DIE REGS–SUPERPRIEMRADIKAAL EN DIE REGS–STERKPRIEMRADIKAAL

deur

CHRISTELLA DU RAAN

SKRIPSIE

voorgelê ter gedeeltelike vervulling van die
vereistes vir die graad

MAGISTER SCIENTIAE

in

WISKUNDE

in die

FAKULTEIT NATUURWETENSKAPPE

aan die

RANDSE AFRIKAANSE UNIVERSITEIT

STUDIELEIER: PROF. A. BUYS

1994

VOORWOORD

Graag wil ek my opregte dank betuig aan:

Hom wat alles moontlik maak;

My studieleier, prof. A. Buys, vir haar leiding, hulp en die tyd wat sy aan my gewy het in die voltooiing van hierdie skripsie;

Mev. Annetjie Boshoff wat die tikwerk behartig het;

My ouers vir hulle voortdurende belangstelling en aanmoediging tydens my studie;

Die RAU en SNO vir finansiële bystand gedurende 1993.

Christella du Raan

INHOUDSOPGAWE

Bladsy

---oOo---

SUMMARY

In this essay we determine the relationship between the right superprime radical, right strongly prime radical and other well-known radicals and then characterize the right superprime radical and right strongly prime radical.

In chapter one we give a summary of radical theoretical results needed for the rest of the study.

In chapter two we define and characterize the right superprime ring. The right superprime ideal is defined and then characterized in terms of sup-systems and supersystems.

In chapter three we define and characterize right strongly prime rings and right strongly prime ideals. One of the characterizations of the right strongly prime ideal is given in terms of *sp*-systems. It is also shown how a right strongly prime ideal can be found in a ring R.

In chapter four we show the relationship between right superprime rings and right strongly prime rings.

The right superprime radical is the upper radical determined by the class of all right superprime rings and the right strongly prime radical is the upper radical determined by the class of all right strongly prime rings.

In chapter five it is shown that the right superprime radical (σ) and the right strongly prime radical (s) are special radicals. We then determine the relationship between these two radicals and other well-known radicals. It is shown that s is incomparable with all radicals Rad such that $N \cap B_\phi \subsetneq Rad \subsetneq U$. s is properly contained in σ and properly contains L. σ is properly contained in N_g and G and properly contains N.

In chapter six we characterize the right superprime radical by using sup-systems and supersystems. We then characterize the right strongly prime radical by using *sp*-systems and give some properties of both radicals.

---oOo---

HOOFSTUK 1

INLEIDING

Die gebruik van die radikaal is 'n belangrike tegniek wat toegepas word om die struktuur van ringe en algebras en ander algebraïese strukture te bestudeer.

Cartan het eerste 'n deurbraak gemaak in die bestudering van struktuur met behulp van radikale deur 'n groot klas van eindig-dimensionale nie-assosiatiewe algebras te karakteriseer.

Wedderburn het vroeg in die 20ste eeu radikale gebruik in die teorie van assosiatiewe algebras van eindige rang en assosiatiewe ringe met minimaliteitsvoorwaardes vir eensydige ideale.

In 1945 is 'n groot deurbraak gemaak met die definiëring van die Jacobson-radikaal van 'n algemene ring en in die vroeë 1950's het Kurosh en Amitsur begin om 'n algemene teorie vir radikale te ontwikkel.

In 1965 het DIVINSKY [2] 'n uitstekende oorsig van die resultate verkry tot dan, gepubliseer.

Ons gee nou 'n kort opsomming van radikaal-teoretiese resultate uit hoofsaaklik [2] wat ons gaan gebruik. Alle ringe is assosiatief en besit nie noodwendig 'n identiteitselement nie. Ons gebruik R, tensy anders aangedui, om 'n willekeurige ring aan te dui.

