicos para cada nivel, desde el Pre-K-2 al nivel 12, en los distintos dominios (Conteo y cardinalidad, operaciones y pensamiento algebraico, números y operaciones en base diez, números y operaciones-fracciones, medición y datos, geometría, razones y relaciones proporcionales, sistema de numeración, expresiones y ecuaciones, funciones y estadística y probabilidad) definidos para el aprendizaje de las matemáticas.



En el caso de los contenidos vinculados al estudio de la probabilidad, a diferencia de los *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000), éstos no son considerados en la educación primaria, iniciándose su estudio en la educación secundaria en el dominio de estadística y probabilidad. Sin embargo, en el caso de la educación primaria encontramos, dentro del dominio de medición y datos, estándares de contenidos vinculados únicamente a la estadística, con gran énfasis en la recolección, análisis, clasificación y organización de datos utilizando distintos tipos de representación como: dibujos, tablas, gráficos, diagramas, etc.

Como se puede apreciar, en términos generales los referentes internacionales analizados ponen de manifiesto un constante énfasis en el estudio de la probabilidad dada su utilidad como herramienta que permite modelar diversas situaciones en las que existe incertidumbre, y a la vez desarrollar el pensamiento matemático e interpretar distintos tipos de información tanto del ámbito de otras disciplinas como en lo cotidiano y el mundo laboral.

## **2.2. La probabilidad en el currículo escolar chileno para la educación básica**

El currículo chileno de matemáticas en la educación básica (6 a 12 años) se ha modificado recientemente a raíz de la implementación de las nuevas bases curriculares, y actualmente está organizado en los ejes temáticos de: números y operaciones, patrones y álgebra, geometría, medición y datos y probabilidades (Mineduc, 2012). Estas nuevas bases se encuentran estructuradas por Objetivos de Aprendizaje, que describen los desempeños mínimos que deberán alcanzar los estudiantes, por medio del desarrollo de ciertas habilidades, conocimientos y actitudes propias para cada asignatura, en sus distintos ejes temáticos. Para alcanzar los distintos objetivos de aprendizaje el Ministerio de Educación ha desarrollado nuevos programas de estudios de 1° a 6° básico, con los que se busca apoyar a los profesores en la implementación de las nuevas bases curriculares. Tales programas contemplan una planificación anual que contiene indicadores de evaluación para cada objetivo de aprendizaje, además de actividades, ejemplos de evaluación y material educativo sugerido.

Cabe destacar que las nuevas bases curriculares para la asignatura de Matemática, consideran que la formación matemática en la educación básica se logra por medio del desarrollo del pensamiento matemático, el cual involucra las siguientes cuatro habilidades que se integran con los objetivos de aprendizaje y están interrelacionadas entre sí (Mineduc, 2012, p. 3-4):

- Resolver problemas: esta habilidad tiene por objetivo el que los estudiantes sean capaces de dar solución, de manera autónoma, a distintos tipos de situaciones problemáticas, por medio de la aplicación de distintos tipos de estrategias como: la experimentación, ensayo y error, transferencia des problemas similares ya resueltos, etc. siendo capaces de comparar los distintos caminos de solución y evaluar las respuestas obtenidas y su pertinencia.
- Argumentar y comunicar: con esta habilidad se busca que los estudiantes sean capaces de verbalizar y comunicar, progresivamente, sus intuiciones y conclusiones, así como también detectar aquellas informaciones erróneas.
- Modelar: con el desarrollo de esta habilidad se pretende que los estudiantes construyan una versión simplificada y abstracta de un sistema, usualmente más complejo, pero que capture los patrones claves y los exprese mediante lenguaje matemático.
- Representar: esta habilidad tiene por objetivo que los estudiantes aprendan a utilizar una amplia variedad de tipos de registros que le permitan representar distintos tipos de datos de acuerdo a las necesidades que presente cada situación problemática.

Las habilidades descritas, que mantienen un fuerte paralelismo con los estándares de procesos de la NCTM, juegan un rol fundamental tanto en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos, como



## Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado

C. Vásquez, Á. Alsina

en la aplicación de conocimientos para la resolución de problemas en diversas áreas. Por otro lado, el desarrollo de estas habilidades permitirá obtener desempeños medibles y observables de los aprendizajes de los estudiantes, en los cinco ejes temáticos definidos para la asignatura de matemáticas.

