NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 84, noviembre de 2013, páginas 147-158

Problemas de Secundaria y Torneos 2013
Problemas Comentados XXXV

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Aportamos soluciones de los alumnos a los ejercicios propuestos en la Primera Fase del Torneo de *la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas* para alumnos de Segundo de la Educación Secundaria Obligatoria a nivel de toda la Comunidad Canaria, lo que nos permite vislumbrar la manera de razonar ante estos ejercicios, de un tipo medio de alumno. También se muestran los enunciados de los propuestos en la Fase Final de dicho Torneo y en el Torneo de Primaria. Este Torneo para Secundaria presenta este año la novedad de poder participar por parejas, formando equipo.

Palabras clave Torneos de resolución de problemas. Olimpiadas matemáticas. Soluciones comentadas de alumnos a problemas en Secundaria Obligatoria. Enunciados de ejercicios para alumnos de Secundaria y de Primaria propuestos en Torneos por la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas de la Comunidad Canaria.

Abstract We provide solutions from students to the exercises in the first phase of the Tournament for secondary school for all the Canary Islands, allowing us to glimpse the way of reasoning with these exercises, from an average rate of student. Also the utterances of the proposed Final Phase of the tournament and the tournament Elementary. This tournament for Secondary the novelty presents this year to participate teams of two students.

Keywords Tournaments troubleshooting. Math Olympics. Student Solutions commented on Obligatory Secondary problems. Utterances of exercises for students of Secondary and Primary tournaments proposed by the Sociedad Canaria Isaac Newton of Canary Islands.

Completamos la información sobre la XXIX edición del Torneo

En el artículo anterior presentamos los problemas planteados en la primera fase del Torneo de Matemáticas que celebra la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas que, como apuntábamos, va por su XXIX edición; expusimos algunos comentarios extraídos de las respuestas de los alumnos, cosa que ya hemos hecho en otras ocasiones y que nos sigue pareciendo interesante por las aportaciones al conocimiento de la forma de pensar, de los niveles de conocimientos, de los propios errores y habilidades de los alumnos, de cómo enseñamos, etc.

En este artículo completaremos la información dada en el artículo de esta misma revista en volumen 83. En primer lugar hemos seleccionado algunos protocolos de respuesta de alumnos; naturalmente, sin nombre, porque ya hemos comentado que los alumnos no firman con su nombre sino

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

con una clave que es aclarada después de la corrección y sólo para los alumnos seleccionados como finalistas.

La selección ha sido hecha casi al azar, solamente con la precaución de comprobar que al menos tenía un problema bien resuelto y que entre todos estuviesen respuestas para cada uno de los problemas. No son alumnos con la máxima puntuación, sino de corte medio, con algunos errores incluso. Eso nos permitirá ver sobre todo el modo de pensar que tienen y la mayor variedad posible en la manera de presentar la solución de los problemas. Hemos respetado íntegramente su ortografía y su sintaxis.

En el primer problema (Parque Jurásico) hemos optado por presentar varias soluciones para apreciar como razonan, su parquedad (o no) al explicarse, la elección de diagramas, etc. En el resto de problemas hemos seleccionado una respuesta por problema.

Problema nº 1. Parque Jurásico

En el mundo de los animales extintos se encuentran el Pegaso y el Dinosaurio. El Pegaso miente los lunes, martes y miércoles, y el Dinosaurio miente los jueves, viernes y sábados. En todas las demás ocasiones ambos animales dicen la verdad. Un día ambos animales extintos mantuvieron la siguiente conversación:
Ayer me toco mentir - dijo el Pegaso
También a mí me toco mentir - contestó el Dinosaurio
¿En qué día de la semana estaban?

Participante 105, Zona 8

Mienten → *Pegaso: lunes, martes y miércoles.*

Dinosaurio: jueves, viernes y sábados.

Domingos ambos dicen la verdad.

Es el jueves, pues el Pegaso miente el miércoles, con lo cual está diciendo la verdad al decir que mintió ayer, y el Dinosaurio miente los jueves por lo que no es cierto que mintiese ayer.

Solución: el jueves.

