NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 81, noviembre de 2012, páginas 25-32

Errores en el producto, evaluación y gráficas de polinomios

Félix Martínez de la Rosa (Universidad de Cádiz. España)

Fecha de recepción: 13 de marzo de 2012
Fecha de aceptación: 3 de agosto de 2012

Resumen En este artículo se analizan ciertos errores detectados en el producto, evaluación y representación gráfica de polinomios.

Palabras clave Polinomios, errores, producto, evaluación, gráficas.

Abstract In this paper are analyzed some errors detected in the product, evaluation and graphical representation of polynomials.

Keywords Polynomials, errors, product, evaluation, graphics.

1. Introducción

Durante los últimos años, en los que he impartido docencia en las asignaturas de matemáticas de la Facultad de CC.EE. y Empresariales de la Universidad de Cádiz, he observado ciertos errores que cometen los alumnos, y que he clasificado como sigue,

Errores de tipo operativo: son los que se cometen en el cálculo básico, como realizar mal una operación, despejar mal una incógnita o equivocarse al simplificar en un cociente o una raíz.

Unos nos parecen más graves que otros, por ejemplo no es lo mismo efectuar mal un producto que creer que el cuadrado de la suma es la suma de los cuadrados, pero en general son el resultado de la precipitación y falta de concentración en la resolución del ejercicio, sin olvidar una cierta falta de base operativa.

Errores de concepto: son los que tienen que ver con la deficiente comprensión de un concepto. Se detectan al observar el desconocimiento de ciertas características del mismo o, en un sentido más amplio, por la escasa utilización de algún recurso relacionado con ellos.

Suelen estar causados porque esas características o recursos, a pesar de que se les hayan explicado correctamente, en realidad no forman parte de los esquemas conceptuales de los alumnos (entendiendo como tales las imágenes mentales o la idea que guardan en la memoria, lo que tienen interiorizado, acerca de determinado concepto, y que proviene del término “concept image” [Tall y Vinner, 1981]).

Pero otras veces el motivo es que esa determinada característica o resultado relacionado no ha sido lo suficientemente destacada, o se ha introducido con demasiada premura o simplemente nunca se ha hecho. Por esto los profesores, con nuestras propias limitaciones, somos a veces los causantes de algunas de las carencias de nuestros alumnos.

Un error de tipo operativo es, por ejemplo, equivocarse en calcular la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica, mientras que un error de concepto es creer que la suma de infinitos números es siempre infinita. De este mismo tipo es emplear la fórmula de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica en una cuya razón sea 2: se obtiene un resultado que no significa absolutamente nada. Es un tipo de error de concepto que se caracteriza por la aplicación, de forma indiscriminada de la fórmula que nos proporciona un teorema, sin verificar antes si se cumplen los requisitos para poder utilizarla. Un estudio de errores de esta clase puede verse en [Martínez, 2006].

Los profesores de matemáticas tenemos la obligación de prestar mucha atención a los errores operativos, pero para que un alumno comprenda la materia es imprescindible que no cometa los del segundo tipo. De otra forma podrá calcular algo relacionado con un concepto, pero quizás sin saber muy bien lo que está haciendo y empleando técnicas inadecuadas que requieren un esfuerzo innecesario.

En este artículo se analizarán los errores de tipo operativo y de concepto, relacionados con el producto, la evaluación y la representación gráfica de los polinomios, y que han sido detectados en mis alumnos universitarios de matemáticas.

2. Producto de dos polinomios

Analicemos el producto de dos polinomios. Tomemos por ejemplo,

$$\left(3x^3 - 4x^2 + 2x + 3\right)\left(5x^2 + 7x + 3\right)$$

Para calcularlo a mano, se elige el primer término de la izquierda y lo multiplicamos por cada uno de los de la derecha, se sigue con el segundo término de la izquierda y volvemos a hacer los productos con los de la derecha, y así hasta el final. El continuo ir y venir del polinomio de la izquierda al de la derecha es un perfecto abono para los errores. Los tipos de errores detectados son,