Para el eje de datos y probabilidades el Ministerio de Educación se ha planteado el objetivo de que todos los estudiantes registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien a temprana edad y de manera continua a lo largo del currículo escolar en temas relacionados con las probabilidades. Lo cual, de acuerdo a lo planteado por Vásquez y Alsina (2013), permitirá desarrollar en los estudiantes, de manera paulatina a lo largo de toda su etapa escolar, un pensamiento estadístico y probabilístico necesarios para el ciudadano actual, pues éste se ve diariamente enfrentado a situaciones de incertidumbre ante las cuales es necesario que cuente con una actitud crítica que le permita identificar informaciones erróneas que muchas veces aparecen en los distintos medios de comunicación. Siendo esta una de las principales razones de la reciente incorporación de la probabilidad a muy temprana edad en los currículos de diversos países.

Chile no se ha quedado ajeno a esta tendencia, planteándose los siguientes objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación en los distintos niveles educativos relacionados con el tema probabilidad:

Nivel	Objetivo de Aprendizaje	Indicadores de Evaluación Sugeridos
1° básico	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas.	<p>Recolectan datos acerca de situaciones sobre sí mismo y del entorno.</p> <p>Formulan preguntas sobre sí mismo y los demás que pueden ser respondidas a partir de recolección de información.</p> <p>Registran datos, usando bloques y tablas de conteo.</p> <p>Recolectan y organizan datos, usando material concreto, registros informales y tablas de conteo.</p> <p>Responden preguntas, utilizando la información recolectada.</p>
2° básico	<p>Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas.</p> <p>Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.</p>	<p>Recolectan datos acerca de lanzamientos de dados y monedas.</p> <p>Registran datos en una tabla de conteo acerca de datos de lanzamientos de monedas y dados.</p> <p>Registran datos acerca de lanzamientos de dados y monedas, usando cubos apilables.</p> <p>Responden preguntas en el contexto de juegos con monedas, usando registros expresados en cubos apilables.</p> <p>Registran resultados de juegos aleatorios con dados y monedas en tablas.</p> <p>Registran resultados de juegos aleatorios con dados y monedas en gráficos de barra simple.</p>



<b>3° básico</b>	Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas, encontrando el menor, el mayor y estimando el punto medio entre ambos.	Realizan juegos aleatorios con dados de diferentes formas (cubos, tetraedros u otros) y monedas, registrando los resultados en tablas de conteo y diagramas de punto.
<b>4° básico</b>	Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo.	<p>Realizan experimentos con dados cúbicos o de otra forma regular como tetraedro, dodecaedro, etc.</p> <p>Extraen naipes al azar con y sin devolución.</p> <p>Pesan piedritas de un saco de gravilla y determinan la frecuencia absoluta de las masas de 5 g, 10 g, etc.</p> <p>Reconocen que los resultados de experimentos lúdicos no son predecibles.</p> <p>Realizan repeticiones de un mismo experimento, determinan la frecuencia absoluta y la representan en un gráfico.</p> <p>Usan software educativo para simular experimentos aleatorios.</p>
<b>5° básico</b>	<p>Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento en base a un experimento aleatorio, empleando los términos seguro - posible - poco posible - imposible.</p> <p>Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas.</p>	<p>Describen eventos posibles en el resultado de un juego de azar; por ejemplo: al lanzar un dado, indican los resultados posibles incluidos en el evento: “que salga un número par”.</p> <p>Se refieren a la posibilidad de ocurrencia de un evento, mediante expresiones simples como seguro, posible, poco posible o imposible.</p> <p>Dan ejemplos de eventos cuya posibilidad de ocurrencia es segura, posible, poco posible o imposible.</p> <p>Dan ejemplos de eventos cuya probabilidad de ocurrencia es mayor que la de otros eventos, sin calcularla.</p> <p>Juegan a lanzar dados o monedas y, frente a eventos relacionados con estos lanzamientos, dicen, sin calcular, cuál es más probable que ocurra.</p> <p>Hacen apuestas entre alumnos y dicen, sin calcular, quién tiene más probabilidad de ganar.</p>
<b>6° básico</b>	Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo.	<p>Enumeran resultados posibles de lanzamientos de monedas o dados con ayuda de un diagrama de árbol. Por ejemplo, al lanzar tres veces una moneda, o una vez dos dados.</p> <p>Realizan de manera repetitiva experimentos con monedas para conjeturar acerca de las tendencias de los resultados.</p> <p>Conjeturan acerca de porcentajes de ocurrencia de eventos relativos a lanzamientos de monedas o dados.</p>