Participante 204, Zona 8

Pegaso miente			*Pegaso dice verdad*			
LUNES	*MARTES*	*MIÉRCOLES*	***JUEVES***	*VIERNES*	*SÁBADO*	*DOMINGO*
Dinosaurio dice verdad			*Dinosaurio miente*			

En el jueves, porque el jueves es uno de los días donde Pegaso dice la verdad y el miércoles dice mentiras y el jueves, al contrario que el Pegaso, los jueves mienten y los miércoles dicen la verdad.

El domingo, los dos dicen la verdad o mienten porque no habla en ningún momento de ese día, por lo que deduzco que no dicen nada o es aleatorio.

Participante 103, Zona 8

L	*M*	*X*	*J*	*V*	*S*	*D*
M	*M*	*M*				
Pegaso						

L	*M*	*X*	*J*	*V*	*S*	*D*
			M	*M*	*M*	
Dinosaurio						

Ninguno de los animales miente el mismo día por lo que se deduce que uno miente. Tiene que ser un día en el que uno diga una mentira y otro no y además que el que miente no mintiera el día anterior y que el otro sí. Sólo hay un día que cumpla estas condiciones por lo que es ese día, el jueves.

Participante 113, Zona 8

	Lunes	*Martes*	*Miércoles*	*Jueves*	*Viernes*	*Sábado*	*Domingo*
Dinosaurio	*V*	*V*	*V*	*M*	*M*	*M*	*V*
Pegaso	*M*	*M*	*M*	*V*	*V*	*V*	*V*

Por eliminación, el único día en que esas afirmaciones son correctas es el jueves.

Participante 117, Zona 8

El jueves porque al Pegaso le tocaba decir la verdad, lo contrario que el Dinosaurio que como era jueves el día que mantuvieron la conversación al Dinosaurio le tocaba mentir y mintió.

En el problema no coinciden el Pegaso y el Dinosaurio en que los dos en un mismo día mientan, así que, el día de la conversación uno de los dos tenía que mentir, el domingo no podía ser porque los dos dicen la verdad y el día anterior sólo miente el dinosaurio; entonces tenía que ser el jueves.

Participante 3, Zona 10

Datos:

Pegaso miente → Lunes, martes y miércoles

Dinosaurio miente → jueves, viernes y sábado

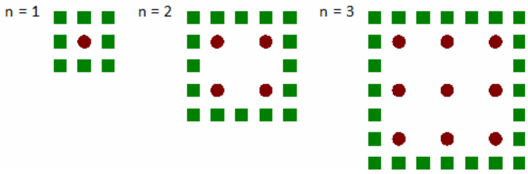
Se encuentran en un día en el que uno de los dos miente.

Estaban en el jueves, pues el Pegaso decía la verdad, el día anterior le tocaba mentir; y el dinosaurio miente porque le toca.

No puede ser otro día, pues ningún otro coincide con los requisitos.

Problema nº 2. Manzanos y coníferas

Un agricultor planta manzanos siguiendo un patrón cuadrado. Para proteger sus árboles contra el viento, planta coníferas alrededor de la huerta.
A continuación puedes ver un diagrama de esta situación donde n es el número de filas de manzanos plantados, ● es un manzano y ■ es una conífera:
¿Cuál debe ser el número de manzanos, que debe plantar el agricultor, para que haya igual número de manzanos que de coníferas?



Participante 3, Zona 10

<u>Datos</u>:
Patrón cuadriculado
1 manzano → 1 fila → 8 coníferas
4 manzano → 2 filas → 16 coníferas
9 manzano → 3 filas → 24 coníferas

<u>Operaciones</u>:
N = 4 → 16 manzanos → 32 coníferas
N = 5 → 25 manzanos → 40 coníferas
N = 6 → 36 manzanos → 48 coníferas
N = 7 → 49 manzanos → 56 coníferas
N = 8 → 64 manzanos → 64 coníferas