1. Olvido de algún producto.
2. Equivocaciones con los signos.
3. Equivocaciones con las potencias.

Los tres son *errores de tipo operativo*. En el artículo [O'Neil, 2006] está documentada la utilización de una configuración tabular para el producto. Consiste en escribir los polinomios en la parte superior y en el lado derecho, descompuestos en potencias de *x*. Se multiplica cada término de la fila superior por cada uno del lado derecho, y el resultado se obtiene sumando todas las cuadrículas,

$3x^3$	$-4x^2$	$2x$	3	
$15x^5$	$-20x^4$	$10x^2$	$15x^2$	$5x^2$
$21x^4$	$-28x^3$	$14x^2$	$21x$	$7x$
$9x^3$	$-12x^2$	$6x$	9	3

Esta forma de realizar el producto está relacionado con el antiguo método árabe Gelosia para multiplicar dos números [ver Suzuki, 1999]. En la dirección de Internet www.**divulgamat**.net/ del centro virtual de divulgación de las matemáticas divulgaMAT, de la RSME puede encontrarse información sobre el mismo.

El método logra indudablemente un objetivo: desaparece el riesgo de olvidarnos de algún producto porque quedaría vacía la casilla. Las confusiones en los signos y en las potencias seguirán apareciendo, aunque el formato tabular ofrece una visión más clara de la operación lo que hace disminuir la frecuencia con la que aparecen los errores, y facilita la revisión de los cálculos.

3. Evaluación de un polinomio

Supongamos que se quiere calcular el valor de un polinomio en un número. Tomemos por ejemplo uno de grado 5,

$$P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Para evaluarlo, los alumnos suelen emplear la técnica de la sustitución de la variable por el número. El problema es que ya sea a mano o empleando una calculadora se necesita realizar nada menos que 4 potencias, 5 productos y 5 sumas. Si expresamos cada término como un producto, por ejemplo $a_5x^5 = a_5 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$, entonces serían 15 productos y 5 sumas. En cualquier caso, es un considerable número de cálculos que lleva consigo un riesgo altísimo de equivocarse.

Pero en esta operación no todos son errores de tipo operativo. A continuación se detallan los que se han detectado,

1. Equivocaciones en el cálculo de sumas y productos.
2. Equivocaciones en el cálculo de las potencias.
3. No relacionar la evaluación con el teorema del resto y la regla de Ruffini.

1. Equivocaciones en el cálculo de sumas y productos

Son *errores de tipo operativo* ocasionados por las muchas operaciones que se efectúan.

2. Equivocaciones en el cálculo de las potencias

Si el número donde se va a evaluar el polinomio es positivo, entonces el error en el cálculo de una potencia es un *error de tipo operativo*.

Sin embargo si el número para evaluar es negativo, se producen equivocaciones que tienen un origen distinto. Se deben a la no utilización de los paréntesis. Es el síntoma de que en el esquema conceptual de algunos alumnos relativo a las potencias, no se incluye el hecho de que no es lo mismo, por ejemplo, $(-2)^4$ que -2^4. Aquí tenemos el primer *error de concepto.*

3. No relacionar la evaluación con el teorema del resto y la regla de Ruffini

Los errores anteriores se producen al evaluar el polinomio mediante la técnica de la sustitución del número en la variable. Sin embargo los alumnos no se dan cuenta que el teorema del resto ofrece una alternativa mejor que la simple sustitución,

El resto que se obtiene al dividir un polinomio $P(x)$ *entre* $x-a$ *es el valor del polinomio en el punto* $x=a$

En definitiva, el valor buscado es el resto de una división. Pero ya que el divisor es $x-a$ se dispone de una herramienta muy buena para obtenerlo: la división sintética, más conocida como la regla de Ruffini. Esta regla presenta una configuración tabular fácil de recordar y que disminuye los cálculos (por ejemplo para un polinomio de grado 5, sólo se requieren 5 productos y 5 sumas para evaluarlo). El problema es que los alumnos han asimilado el uso de este recurso exclusivamente para la obtención de raíces y no para la evaluación: para eso sólo emplean la técnica de la sustitución.

La no inclusión del teorema del resto ni de la regla de Ruffini en los esquemas conceptuales relativos a la evaluación de polinomios, es el síntoma de un claro ejemplo de *error de concepto*.