**Tabla 2.** Contenidos en relación al tema probabilidad desde 1° a 6° año básico (Mineduc, 2012)

Como puede apreciarse en la tabla anterior, el currículo nacional ha incluido el estudio de la probabilidad en el currículo de matemática en todos los niveles escolares, iniciando con actividades



muy sencillas que buscan que el estudiante se enfrente desde pequeño a situaciones donde el azar esta presente y que permitan que sus intuiciones sobre el azar afloren. Para ello se propone la realización de juegos aleatorios, por ejemplo: con monedas y dados, en los que primeramente se solicita registrar los resultados por medio de la utilización de tablas y gráficos, para luego responder distintos tipos de preguntas que lleven a realizar predicciones sobre: el comportamiento de los resultados de dichos experimentos aleatorios y las posibilidades de ocurrencia de determinados fenómenos, y así introducir de forma progresiva la noción de probabilidad. De este modo, a partir de los objetivos de aprendizaje y de los indicadores de evaluación propuestos en las actuales bases curriculares, es posible distinguir tres etapas orientadoras del proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad para la educación básica:

- Plantear distintos tipos de situaciones y de preguntas, en un contexto familiar y de interés para los estudiantes, que les permita distinguir entre aquellos datos que son pertinentes para responder a tales preguntas.
- Organización y análisis de los datos por medio del uso de distintos tipos de registros que permitan la realización de inferencias y predicciones para dar respuesta a las situaciones y preguntas planteadas.
- Adquisición de las nociones básicas vinculadas a la probabilidad e incertidumbre para su posterior aplicación en situaciones de la vida diaria y del estudio de la probabilidad en mayor profundidad en la educación media.

En este enfoque para iniciar a los estudiantes en el desarrollo de la noción de probabilidad, si bien no hay una correspondencia directa, se ve la influencia de las directrices presentadas en los *Principles and Standard for School Mathematics* para trabajar los contenidos de probabilidad (NCTM, 2000), aunque con una menor profundidad y amplitud en los contenidos, puesto que solo se aborda la probabilidad desde un punto de vista intuitivo y más bien ligados a una visión frecuentista de ésta.

Ahora bien, si nos centramos en el énfasis que se otorga al estudio de la probabilidad en las orientaciones curriculares antes descritas, se puede apreciar que en todas ellas se comienza trabajando a partir del planteamiento de situaciones cotidianas de las que emergen o están presentes los conceptos posible, seguro, imposible, etc. que permiten dar cabida al concepto de probabilidad. Así mismo se da gran importancia a la utilización de material concreto como fichas, dados entre otros, los que son vinculados a los juegos de azar y de este modo a la noción de experimento aleatorio, reforzando de esta forma la noción de probabilidad, vinculándole directamente con la asignación de probabilidades desde una perspectiva cuantitativa, para luego pasar a una visión frecuentista de la probabilidad por medio del uso de frecuencias relativas obtenidas de los distintos experimentos aleatorios realizados, ya sea de forma manual o mediante a utilización de algún software.

### **2.3. La probabilidad en el currículo español para la educación primaria**

La Educación Primaria en España tiene carácter obligatorio y gratuito, con una duración de seis cursos académicos, de los 6 a los 12 años de edad. El currículo español se organiza en tres ciclos de dos años cada uno, y en cuatro bloques de contenidos para cada ciclo: Números y operaciones; Medida; Geometría; Tratamiento de la información, azar y probabilidad (MEC, 2007). El bloque 4, como su nombre indica, se organiza en base a dos aspectos: a) tratamiento de la información (gráficos estadísticos en el primer ciclo; gráficos y tablas en el segundo ciclo; y gráficos y parámetros estadísticos en el tercer ciclo); y b) azar y probabilidad (carácter aleatorio de algunas experiencias en el primer y segundo ciclo, e introducción al lenguaje del azar en el segundo ciclo, mientras que en el tercer ciclo no se hace ninguna referencia explícita a los contenidos de azar y probabilidad).

Como se indica en las orientaciones curriculares vigentes, en el currículo español los contenidos del bloque 4 en general, y los que se refieren a azar y probabilidad en particular, adquieren su pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento. Igualmente el trabajo ha de incidir de forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación, para suscitar el interés por los temas y ayudar a valorar el beneficio que los conocimientos estadísticos proporcionan ante la toma de decisiones, normalmente sobre cuestiones que estudian otras áreas. Tienen especial importancia en el bloque los contenidos actitudinales, que favorecen la presentación de los datos de forma ordenada y gráfica, y permiten descubrir que las matemáticas facilitan la resolución de problemas de la vida diaria. A su vez, los contenidos de este bloque deben iniciar en el uso crítico de la información recibida por diferentes medios. En la Tabla 3 se exponen los contenidos que hacen referencia explícita a aspectos de probabilidad en Educación Primaria, y que se han obtenido a partir del análisis de la ORDEN ECI/2211/2007, del 12 de julio, por la que se establece el currículo y regula la ordenación de la Educación Primaria (MEC, 2007):