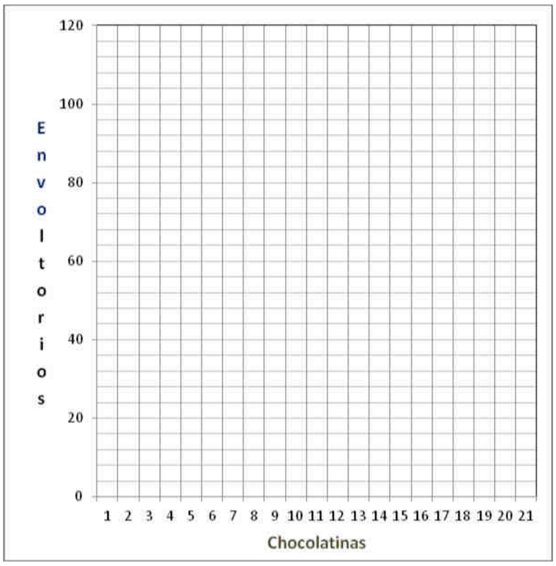
Solución:

Debe haber 64 manzanos.

Yo lo he hecho probando, pero podía saberse que las coníferas van aumentando con los múltiplos de 8. Por lo que la igualdad será en cuanto ambas cantidades tengan que ser múltiplos de ocho, es decir, cuando sean 8 filas con 64 manzanos estarán rodeados por el múltiplo de 8 por 8, es decir, 64.

Problema nº 3. La promoción de las chocolatinas

Mario ha llegado a reunir 71 envases de chocolatinas de una marca que está promocionándose y cambia 8 envoltorios por una nueva chocolatina.
Rellena la tabla y representa, en el siguiente sistema de dos ejes, cómo va evolucionando el número de envoltorios según va cambiándolos por chocolatinas. Ten en cuenta que parte de 71 envoltorios y ninguna chocolatina; luego cambia 8 envoltorios por una chocolatina, se la come y cambia otros ocho envoltorios por otra chocolatina y se la come. Y así sigue, de una en una, hasta que no le quedan suficientes envoltorios para otro cambio.



Chocolatinas	Envoltorios
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

Al final, ¿cuántas chocolatinas se come gratuitamente? ¿Con cuántos envoltorios se queda sin cambiar, si no compra chocolatinas?

Número de chocolatinas finales:
Número de envoltorios que le sobran:
Explica aquí cómo has resuelto el ejercicio.
Chocolatinas
Envoltorios

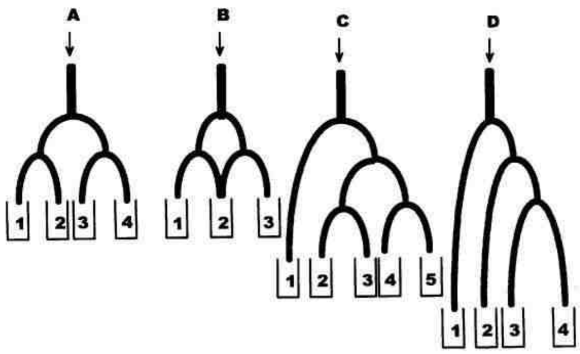
Chocolatinas	Envoltorios
1	*71 – 8 + 1 = 64*
2	*64 – 8 + 1 = 57*
3	*57 – 8 + 1 = 50*
4	*50 – 8 + 1 = 43*
5	*43 – 8 + 1 = 36*
6	*36 – 8 + 1 = 29*
7	*29 – 8 + 1 = 22*
8	*22 – 8 + 1 = 15*
9	*15 – 8 + 1 = 8*
10	*8 – 8 + 1 = 1*
11	
12	

Participante 105, Zona 8

Se come 10 chocolatinas.
Le sobra un envoltorio.
He restado a 71, 8 y luego sumado 1, luego he repetido el mismo procedimiento con el resultado de esta operación y así sucesivamente hasta quedarme con menos de 8 envoltorios.

Problema nº 4. Muchas bolas

Imagínate que disponemos de 1000 bolas iguales y del mismo peso. Las introducimos una tras otra por la entrada de cada uno de los siguientes dispositivos.
¿Cuántas crees que probablemente se depositarán en cada cajetín? ¿Por qué?