4. Representación gráfica de polinomios

Evidentemente, la representación gráfica completa de un polinomio no puede hacerse hasta no disponer de los conceptos de derivada, extremo relativo y punto de inflexión. A pesar de eso, en cursos tempranos de matemáticas se pueden realizar gráficas de polinomios con coeficientes enteros de una forma rápida y eficaz.

A la hora de representar la gráfica de un polinomio se observa que los alumnos tienen interiorizada una forma de hacerlo que es claramente deficiente y que tiene su origen en la forma de representar una recta. Para ello los alumnos dan valores a la variable *x*, después sustituyen en la ecuación para obtener el correspondiente valor de *y*, y tras obtener algunos puntos los unen y ya tienen la gráfica.

Ocurre que esta técnica la usan para representar la gráfica de cualquier polinomio (e incluso para no polinomios) pero lo que obtienen es una función lineal a trozos que no tiene demasiada relación con la verdadera gráfica que se busca. Por otro lado, como dan muchos valores a la variable y deben realizan muchas evaluaciones de polinomios (todas por sustitución), los errores de cálculo se multiplican.

Ésta y otras carencias son los errores que se han detectado y que se exponen a continuación,

1. Representar los polinomios dando valores.
2. Desconocer el aspecto aproximado de la representación gráfica de un polinomio.
3. Desconocer los números candidatos a ser raíces de un polinomio.
4. No relacionar la multiplicidad de las raíces con los cambios de signo del polinomio.

1. Representar los polinomios dando valores

Esta práctica tan arraigada, es causa de numerosas equivocaciones. Como ya dijimos antes, su origen está en la representación de rectas y resulta muy difícil de erradicar porque forma parte del esquema conceptual de los alumnos en lo relativo a las gráficas. Es claramente un *error de concepto*, como también lo es el hecho de que para dibujar una recta los alumnos necesiten obtener más de dos puntos para hacerlo.

2. Desconocer el aspecto aproximado de la representación gráfica de un polinomio

En los cursos que imparto, insisto mucho en que los alumnos tengan una noción inicial del dibujo que debe obtenerse, sólo conociendo el grado del polinomio y el signo del coeficiente del término de mayor grado,

a. *Polinomios de grado impar*

1. Los de grado uno corresponden a rectas y bastan dos puntos para dibujar su gráfica.
2. Los de grado mayor que uno corresponden a curvas que recorren el plano, desde la parte superior derecha a la parte inferior izquierda si el coeficiente del término de mayor grado es positivo, y desde la desde la parte inferior derecha a la parte superior izquierda si es negativo (de forma similar a como lo hace una recta).

La figura 1 representa un polinomio de grado impar mayor que uno con el coeficiente del término de mayor grado positivo. Negativo en el caso de la figura 2,

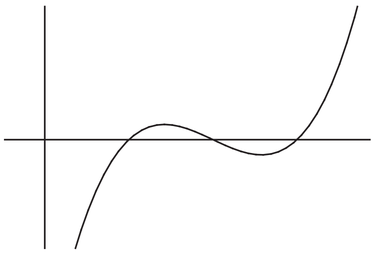

Figura 1

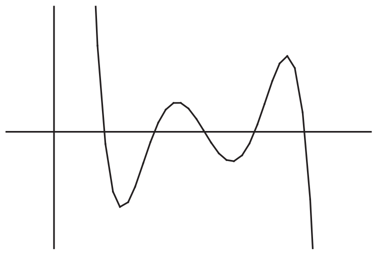

Figura 2

b. *Polinomios de grado par*

1. Los de grado dos corresponden a parábolas. Van hacia arriba si el signo del coeficiente de x^2 es positivo, y hacia abajo si es negativo.
2. Los de grado mayor que dos corresponden a curvas que recorren el plano, desde la parte superior derecha a la parte superior izquierda si el coeficiente del término de mayor grado es positivo, y desde la desde la parte inferior derecha a la parte inferior izquierda si es negativo (de forma similar a como lo hace una parábola).