<b>Ciclo</b>	<b>Contenidos</b>
<b>Primer ciclo</b>	Carácter aleatorio de algunas experiencias: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.</li> <li>- Participación y colaboración activa en el trabajo en equipo y el aprendizaje organizado a partir de la investigación sobre situaciones reales. Respeto por el trabajo de los demás.</li> </ul>
<b>Segundo ciclo</b>	Carácter aleatorio de algunas experiencias: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto.</li> </ul> Introducción al lenguaje del azar: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Constatación del carácter aleatorio de algunas experiencias.</li> <li>- Confianza en las propias posibilidades, y curiosidad, interés y constancia en la interpretación de datos presentados de forma gráfica</li> </ul>
<b>Tercer ciclo</b>	Carácter aleatorio de algunas experiencias: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación y expresión del grado de probabilidad de un suceso.</li> <li>- Utilización del lenguaje adecuado para describir experiencias relacionadas con el azar.</li> <li>- Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas.</li> <li>- Confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales.</li> </ul>

**Tabla 3.** Contenidos en relación al tema de azar y probabilidad en Educación Primaria (MEC, 2007)

Como puede apreciarse en las Tablas 2 y 3, en ambos países las directrices curriculares incluyen los temas de probabilidad a partir de los primeros niveles de la enseñanza primaria. La estructura de los contenidos es gradual y, en términos generales, en ambos países hacen alusión a la utilización de nociones de azar y probabilidad, realización de experimentos aleatorios y el cálculo de la probabilidad de un suceso. Además, se sugiere la incorporación del uso de herramientas tecnológicas como apoyo para fomentar la comprensión de los contenidos propuestos.

De forma más pormenorizada, al revisar los contenidos de probabilidad de ambos países se observa, de acuerdo con Morales y Ruíz (2013), que en los dos primeros años de educación primaria del currículo chileno se fomenta el estudio de datos, tablas y gráficos, presentando los experimentos



aleatorios como una fuente para obtener información. En cambio, en el primer ciclo del currículo español se comienza a introducir el lenguaje que se utiliza para describir conceptos probabilísticos como: imposible, seguro y aquello que es posible pero no seguro. Tanto en los niveles de tercero y cuarto de educación básica en Chile como en el segundo ciclo del currículo español se incluye la realización de experimentos aleatorios, y en el caso español se enfatiza de nuevo el uso de los términos relacionados con el azar y la probabilidad, que en el currículo chileno se introducen en 5° básico. En los dos últimos años de la enseñanza primaria chilena, además de incidir en la descripción de la ocurrencia de un evento usando el lenguaje apropiado, se hace alusión también a la comparación de probabilidades de un mismo evento sin calcularlas y a la realización de conjeturas acerca de la tendencia de resultados obtenidos a partir de la repetición de un mismo experimento, mientras que en el currículo español no se alusión explícita a las conjeturas para, por ejemplo, llegar a deducir la ley de los promedios, pero sí que se incide en el uso de *software* educativo para favorecer la comprensión de este tipo de contenidos. Por otro lado, en el currículo español se menciona, como en el chileno, al uso de lenguaje adecuado para describir experiencias relacionadas con el azar, y se subraya la importancia de relacionar estos aspectos con la vida cotidiana.

Bajo este enfoque y atendiendo tanto a las orientaciones nacionales e internacionales, según Alsina (2013) es importante tener en cuenta a la hora de iniciar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad algunas ideas claves como la importancia de centrarse, primeramente, en el desarrollo informal de la probabilidad a partir de la intuición y del planteamiento de actividades a partir de lo cotidiano, de un contexto cercano para los estudiantes, para así, posteriormente (Batanero y Godino, 2004):

- Proporcionar una amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas.
- Estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de estos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad.
- Organizar la recogida de datos de experimentación de forma que los alumnos tengan posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados.
- Resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por parejas.
- Ayudar a apreciar el fenómeno de la convergencia mediante la acumulación de resultados de toda la clase y comparar la fiabilidad de pequeñas y grandes muestras.

Y de este modo alcanzar los objetivos de aprendizaje planteados. No obstante, es importante destacar que dado lo reciente de la incorporación de la probabilidad en el currículo de primaria, son muchos los profesores que no han tenido la posibilidad de adquirir los conocimientos disciplinares y didácticos, ya sea durante el ejercicio de la docencia o por medio de cursos de educación continua, que les permitan desarrollar de manera efectiva las ideas claves antes expuestas. Razón por la cual es necesario contar con directrices claras, que permitan orientar tanto los procesos de formación inicial como continua del profesorado, que les lleven a transformar su práctica docente. Desde esta perspectiva es de gran importancia el contar con antecedentes en relación al conocimiento matemático y didáctico de los profesores para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria.