Laat $\mathcal{L}$ 'n eienskap wees wat 'n ring besit. 'n Ring R heet 'n $\mathcal{L}$-ring as dit die eienskap $\mathcal{L}$ besit. 'n Ideaal J van R heet 'n $\mathcal{L}$-ideaal as J 'n $\mathcal{L}$-ring is. 'n Ring wat geen nie-nul $\mathcal{L}$-ideale bevat nie, heet $\mathcal{L}$-halfenkelvoudig.

$\mathcal{L}$ heet 'n radikaaleienskap as dit aan die volgende voorwaardes voldoen:

(A) 'n Homomorfe beeld van 'n $\mathcal{L}$-ring is 'n $\mathcal{L}$-ring.

(B) Elke ring bevat 'n $\mathcal{L}$-ideaal S wat elke ander $\mathcal{L}$-ideaal van die ring bevat.

(C) Die faktorring R/S is $\mathcal{L}$-halfenkelvoudig.

Die maksimale $\mathcal{L}$-ideaal S van 'n ring R, heet die $\mathcal{L}$-radikaal van R.

Uit (B) is dit duidelik dat 0 'n $\mathcal{L}$-ring is en dus is 'n ring R $\mathcal{L}$-halfenkelvoudig as die $\mathcal{L}$-radikaal van R gelyk aan nul is. 'n $\mathcal{L}$-ring is sy eie $\mathcal{L}$-radikaal en heet 'n $\mathcal{L}$-radikaalring.

Laat M 'n klas van ringe wees wat aan die volgende voorwaardes voldoen:

(D) Elke nie-nul ideaal van 'n ring van M kan homomorf afgebeeld word op 'n nie-nul ring van M.

(E) As elke nie-nul ideaal van 'n ring R homomorf afgebeeld kan word op 'n nie-nul ring van M, dan is $R \in M$.

Ons definieer 'n eienskap $\mathcal{L}_m$ soos volg:

R is 'n $\mathcal{L}_m$-ring as dit nie homomorf afgebeeld kan word op 'n nie-nul ring van M nie.

$\mathcal{L}_m$ heet die boradikaaleienskap bepaal deur M. Elke ring in M is $\mathcal{L}_m$-halfenkelvoudig.

As $\mathcal{L}$ en Γ twee radikaaleienskappe is, dan is $\mathcal{L} \subseteq \Gamma$ as elke $\mathcal{L}$-radikaalring 'n Γ-radikaalring is. Ekwivalent hieraan is $\mathcal{L} \subseteq \Gamma$ as elke Γ-halfenkelvoudige ring 'n $\mathcal{L}$-halfenkelvoudige ring is.

Definisie 1

'n Nie-leë klas M van ringe heet 'n spesiale klas van ringe as dit aan die volgende voorwaardes voldoen:

(a) Elke ring in die klas M is 'n priemring.

(b) Elke nie-nul ideaal van 'n ring in M, is self 'n ring in M.

(c) As A 'n ring in M is en A is 'n ideaal van 'n ring R, dan is $R/A^* \in M$, waar $A^* = \{x \in R \mid xA = Ax = 0\}$, dit is, A^* is die annuleerder van A.

Opmerking 1

Laat $A \lhd R$. R heet 'n essensiële uitbreiding van A as $B \cap A \neq \phi$ vir elke nie-nul ideaal B in R. Vir 'n klas $\mathcal{M}$ van priemringe, het Heyman en Roos [6] onder andere aangetoon dat $\mathcal{M}$ voorwaarde (c) bevredig as en slegs as $\mathcal{M}$ geslote is onder essensiële uitbreidings, dit is, as elke essensiële uitbreiding van 'n ring van $\mathcal{M}$ self tot $\mathcal{M}$ behoort.

Definisie 2

'n Boradikaal bepaal deur 'n spesiale klas van ringe, heet 'n spesiale radikaal.

Stelling 1 [2]

Laat S_m die boradikaal bepaal deur 'n spesiale klas $\mathcal{M}$ wees. Die spesiale radikaal S_m van 'n ring R, is gelyk aan die deursnede van alle ideale T_α van R sodanig dat R/T_α 'n ring in die spesiale klas $\mathcal{M}$ is. Dus is elke S_m-halfenkelvoudige ring isomorf aan 'n subdirekte som van ringe van $\mathcal{M}$.