La figura 3 representa un polinomio de grado par mayor que dos con el coeficiente del término de mayor grado positivo. Negativo en el caso de la figura 4,

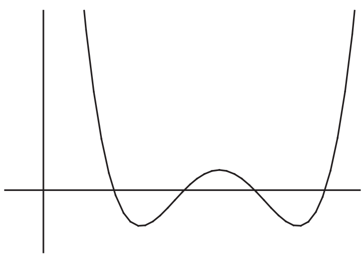

Figura 3

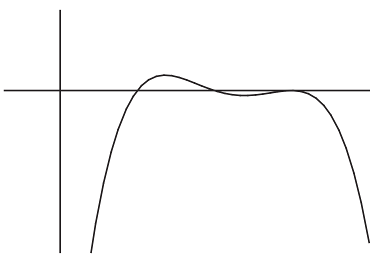

Figura 4

El recurso de hacer un esbozo con una simple mirada al grado y al signo del coeficiente no suele formar parte del esquema conceptual de los alumnos en lo relativo a las gráficas, y constituye una deficiencia que entra en la categoría de *error de concepto*.

3. Desconocer los números candidatos a ser raíces de un polinomio

El siguiente paso en la realización de estas gráficas es obtener las raíces del polinomio, para saber los puntos de corte con el eje *x*. Ya mencionamos antes que los alumnos tienen interiorizada la obtención de las raíces utilizando la regla de Ruffini. El problema es que para aplicarla eficazmente conviene saber de antemano cuáles son los números candidatos para serlo. De hecho, si alguna de las raíces no es $0, \pm 1, \pm 2$, algunos alumnos piensan que el ejercicio es de una complejidad extrema.

Es muy útil conocer el criterio de localización de raíces enteras para polinomios con coeficientes enteros,

Si un número entero es raíz de un polinomio con coeficientes enteros, entonces tiene que dividir al término independiente.

El desconocimiento de quiénes son los candidatos a ser raíz entera provoca que el alumno intente acertar con números al azar, causando su frustración si no las encuentra, y es el síntoma de un claro *error de concepto*.

4. No relacionar la multiplicidad de las raíces con los cambios de signo del polinomio

El esbozo de la representación gráfica de un polinomio (previo al concepto de derivada) se completa con el análisis de los cambios de signo a su paso por las raíces, único sitio por donde toca al eje *x*. El polinomio debe ser positivo o negativo en cada uno de los intervalos en los que el eje *x* queda dividido por ellas.

De nuevo se observa que el esquema conceptual de los alumnos, en este campo, se reduce a la mera evaluación del polinomio en un punto de cada intervalo: algunos sustituyen el valor directamente en el polinomio (lo que puede llegar a ser tedioso si hay que tomar valores no enteros) y otros realizan, previamente a la sustitución, la descomposición en factores del polinomio, una técnica que facilita la obtención del signo en cada intervalo.

En mis cursos, hago ver a los alumnos que los cambios de signo de un polinomio están relacionados con la multiplicidad de sus raíces,

1. Si una raíz tiene multiplicidad par, el polinomio no cambia de signo al pasar por ella (la gráfica no atraviesa el eje *x* por ese punto).
2. Si una raíz tiene multiplicidad impar, el polinomio cambia de signo al pasar por ella (la gráfica atraviesa el eje *x* por ese punto).

Es notable la cantidad de cálculos y de errores de tipo operativo que se pueden evitar con el uso de las técnicas adecuadas. Su desconocimiento es también un *error de concepto*.

La utilización de los recursos y técnicas descritos en los puntos 2, 3 y 4, permite representar gráficas fiables de polinomios sólo con cuatro datos: el grado, el signo del coeficiente del término de mayor grado, las raíces y su multiplicidad. Los dos primeros se conocen a simple vista. El tercero y cuarto sólo requieren aplicar la regla de Ruffini a un número limitado de candidatos.

Por ejemplo, el esbozo de la gráfica del polinomio $(x+1)^3(x-1)(x-2)^2$ debería ser automático. En una etapa inicial obtener como resultado, sin necesidad de cálculo alguno, la figura 5 sería la demostración de que los alumnos van asimilando la materia.