### 3. La probabilidad y la formación del profesorado

Actualmente las investigaciones sobre el conocimiento matemático y didáctico de los profesores en probabilidad y su enseñanza son escasas, sobre todo en lo que se refiere a profesores de primaria en ejercicio, pues la mayoría se centra en profesores en formación y sobre todo en profesores de secundaria. Sin embargo, es posible distinguir claramente dos líneas de estudio dentro de este campo: las relacionadas con las actitudes y creencias de los profesores frente a la probabilidad y su enseñanza, y las vinculadas con el conocimiento disciplinar y didáctico. Es en esta última en la cual nuestro estudio busca profundizar, puesto que de acuerdo a investigaciones recientes se ha podido evidenciar que los profesores en formación presentan concepciones erróneas y dificultades en relación a la probabilidad y conceptos vinculados a ella (Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez, 2006; Ortiz, Serrano y Mohamed, 2009) mientras que un grupo importante evita su enseñanza debido a que lo consideran un contenido de menor importancia que podría representar dificultades para los alumnos, o bien por falta de información y preparación (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006). Esto se debería a que los programas de formación inicial, en gran parte, no incluyen dentro de sus mallas curriculares asignaturas relacionadas con la probabilidad y su enseñanza, ya que éstas hasta hace un par de años formaban parte, casi únicamente, de la formación secundaria y no de la educación primaria como hoy ocurre (Batanero, Godino y Roa, 2004; Franklin y Mewborn, 2006).

Una de las primeras investigaciones sobre el conocimiento probabilístico de los profesores de educación primaria en formación, realizada por Azcárate (1995), evidenció una baja comprensión de la noción de aleatoriedad y por ende en la comprensión del conocimiento probabilístico por parte de futuros profesores, pues su razonamiento en relación a la noción de probabilidad se encontraba elaborado más bien a partir de experiencias vinculadas a lo cotidiano que en un conocimiento formal. Situación que se ve reforzada por Begg y Edwards (1999) quienes al solicitar a un grupo de profesores de primaria dar respuesta a tres situaciones relacionadas con ideas básicas de aleatoriedad, sucesos equiprobables e independencia, detectaron una débil comprensión de la probabilidad y de las nociones que subyacen a ella. Con ello no se quiere decir que sea necesario que los profesores cuenten con conocimientos matemáticos acabados de la probabilidad, como teoría de la medida, pero si se requiere que tengan un conocimiento profundo y acabado del contenido a enseñar y de cómo enseñarlo, en nuestro caso un conocimiento y una comprensión profunda de la probabilidad y de ciertos aspectos básicos vinculados a ella, entendiendo por comprensión profunda “los conocimientos que debería poseer un profesor para ejercer en plenitud su tarea de enseñar matemáticas” (Ma, 1999, p. 13). Lo anterior, concuerda con las ideas de Ball, Lubienski y Mewborn (2001) quienes introducen el modelo “*Mathematical knowledge for Teaching (MKT)*”, que se define como el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno (Hill, Ball y Schilling, 2008). Desde este marco, proponen un modelo del conocimiento matemático para la enseñanza en el que se describe el conocimiento matemático necesario para la enseñanza de la matemática escolar, estableciendo, además, la existencia de una correlación positiva entre el conocimiento matemático para la enseñanza y el logro de aprendizaje matemático en los alumnos.

Posteriormente Schoenfeld y Kilpatrick (2008) desarrollan la noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas, que se concibe como la competencia profesional del profesor de matemáticas para ejercer una enseñanza de calidad. Para estos autores, la proficiencia se alcanza a través de la integración de las siguientes dimensiones: a) conocer las matemáticas escolares con profundidad y amplitud; b) conocer a los estudiantes como personas que piensan; c) conocer a los estudiantes como personas que aprenden; d) diseñar y gestionar entornos de aprendizaje; e) desarrollar las normas de la clase y apoyar el discurso de la clase como parte de la “enseñanza para la comprensión”; y f) construir relaciones que apoyen el aprendizaje; g) reflexionar sobre la propia práctica.





A partir del modelo MKT y la noción de proficiencia, Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) elaboran un modelo integrador para el conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas que incorpora, además, los elementos teóricos de Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Este modelo se concibe como “la trama de relaciones que se establecen entre los objetos que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones-problemas matemáticos para implementar procesos de instrucción eficaces (idóneos) que faciliten el aprendizaje de los estudiantes” (Pino-Fan, Godino, Font, 2011, p. 144). Dicha trama de relaciones que da origen al conocimiento didáctico-matemático del profesor, nace de la unión entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido, puesto que cada uno de estos conocimientos, por sí solos, no consideran la totalidad de componentes y facetas que un profesor debe conocer a la hora de enseñar un determinado contenido. De ahí la necesidad de contar con un modelo integrador que contemple las facetas: epistemológica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, que se relacionan directamente con la noción de idoneidad didáctica y sus componentes. Godino (2009) profundiza en dicho modelo y refina algunas de las nociones anteriormente consideradas, planteándose un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor que se encuentra compuesto por un conjunto de facetas y niveles para el análisis didáctico, que interactúan entre sí (figura 2), donde cada uno de los elementos presentes puede ser considerado como categorías o componentes del conocimiento matemático y didáctico de los profesores.