Opmerking 2

Ons sê dat 'n spesiale klas $\mathcal{M}$ van ringe voorwaarde I bevredig as dit aan die volgende voorwaarde voldoen:

As R 'n ring met 'n identiteitselement is, dan is $R_n \in \mathcal{M}$ as en slegs as $R \in \mathcal{M}$.

Stelling 2 [1]

Vir 'n spesiale radikaal *rad* gedefinieer deur 'n spesiale klas van ringe $\mathcal{M}$ wat voorwaarde I bevredig, geld die gelykheid $rad(R_n) = [rad(R)]_n$, waar R 'n ring met 'n identiteitselement is.

---o0o---

HOOFSTUK 2

DIE REGS-SUPERPRIEMRING EN REGS-SUPERPRIEMIDEAAL

2.1 Inleiding

Die begrip "superpriemring" is deur Van der Walt in [13] ingevoer. Veldsman definieer in [15] 'n regs-superpriemring en regs-superpriemideaal. In hierdie hoofstuk karakteriseer ons regs-superpriemringe. Ons definieer verder 'n sup-stelsel en superstelsel en karakteriseer regs-superpriemideale in terme daarvan.

Definisie 3 [15]

R is 'n regs-superpriemring (links-superpriemring) as elke nie-nul ideaal in R 'n nie-nul element c bevat sodanig dat die regter-annuleerder (linker-annuleerder) van c gelyk aan nul is.

Definisie 4 [15]

'n Ideaal I in R is 'n regs-superpriemideaal as R/I 'n regs-superpriemring is.

2.2 Karakterisering van regs-superpriemringe en regs-superpriemideale

Stelling 3 [15]

Laat $R \neq 0$. 'n Element $0 \neq c \in R$ is links-kanselleerbaar as en slegs as $ann_R\{c\} = 0$.

Bewys

Laat $0 \neq c \in R$. Gestel c is links-kanselleerbaar en $cr = 0$ waar $r \in R$. Dan is $cr = c0$ en omdat c links-kanselleerbaar is, volg dat $r = 0$ sodat $ann_R\{c\} = 0$.

Laat, omgekeerd, $ann_R\{c\} = 0$ en $cr = ct$ waar $r,t \in R$. Dan is $c(r-t) = 0$ en omdat $ann_R\{c\} = 0$, volg dat $r - t = 0$. Dus is $r = t$ sodat c links-kanselleerbaar is.

Stelling 4 [15]

R is 'n regs-superpriemring as en slegs as elke nie-nul hoofideaal in R 'n nie-nul links-kanselleerbare element bevat.

Bewys

Vir $R = 0$ geld die stelling.

Laat $R \neq 0$ 'n regs-superpriemring wees en $0 \neq (a) \triangleleft R$. Dan bevat (a) 'n element, sê $c \neq 0$, sodanig dat $ann_R\{c\} = 0$. Volgens stelling 3 is c links-kanselleerbaar.

Laat $R \neq 0$ en gestel, omgekeerd, dat elke nie-nul hoofideaal in R 'n nie-nul links-kanselleerbare element bevat.

Laat $0 \neq I \triangleleft R$ en $0 \neq b \in I$. Dan bevat $0 \neq (b) \subseteq I$ 'n nie-nul links-kanselleerbare element, sê c en uit stelling 3 volg dat $ann_R\{c\} = 0$ sodat R 'n regs-superpriemring is.

Stelling 5

Elke regs-superpriemring R is 'n priemring.

Bewys

Die ring $R = 0$ is 'n priemring. Gestel $R \neq 0$ is 'n regs-superpriemring en laat $0 \neq A \triangleleft R$ en $0 \neq B \triangleleft R$. Dan bevat A 'n element, sê $c \neq 0$ sodanig dat as $cr = 0$, $r \in R$, dan is $r = 0$. Dus is $cB \neq 0$ en gevolglik is $AB \neq 0$ sodat R 'n priemring is.