Participante 204, Zona 8

(Sobre cada diagrama escribe en cada rama del árbol [:2])

A: 1000 : 4 = 250 ***250 en cada una***

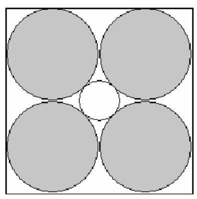
B. Caen las bolas y como hay dos caminos dividimos 1000 : 2 = 500, y luego de estos caminos surgen dos más, pero dos de ellos desembocan en el mismo, por lo tanto sumamos la cantidad que nos dé en esos caminos (250 + 250 = 500). Resultado: en el 1, hay 250; en el 2, hay 500; en el 3, hay 250.

C. Entran las bolas y se dividen 500 y 500, por lo tanto la caja 1 tiene 500. Ahora dividimos 500 : 2 = 250 y ahora dividimos 250 : 2 = 125. Resultado: en el 1, hay 500; en el 2, hay 125; en el 3, hay 125; en el 4, hay 125.

D. Entran y como hay dos caminos, los dividimos entre dos, 1000: 2 = 500; la caja 1 tiene 500; ahora por el otro camino seguimos dividiendo 500 : 2 = 250; la segunda caja tiene 250; y por último en la última desembocadura dividimos 250 : 2 y nos da 125, en la tercera y cuarta cajas hay 125. Resultado: caja 1 = 500, caja 2 = 250, caja 3 = 125 y caja 4 = 125.

Problema nº 5. Cinco fichas

Cuatro fichas circulares iguales se tocan entre sí, tal y como se ve en la figura. Averigua el radio de la mayor ficha con forma circular que puede colocarse en el hueco que dejan las cuatro.



Participante 3, Zona 10

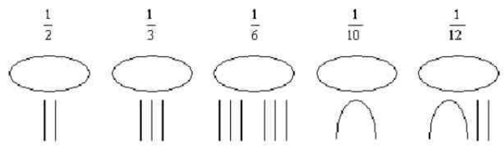
(Estos chicos tienen también sus dificultades a la hora de resolver estos problemas, pero su preparación les permite hacer frente a las situaciones aunque sus respuestas no sean las que nosotros esperamos. He aquí un ejemplo, cómo no, con la geometría y la medida indirecta.)

Datos:

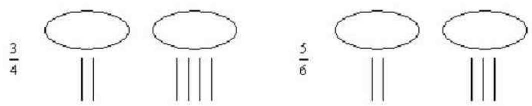
4 fichas, idéntico tamaño, colocadas igual que la figura.
La figura central será siempre del mismo tamaño, pues aunque las exteriores aumenten el suyo, el espacio entre las cuatro no variará.
El radio del círculo central será igual a la distancia que hay desde la unión de dos círculos exteriores hasta el punto en el que comienza el círculo pequeño central.
Midiendo, el radio del círculo central sería de, aproximadamente, 0,6 cm.

Problema nº 6. Fracciones egipcias

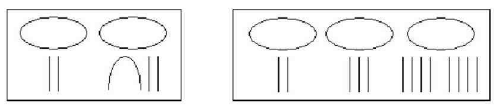
En Egipto se usaban fracciones con numerador igual a la unidad, que se representaban así:



Las fracciones con numerador distinto de la unidad las expresaban como suma de fracciones del tipo anterior:



a) ¿Qué fracciones son las siguientes?



b) ¿Cómo escribían los egipcios las fracciones siguientes? **¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.**

c) ¿Podrías indicar una manera de expresar cualquier fracción como suma de fracciones egipcias diferentes?

Participante 204, Zona 8

(Lo primero que hace es comprobar la segunda afirmación después de haber entendido la primera.)

1/2 + 1/4 = 2/4 + 1/4 = 3/4   mcm (2 y 4) = 4

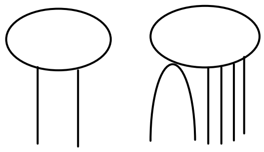
$1/2 + 1/3 = 3/6 + 2/6 = 5/6$ *mcm (2 y 3)* $= 6$
a) $1/2 + 1/12 = 6/12 + 1/12 = 7/12$ *mcm (2 y 12)* $= 12$

$1/2 + 1/3 + 1/8 = 12/24 + 8/24 + 3/24 = 23/24$ *mcm (2, 3 y 8)* $= 24$

b) 7, al ser un número primo, indica que sus denominadores tienen que ser 7 o 1, pero un modo mucho más fácil es multiplicando esa fracción para obtener números pares o no primos, como por ejemplo en el primer caso:

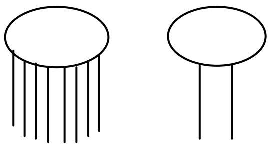
$4/7 = 8/14 = 7/14 + 1/14 = 1/2 + 1/14$

Expresada en fracciones egipcias sería:



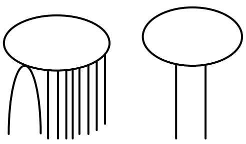
La siguiente, 5/8 se podrá resolver tal cual poniendo:

$5/8 = 1/8 + 4/8 = 1/8 + 1/2$



Y la última, 5/9, la multiplicamos por 2 (amplificar) y ponemos:

$5/9 = 10/18 = 1/18 + 9/18 = 1/18 + 1/2$



c) El truco es en pasarla a que el denominador sea par (multiplicándola por 2) y luego pones 1/x (mismo denominador de la fracción que queremos pasar y la suma que tenga como denominador un número que al dividirlo por el denominador inicial y multiplicarlo por 1 te dé un número que al sumarlo por el otro 1 de la otra fracción te dé el mismo numerador de la fracción pasada a par). En estos casos, la otra fracción siempre ha sido 1/2 (1/x + 1/2), con x par.

(Él entiende y sabe lo que hace, a nosotros nos cuesta).

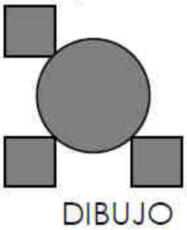
En esta Primera Fase se seleccionan los alumnos que deberán acudir a la Segunda Fase donde, a su vez, se seleccionan los tres que deberán representar a Canarias en las Olimpiadas nacionales de su edad. Este año se ha incorporado una novedad en el Torneo: la participación por parejas, además de la habitual de forma individual.

La Segunda Fase tuvo lugar el viernes 10 de mayo de 2013 en la ciudad de La Laguna (Tenerife, España), por la mañana con una prueba por equipos desarrollada en el casco histórico de esta ciudad y por la tarde con una prueba escrita y otra manipulativa, ambas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna.

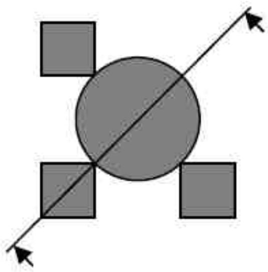
Los problemas de esta Segunda Fase del Torneo fueron los que se muestran a continuación.

Problema nº 1. La magia del espejo

A continuación tienes un dibujo y la representación de un espejo (las flechas señalan la superficie reflectante).



Si colocamos el espejo sobre el dibujo en la posición que dibujamos a continuación la imagen que se ve a través del espejo junto con lo que queda fuera, es la misma que la anterior.



Encuentra todas las posiciones en que puedes colocar el espejo para ver:

a) el círculo completo y 3 cuadrados
b) el círculo completo y 2 cuadrados
c) sólo 1 cuadrado
d) sólo 2 cuadrados

Problema nº 2. Jugando con los dados

Candelaria y Pino son dos amigas que se han inventado un juego de dados con las siguientes reglas:

Lanzan dos dados sucesivamente y calculan la resta de puntos entre el mayor y el menor.

Si resulta una diferencia de 0, 1 ó 2 entonces Candelaria gana una ficha.

Si resulta 3, 4 ó 5 es Pino quien gana una ficha.

Comienzan con un total de 20 fichas y el juego termina cuando no quedan más.

¿Te parece que este juego tienen las mismas posibilidades de ganar?

Si tuvieras que jugar, ¿qué jugador preferirías ser?

Problema nº 3. Aterriza como puedas

Miguel de la Peña, es un piloto novato de Canarias Airlines, y se encuentra en un avión a 5000 metros de altura y, para aterrizar, está descendiendo a razón de 200 metros cada 5 kilómetros, que es justo la trayectoria exacta para aterrizar en el aeropuerto internacional de San Borondón.

a) Dibuja, haciendo una gráfica, el itinerario de bajada hasta llegar al aeropuerto.
b) ¿A qué distancia se encuentra el avión del citado aeropuerto?
c) ¿A partir de qué distancia del aeropuerto se podrían construir edificios de 30 metros de altura, para que, con un margen superior de 10 metros, el avión de Miguel no choque con ellos?