Figura 2: Facetas y niveles del conocimiento del profesor (Godino, 2009, p. 21)

Como se muestra en la Figura 2, el conocimiento didáctico-matemático del profesor se encuentra constituido por las siguientes categorías de conocimientos fundamentales necesarios para que un profesor lleve a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje:

- Conocimiento del contenido: común, especializado y ampliado: se fundamenta en la faceta epistémica del conocimiento del profesor, a través del cual se espera indagar en los conocimientos matemáticos correspondientes al contexto institucional en el que se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje. Para ello se elaboran consignas orientadas a identificar, clasificar y evaluar aspectos específicos del conocimiento que se pone en juego para resolver tareas o problemas matemáticos (conocimiento común); del conocimiento especializado del contenido el cual considera las distintas formas de representar (lenguajes) ideas y problemas matemáticos, así como los distintos procedimientos, definiciones, propiedades y argumentos que permiten alcanzar su solución; y por último el conocimiento ampliado del contenido que pretende evidenciar la relación entre el contenido a enseñar con ideas matemáticas más avanzadas.
- Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes: se fundamenta en la faceta cognitiva y afectiva del conocimiento del profesor, por lo que incluye conocimientos



relativos a conocimientos personales de los alumnos, errores, dificultades y conflictos presentes en sus aprendizajes y su progresión, además de las actitudes, emociones, creencias y valores vinculados al proceso de estudio y a los objetos matemáticos vinculados a las probabilidades en la educación básica.

- Conocimiento del contenido en relación a la enseñanza: se fundamenta en las facetas interaccional y mediacional del conocimiento del profesor, por lo que involucra conocimientos relativos a los patrones de interacción entre el profesor y sus alumnos, su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados, además de aspectos vinculados a los conocimientos del profesor en relación a los recursos tecnológicos y la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
- Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinarias: tiene sus fundamentos en la faceta ecológica del conocimiento del profesor, pues considera aspectos del currículo, entorno social, político, económico, etc. que condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Desde esta perspectiva, la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria representa un verdadero desafío sobre todo para los profesores en ejercicio, puesto que como las mismas investigaciones lo han dilucidado, éstos no cuentan con una formación adecuada al respecto, es decir, en muchos casos, éstos no cuentan con los conocimientos fundamentales necesarios para que un profesor lleve a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje, lo que les lleva a presentar concepciones erróneas y una ausencia de herramientas matemáticas y didácticas necesarias para alcanzar los objetivos de aprendizaje planteados para la educación primaria.

Dicha situación representa no solo un reto para el profesorado chileno y español sino para muchos otros países, puesto que como ya se ha expuesto gran parte de los profesores de educación primaria no ha recibido una formación para la enseñanza de la probabilidad, y si la ha recibido ha sido desde una perspectiva teórica y no didáctica, lo que plantea la necesidad de contar con programas de formación inicial y continua que permitan que los profesores adquieran las herramientas tanto disciplinares como didácticas para responder a las nuevas exigencias de la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria.

Lo cual, desde la perspectiva del modelo de categorías del conocimiento didáctico-matemático del conocimiento del profesor (Godino, 2009) debe orientarse al desarrollo de una comprensión en profundidad de los contenidos de probabilidad del currículo escolar, es decir, en el desarrollo de la capacidad de resolver problemas de probabilidad que requieran del dominio de conceptos básicos (conocimiento del contenido), como por ejemplo la resolución de problemas de asignación de probabilidades (Figura 3):

Un juego consiste en poner al jugador frente a tres cajas con ositos de plástico en su interior y pedirle sacar un osito de cada caja. La primera tiene 3 osos rojos, 3 osos azules y 1 oso verde. La segunda tiene 2 osos rojos, 1 oso azul y 2 osos verdes. La tercera tiene 1 oso rojo, 1 oso verde y 1 oso azul.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los tres osos sacados sean rojos? Explique.

b) Suponga que sacó tres ositos rojos en la primera jugada y que no se devuelven los ositos a sus cajas, ¿cuál es la probabilidad de sacar tres ositos rojos nuevamente?, ¿cuál es la probabilidad de sacar 3 ositos azules?