Stelling 6

Elke Noetherse priemring R is regs-superpriem.

Bewys

Laat $R \neq 0$ 'n Noetherse priemring wees en $0 \neq a \in R$.

Vir elke linkerideaal $K \neq 0$ in R geld dat $(a) \cap K \neq 0$: laat $K \neq 0$ 'n linkerideaal in R wees. Ons bewys eerstens dat die produk $(a)K \subseteq (a) \cap K$: laat $x \in (a)K$ en sê $x = \sum_{i=1}^{v} a_i k_i$ ($a_i \in (a)$ en $k_i \in K$ vir $i = 1,2, \ldots, v$). Dan is $x \in (a)$ en $x \in K$, met ander woorde $x \in (a) \cap K$. Omdat R 'n priemring is, volg dat $(a)K \neq 0$ sodat $(a) \cap K \neq 0$.

Volgens [2], lemma 48, bevat (a) 'n element, sê $c \neq 0$ sodanig dat c nie 'n regter-nuldeler is nie. c is nie 'n linker-nuldeler nie ([2], stelling 25). Dus, as $cz = 0$, $z \in R$, dan is $z = 0$. Volgens stelling 3 is c links-kanselleerbaar sodat R 'n regs-superpriemring is.

Stelling 7 [15]

'n Ideaal I in R is 'n regs-superpriemideaal as en slegs as daar vir elke $a \in C_R(I)$ 'n $c \in (a)$ bestaan sodanig dat as $cz \in I$, $z \in R$, dan is $z \in I$.

Bewys

Vir $I = R$ geld die stelling.

Laat $I \neq R$ 'n regs-superpriemideaal in R wees en $a \in C_R(I)$. R/I is dan 'n regs-superpriemring en dus bevat die hoofideaal $((a) + I)/I \neq 0$ 'n element, sê $d + I \neq I$ sodanig dat $ann_{R/I}\{d+I\} = 0$.

Laat $d + I = (a+I)(t+I) + (r+I)(a+I) + n(a+I) + \sum_{i=1}^{v} (r_i+I)(a+I)(t_i+I)$

$(t_i+I,\ t+I,\ r_i+I$ en $r + I \in R/I$ vir $i = 1,2,\ldots,v$ en $n \in Z)$.

Dan is $d + I = at + ra + na + \sum_{i=1}^{v} r_i a t_i + I$

$= c + I$, sê, waar $c \in (a)$.

Dus is $d - c \in I$ sodat $d - c = b$, sê, waar $b \in I$.

Vir $c = d - b$, $c \in (a)$ geld dat as $cz \in I$, $z \in R$, dan is $z \in I$: laat $z \in R$ sodanig dat $cz \in I$, met ander woorde $(d-b)z \in I$. Dan is $dz - bz \in I$ en nou volg dat $dz + I = bz + I = I$, want $bz \in I$. Dus is $(d+I)(z+I) = I$. $z + I = I$, omdat $ann_{R/I}\{d+I\} = 0$ en gevolglik is $z \in I$.
Omgekeerd, laat $I \triangleleft R$, $I \neq R$ en gestel dat daar vir elke $a \in C_R(I)$ 'n $c \in (a)$ bestaan sodanig dat as $cz \in I$, $z \in R$, dan is $z \in I$.
R/I is 'n regs-superpriemring: laat $((a) + I)/I \triangleleft R/I$, $(a) + I \neq I$. Dan is $a \in C_R(I)$ en dus bestaan daar 'n element, sê $c \in (a)$ sodanig dat as $cz \in I$, $z \in R$, dan is $z \in I$. $c + I \neq I$: gestel $c + I = I$, dit is $c \in I$ en laat $z' \in C_R(I)$. Dan is $cz' \in I$ waar $z' \in C_R(I)$, 'n teenstrydigheid.
$ann_{R/I}\{c+I\} = 0$: laat $(c+I)(z+I) = I$ vir 'n $z + I \in R/I$. Dan is $cz + I = I$ en dus is $cz \in I$. Gevolglik is $z \in I$ sodat $z + I = I$.
$I \neq c + I \in ((a) + I)/I$ is links-kanselleerbaar volgens stelling 3 en dus is R/I 'n regs-superpriemring volgens stelling 4 sodat I 'n regs-superpriemideaal in R is.