Problema nº 4. La tarjeta de crédito

Los dieciséis dígitos de una tarjeta de crédito están escritos en sus casillas de modo que la suma de tres cifras contiguas cualesquiera del número es 18. ¿Podrías averiguar el número completo si sólo recordamos los dos dígitos que aparecen a continuación?

		7										8			

Problema nº 5. Albóndigas

En cinco platos se han repartido cien albóndigas. Los platos 1º y 2º tienen en total 52; entre el 2º y el 3º hay 43; el 3º y el 4º suman 34; mientras que en los platos 4º y 5º hay 30. ¿Cuántas albóndigas hay en cada plato?

A las siete de la tarde del 10 de mayo de 2013 tuvo lugar un acto institucional en el Aula Magna de la Facultad de Matemáticas (Universidad de La Laguna) con ocasión del Día Escolar de las Matemáticas. En dicho acto tuvo lugar la entrega de obsequios y diplomas a los participantes en la Segunda Fase del Torneo, a los ganadores por islas, a los ganadores del Torneo, tanto en la modalidad individual como en la de parejas y al alumno que presentó la solución más creativa.

Los ganadores en la modalidad por parejas resultaron ser:

- Paulina Castro Rodríguez y Valeria Castro Rodríguez del IES Eusebio Barreto Lorenzo de Los Llanos de Aridane (La Palma).
- Shaam Daswani Mirpuri y Ayrton Artazcoz Marqués de Olivera del Colegio La Salle San Ildefonso de Santa Cruz de Tenerife.

Asimismo, los ganadores en la modalidad individual resultaron ser:

- David Jorge Carrillo del colegio Nuryana de La Laguna (Tenerife).
- Abraham Ortega Reboso del colegio Sagrada Familia de Las Palmas de Gran Canaria.
- David Riverol Martín del IES Canarias Cabrera Pinto de La Laguna (Tenerife).

El premio especial a la solución más creativa, por la búsqueda de estrategias adecuadas y su expresión concisa y brillante fue concedido a David Jorge Carrillo.

Los tres mejor clasificados de la Segunda Fase representaron a Canarias en la XXIV Olimpiada Matemática Nacional, que este año tuvo lugar en Andorra del 27 al 30 de junio. Esta Olimpiada Matemática la convoca la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y la organiza cada año una de las sociedades federadas en la comunidad autónoma donde radica. Este año, de forma excepcional, la organizó la Consejería de Educación de la Embajada de España en Andorra, con un Acuerdo de Colaboración con la FESPM.

El XXIX Torneo de Matemáticas es una realidad gracias al trabajo desinteresado de un grupo amplio de profesores que lo han hecho posible, al entusiasmo de los cientos de alumnos y alumnas que han participado, al de sus padres y madres que los han apoyado,

No hemos comentado la prueba manipulativa porque nos parece mejor para el artículo de la sección de Juegos. Allí la analizaremos.

Torneo de Primaria

También existe un Torneo de Primaria, con creación más reciente, y dedicado a los alumnos de Sexto de Educación Primaria. Ya hemos hablado de él en otras ocasiones. Ahora sólo vamos a presentar los problemas de la prueba de este año, celebrada el 12 de abril.

Problema 1. Juego de monedas alternadas.

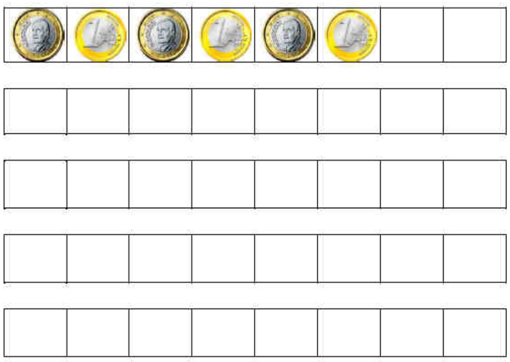
Alex colocó seis monedas sobre una regla, de manera que hacia arriba quedan tres caras y tres cruces de forma alternada.