Figura 3: Ejemplo conocimiento del contenido (Mineduc 2012b, p. 162)



Por medio de situaciones problemáticas como la anterior, es posible desarrollar aspectos específicos del conocimiento del contenido que los profesores deben poner en juego a la hora de dar solución a un determinado problema, permitiéndoles además analizar y describir fenómenos aleatorios distintos que lleven a cuantificar la probabilidad de ocurrencia de eventos, considerando sus distintas formas de representación, procedimientos, propiedades y argumentos. Asimismo, dicha formación debe encaminarse al desarrollo de la faceta cognitiva y afectiva del conocimiento del profesor (conocimiento del contenido en relación a los estudiantes) considerando el estudio de situaciones en las cuales se den a conocer algunos de las dificultades y errores comunes durante el aprendizaje de la probabilidad (Figura 4):

Muchas personas piensan que después de tirar 5 veces una moneda y obtener cara todas las veces, la probabilidad de tener una cara la próxima vez es distinta que  $\frac{1}{2}$ . Comente los argumentos que siguen.

- a) La probabilidad que salga cara es mayor que  $\frac{1}{2}$  pues la moneda debe estar cargada.
- b) La probabilidad que salga cara es menor que  $\frac{1}{2}$  pues como han salido tantas caras toca que salga sello.

Explique cómo aprovechar estos razonamientos, fomentando el estudio sistemático de estos temas sin sacrificar la intuición.

**Figura 4:** Ejemplo conocimiento del contenido en relación a los estudiantes (Mineduc 2012b, p. 165)

En situaciones como la anterior es importante que el profesor reconozca el potencial de este tipo de dificultades ante la independencia de sucesos, de modo de considerar y valorar el sentido común para el estudio de la probabilidad.

Otro aspecto que no se debe dejar de lado en la formación del profesorado para la enseñanza de la probabilidad, son los aspectos vinculados al conocimiento del contenido en relación a la enseñanza, es decir, el conocimiento que el profesor debe tener sobre las relaciones que se dan entre la enseñanza y el aprendizaje, así como de su capacidad para identificar los efectos que pueden tener los modos de gestionar la clase (tiempo, materiales, trayectoria didáctica) sobre el aprendizaje de sus alumnos. Tal tipo de conocimiento es posible de desarrollar por medio del enfrentamiento a situaciones en las que, por ejemplo, debe seleccionar recursos pertinentes para apoyar el proceso de enseñanza del azar (Figura 5):

Describa las ventajas y desventajas de la utilización de discos (ruletas), en versión electrónica (mediante simulación computacional) o en versión concreta, para ilustrar los conceptos básicos de probabilidad. Compare con otras representaciones como diagramas de árbol.

**Figura 5:** Ejemplo conocimiento del contenido en relación a la enseñanza (Mineduc 2012b, p. 165)

Y por último, y no por eso menos importante, el desarrollo de la faceta ecológica del conocimiento del profesor, es decir, del conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinarias, entendido como las actividades y tareas que se proponen para lograr los objetivos planteados (Figura 6), para ello es fundamental que conozca el currículo en nuestro caso en el tema de probabilidad, sus objetivos y contenidos.

Al comienzo de quinto año básico se propone realizar una prueba de diagnóstico para evaluar los aprendizajes previos del eje Datos y Azar de primero a cuarto año básico. ¿Cuál contenido considera usted que sería el más importante de diagnosticar antes de iniciar la enseñanza de probabilidades en ese año? Justifique su apreciación.

**Figura 6:** Ejemplo conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares (Mineduc 2012b, p. 166)

Como es posible apreciar, los ejemplos antes expuestos abordan por medio de la resolución de tareas y situaciones sencillas algunos de los aspectos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, que llevarían a desarrollar las competencias profesionales de los profesores de primaria, es decir, el nivel de su conocimiento en relación a cada una de las categorías de conocimientos que conforman el conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas.

#### 4. Reflexiones finales

En este trabajo hemos presentado un análisis de referentes curriculares internacionales y nacionales en relación a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, permitiéndonos evidenciar la tendencia de introducir tempranamente el estudio de la probabilidad, lo cual significa un enorme desafío a todo el sistema educacional, y sobre todo a las instituciones formadoras de profesores. Es por esta razón, que hemos presentado algunos modelos que buscan categorizar el conocimiento del profesor de matemática, como elemento central para el formador de profesores a la hora de conducir el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en el profesorado. Es por ello que se ha finalizado con un conjunto de situaciones problemas que buscan ejemplificar, y de este modo otorgar algunas directrices para la formación del profesorado en relación al tipo de conocimientos a desarrollar en torno a la probabilidad y su enseñanza.