Definisie 5 [15]

'n Deelversameling G van R is 'n sup-stelsel as daar vir elke $a \in G$, 'n $e \in (a)$ bestaan sodanig dat $eG \subseteq G$.

Stelling 8 [15]

'n Ideaal I in R is 'n regs-superpriemideaal as en slegs as $C_R(I)$ 'n sup-stelsel is.

Bewys

Vir $I = R$ geld die stelling.
Laat $I \neq R$ 'n regs-superpriemideaal in R wees en $a \in C_R(I)$. Volgens stelling 7 bestaan daar 'n element, sê $c \in (a)$ sodanig dat $cz \in C_R(I)$ vir elke $z \in C_R(I)$. Dus is $c(C_R(I)) \subseteq C_R(I)$ sodat $C_R(I)$ 'n sup-stelsel is.

Gestel, omgekeerd, dat $C_R(I)$ 'n sup-stelsel is waar $I \triangleleft R$, $I \neq R$ en laat $a \in C_R(I)$. Volgens die definisie van 'n sup-stelsel bestaan daar 'n element, sê $e \in (a)$ sodanig dat $e(C_R(I)) \subsetneq C_R(I)$. Met ander woorde, as $z \in C_R(I)$, dan is $ez \in C_R(I)$ sodat I volgens stelling 7 'n regs-superpriemideaal in R is.

Definisie 6 [15]

'n Superstelsel in R is 'n paar (G,I) waar G 'n deelversameling van R is en $I \triangleleft R$ wat aan die volgende voorwaardes voldoen:

(i) $G \cap C_I\{0\} = \phi$.

(ii) vir elke $a \in G$ bestaan daar 'n $c \in (a)$ sodanig dat $cz \in G$ vir elke $z \in C_R(I)$.

Stelling 9 [15]

'n Ideaal I in R is 'n regs-superpriemideaal as en slegs as $(C_R(I),I)$ 'n superstelsel is.

Bewys

Vir $I = R$ geld die stelling.

Laat $I \neq R$ 'n regs-superpriemideaal in R wees en $a \in C_R(I)$. Omdat I 'n regs-superpriemideaal in R is, bestaan daar 'n element, sê $c \in (a)$ sodanig dat as $cz \in I$, $z \in R$, dan is $z \in I$. Dus geld vir elke $z \in C_R(I)$ dat $cz \in C_R(I)$. $C_R(I) \cap I = \phi$ en gevolglik is $(C_R(I),I)$ 'n superstelsel.

Laat, omgekeerd, $(C_R(I),I)$ 'n superstelsel wees. Dan bestaan daar vir elke $a \in C_R(I)$, 'n $c \in (a)$ sodanig dat $cz \in C_R(I)$ vir elke $z \in C_R(I)$. Volgens stelling 7 is I 'n regs-superpriemideaal in R.

---oOo---

HOOFSTUK 3

DIE REGS-STERKPRIEMRING EN REGS-STERKPRIEMIDEAAL

3.1 Inleiding

Die begrip "regs-sterkpriemring" is deur Handelman en Lawrence in [5] ingevoer. In hierdie hoofstuk karakteriseer ons regs-sterkpriemringe. Ons definieer verder 'n sp^*-stelsel en sp-stelsel en gebruik dit onder andere om regs-sterkpriemideale te karakteriseer. Ons gee ook voorwaardes waaraan 'n ideaal moet voldoen om 'n regs-sterkpriemideaal in 'n ring R te wees.