Objetivo: Coloca las tres caras juntas y las tres cruces juntas.

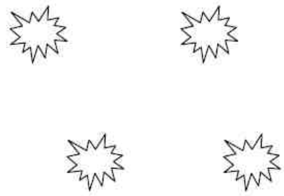
Reglas: Sólo puedes mover las monedas de dos en dos, y además deben estar juntas sin intercambiar el orden en el que se encuentran.

Ejemplo:

Mi amiga Lola dice que es capaz de ganar el juego en sólo cuatro movimientos. ¿Serás tú capaz de realizar la misma hazaña? ¡PUES ADELANTE!



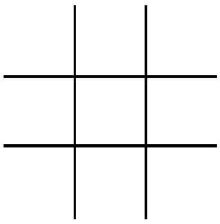
Problema 2. Amarrando triángulos



El abuelo Isidro, tiene cuatro árboles sembrados en dos líneas, y se dispone a amarrar una cuerda alrededor de tres de ellos. ¿De cuántas formas puede hacerlo? ¡A POR ELLO!

¿Y si fueran seis árboles? ¿Y si fueran ocho?

Problema 3. Ninguna en tres en raya



El tres en raya es un juego aburrido si estas sólo, pero usando el mismo tablero, ¿cuántas fichas del mismo color, serás capaz de colocar sin hacer ningún tres en raya, ni en las filas, ni en las columnas, ni en las diagonales?

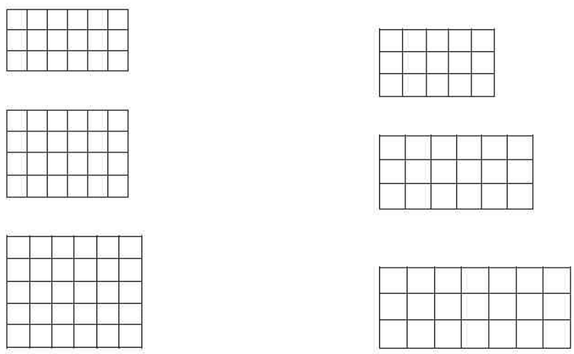
¡VAMOS!

Problema 4. No tengo cambio

En esto, que se encuentran dos profesores de Matemáticas:
-¿Tienes cambio de un euro? – le dijo Déniz a Manolo
- Deja ver, tengo bastante suelto…pues mira no tengo. – Le contesta Manolo.
-¿Cómo va a ser eso?, déjame ver… – dice Déniz – es verdad, no tienes cambio… es más, no se puede tener mayor cantidad de dinero en calderilla, sin tener cambio de un euro.
Si para Déniz, la calderilla son las monedas más pequeñas de un euro (50, 20, 10, 5, 2 y 1 céntimo). ¿Cuánto dinero tenía Manolo?
¡¡¡ADELANTE!!!

Problema 5. Pintando baldosas

El patio del colegio donde estudia mi amiga Avelina es rectangular, y el piso está cubierto de baldosas cuadradas (todas iguales). Avelina las tiene contadas, el patio mide 120 por 40 baldosas. Lo sabe porque jugando el otro día pintó una línea recta de una esquina a la opuesta, y luego la maestra le hizo limpiar todas las que había marcado. ¿Cuántas baldosas tuvo que limpiar Avelina por hacer ruindades?



PISTA: Se sabe que para un mismo problema siempre hay varias formas de llegar a la solución, pero si quieres un consejo, primero cuenta las que marcarías en unos ejemplos pequeños antes de aventurarte a buscar la solución del grande. ¡ÁNIMO!

Con estas dos pruebas de los Torneos de Secundaria y Primaria tenemos, pues, abundante entretenimiento para nuestra próxima cita en la revista.

Y quedamos así hasta el próximo artículo. Pero seguimos insistiendo: resuelvan los problemas, utilícenlos con los alumnos y, sobre todo, aporten sus comentarios a la revista, sus soluciones e, incluso, nuevas propuestas. O, simplemente, cuéntennos lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Vamos, anímense…O como escribieron los redactores del Torneo de Primaria: ¡PUES ADELANTE!, ¡A POR ELLO!, ¡VAMOS!, ¡ADELANTE! y ¡ÁNIMO!

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**