Desde este marco, consideramos que es necesaria una adecuación o reestructuración de los actuales programas de formación inicial y continua del profesorado de primaria que contemple la mejora de aspectos disciplinares como didácticos pues, en su mayoría, los profesores de primaria cuando se ven enfrentados a la enseñanza de la probabilidad, se limitan a enseñar un conjunto de técnicas y formulas sin mayores interpretaciones que no facilitan la comprensión de la probabilidad y de sus conceptos asociados por parte de los estudiantes, mostrando de este modo una debilidad en la comprensión de los contenidos a enseñar y del conocimiento necesario para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje. Razón por la cual, es preciso que dentro de los programas de formación inicial y continua del profesorado se consideren cursos orientados a entregar el conocimiento matemático y didáctico, que permita a los profesores comprender los conocimientos matemáticos que deberán poner en juego a la hora de enseñar probabilidad, además de desarrollar las competencias profesionales necesarias para anticiparse a los posibles errores y dificultades que pueden presentar los estudiantes en su proceso de aprendizaje, y la forma de superar tales dificultades.

Para ello, en futuros estudios va a ser necesario seguir indagando para poder ofrecer una formación que logre desarrollar una comprensión adecuada de la probabilidad, de los conceptos que subyacen a ella y de las distintas estrategias para promover su enseñanza, por medio de la resolución de problemas, la experimentación y simulación de fenómenos aleatorios; enfoque que finalmente cambiará la mirada y los conocimientos del profesor en relación a la probabilidad y su enseñanza. Por otro lado, es importante que los profesores cuenten con una formación que los lleve a tener una actitud reflexiva y crítica sobre los conceptos que deben enseñar, sus estrategias de enseñanza y de la manera en cómo aprenden sus estudiantes, para empoderar que progresivamente consideren la probabilidad como una herramienta para el análisis de información, modelamiento y resolución de problemas provenientes de distintos ámbitos.



## **Bibliografía**

- Alsina, Á. (2013). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Didácticas Específicas*, N° 7, págs. 4-22.
- Alsina, Á. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Números*, 80, 7-24.
- Alsina, Á. (2009). Matemáticas en la educación primaria. En N. Planas y Á. Alsina (2009). *Educación matemática y buenas prácticas*. (pp. 93-144). Barcelona: Editorial Graó.
- Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Batanero, C. y Godino, C. (2004). VI. Estocástica: estadística y probabilidad. En J.D. Godino (Ed.); *Didáctica de la Matemática para maestros* (pp. 405-455). Departamento de Didáctica de las Matemáticas: Universidad de Granada.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teacher to teach probability. *Journal of Statistics Education* [en línea], 12 (1). Recuperado el 20 de diciembre de 2012, de [www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html](http://www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html)
- Begg, A. y Edwards, R. (1999). Teachers' ideas about teaching statistics. *Proceedings of the 1999 combined conference of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*. Melbourne: AARE & NZARE. Recuperado el 23 de Agosto de 2012, de <http://www.aare.edu.au/99pap/beg99082.htm>.
- Common Core State Standards Initiative (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Recuperado el 30 de Septiembre de 2011, de [http://www.corestandards.org/assets/CCSSI\\_Math%20Standards.pdf](http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf)
- Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through Project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.). *Joint ICMI/IASE Stud: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3), 237-284.
- Hill, H. C., Ball, D.L. y Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007). *ORDEN ECI/2211/2007, del 12 de julio, por la que se establece el currículo y regula la ordenación de la Educación Primaria*. Madrid, España. *Boletín Oficial del Estado* n° 173

- Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.
- Ministerio de Educación (2012b). *Estándares Orientadores para Egresados de carreras de Pedagogía General Básica*. Santiago de Chile.
- Morales, R. y Ruíz, K. (2013). Comparación entre los contenidos del currículo chileno y español en el área de estadística y probabilidad. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 137-142). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics (Trad. Castellana, *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Ortiz, J., Serrano, L. y Mohamed, N. (2009). Competencias de los futuros profesores de primaria sobre la probabilidad. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica*. (pp. 95-116). España: Universidad de Granada.
- Ortiz, J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L., y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en profesores en formación. En P. Bolea, M.J. González y M Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.
- Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador de Bahía, Brasil.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2013). Conocimiento didáctico y matemático en profesores de primaria para la enseñanza de las probabilidades. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 165-172). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

**Claudia Vásquez Ortiz.** Profesora de Matemática y Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Estudiante de Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación son la didáctica de la matemática y la formación del profesorado de primaria. [cavasque@uc.cl](mailto:cavasque@uc.cl)

**Ángel Alsina** es profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado numerosos artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina. [angel.alsina@udg.edu](mailto:angel.alsina@udg.edu)