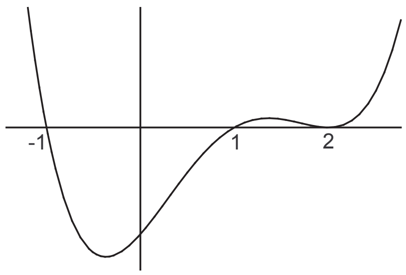

Figura 5

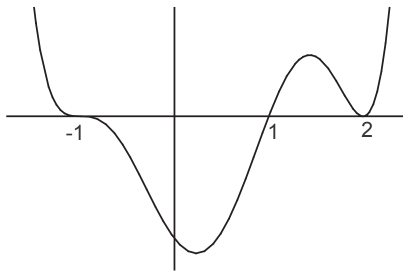

Figura 6

Un salto cualitativo en la ejecución de una gráfica lo constituye la figura 6. En ese dibujo se muestran, además de los cambios de signo, las tres maneras que tiene un polinomio de pasar por sus raíces,

1. El eje *x* puede ser una recta secante al polinomio en ese punto (es el caso de raíces simples como $x=1$).
2. El eje *x* puede ser tangente al polinomio de dos maneras posibles,
   - el polinomio no atraviesa el eje *x* (es el caso de raíces dobles como $x=2$, o de otras de multiplicidad par)
   - el polinomio sí atraviesa el eje *x* (es el caso de raíces triples como $x=-1$, o de otras de multiplicidad impar)

Aunque el concepto de recta tangente lleva a un escenario que no es el objetivo de este artículo, diremos que la multiplicidad de las raíces ofrece la posibilidad, previa al concepto de derivada, de realizar una interesante exploración didáctica acerca del tipo de contacto que se produce entre un polinomio y el eje *x*, y que añade calidad a la gráfica.

El concepto de tangencia y los esquemas conceptuales erróneos que los alumnos tienen de la misma (por ejemplo que una tangente no puede atravesar una curva en el punto de tangencia) se analizan con profundidad en [Martínez, 2009]).

5. Resumen final

Curso tras curso hemos observado que los alumnos cometen una serie de errores relacionados con el producto, la evaluación y la representación gráfica de polinomios previa al concepto de derivada, que pueden ser de tipo operativo o de concepto.

En el caso del producto se han detectado tres errores operativos, y se ofrece un método que erradica uno de ellos y minimiza los otros dos.

En el caso de la evaluación aparecen errores de concepto como el olvido del uso del paréntesis en el cálculo de potencias de números negativos y la no aplicación del teorema del resto ni la regla de Ruffini.

En el caso de las gráficas, los errores de concepto consisten en no saber de antemano el aspecto aproximado de la gráfica de un polinomio, quiénes son los candidatos para ser raíces enteras y no usar su multiplicidad para conocer los cambios de signo.

Todos ellos los intentamos solucionar aplicando las técnicas relatadas en este artículo. Sin embargo hay prácticas extremadamente implantadas o interiorizadas en las mentes de los alumnos, que forman parte de sus esquemas conceptuales, y que son muy difíciles de sustituir por otras más convenientes. Los profesores hemos de insistir en prevenir los errores de tipo operativo pero sin descuidar la introducción adecuada de los conceptos y de algunos resultados relacionados con ellos que, además de redundar en un mejor entendimiento de la materia ahorran cálculos y equivocaciones innecesarias.

Bibliografía

Martínez de la Rosa, F. (2006). ¿Teoremas o fórmulas? *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* 51, 31-39.
Martínez de la Rosa, F. (2009). La recta tangente: notas históricas y actividades para el aula. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* 61, 7-15.
O'Neil, M. C. (2006). Multipying polynomials. *Mathematics Teacher*, 99(7), 508-509.
Suzuki, J. (1999). Multipying and dividing polynomials using Geloxia. *The College Mathematics Journal*, 30(1), 50-53.
Tall, D.; Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics Education*, 12, 151-169.

Félix Martínez de la Rosa. Catedrático de E. U. de Matemática aplicada en la Facultad de CC. EE. y Empresariales de la Universidad de Cádiz. Investigaciones en educación matemática sobre las funciones reales de una y dos variables, sobre la visualización y sobre la detección de errores de aprendizaje.
Email: felix.martinez@uca.