Definisie 7 [5]

R is 'n regs-sterkpriemring (links-sterkpriemring) as daar vir elke $0 \neq a \in R$ 'n eindige deelversameling $F \subseteq R$ bestaan, sodanig dat as $aFz = 0$ $(zFa = 0)$, $z \in R$, dan is $z = 0$.
F heet 'n isolator vir a.

Definisie 8 [5]

R heet regs-sterkpriem van orde n as daar vir elke $0 \neq a \in R$ 'n isolator met n of minder elemente bestaan.

Definisie 9 [14]

'n Ideaal I in R is 'n regs-sterkpriemideaal as R/I 'n regs-sterkpriemring is.

3.2 Karakterisering van regs-sterkpriemringe

Stelling 10 [9]

R is 'n regs-sterkpriemring (links-sterkpriemring) as en slegs as elke nie-nul ideaal I in R 'n eindige deelversameling F bevat sodanig dat die regter-annuleerder (linker-annuleerder) van F in R gelyk aan nul is. Ons sê die ideaal I bevat 'n isolator F vir R.

Bewys

Vir $R = 0$ geld die stelling.

Gestel $R \neq 0$ is 'n regs-sterkpriemring. Laat $0 \neq I \triangleleft R$ en $0 \neq a \in I$. Omdat R regs-sterkpriem is, bestaan daar 'n eindige deelversameling, sê $F \subseteq R$, sodanig dat as $aFz = 0$, $z \in R$, dan is $z = 0$.

Stel $F' = aF$. Dan is $F' \subseteq I$ en $ann_R(F') = 0$.

Laat $R \neq 0$ en gestel, omgekeerd, dat elke nie-nul ideaal I in R 'n eindige deelversameling F bevat sodanig dat $ann_R(F) = 0$. Laat $0 \neq a \in R$ en gestel $F \subseteq (a)$ is 'n eindige deelversameling sodanig dat $ann_R(F) = 0$. Daar bestaan 'n $y \in R$ sodanig dat $ay \neq 0$: gestel die teendeel, naamlik dat $ay = 0$ vir elke $y \in R$. Laat $0 \neq z \in R$ en $f \in F$, sê

$$f = na + sa + at + \sum_{i=1}^{v} s_i a t_i \quad (n \in Z \text{ en } s, t, s_i, t_i \in R \text{ vir } i = 1,2,\ldots,v).$$

$$\begin{aligned} \text{Dan is } fz &= naz + saz + atz + \sum_{i=1}^{v} s_i a t_i z \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dus is $Fz = 0$ waar $0 \neq z \in R$, strydig met die keuse van F.

Laat nou $y \in R$ sodanig dat $ay \neq 0$. Daar bestaan dan 'n eindige deelversameling, sê $G \subseteq (ay)$, sodanig dat as $Gz = 0$, $z \in R$, dan is $z = 0$. G kan gekies word só dat dit van die vorm $\{ay, ayr_1, \ldots, ayr_k\}$ is waar $r_1, \ldots, r_k \in R$:

$$\text{laat } t \in G \text{ en sê } t = s_t ay + ay\bar{r}_t + n_t ay + \sum_{i=1}^{w} s_{ti} ay\bar{r}_{ti}$$

$$(s_t, \bar{r}_t, s_{ti}, \bar{r}_{ti} \in R \text{ vir } i = 1,2,\ldots,w \text{ en } n_t \in Z).$$

Kies $G' = \bigcup_{i,t} \{ay,\ ay\bar{r}_t,\ ay\bar{r}_{ti}\}$.

Ons bewys nou dat as $G'z = 0$, $z \in R$, dan is $z = 0$: laat $z \in R$ sodanig dat $G'z = 0$. Dan is $tz = (s_t ay + ay\bar{r}_t + n_t ay + \sum_{i=1}^{w} s_{ti} ay\bar{r}_{ti})z$

$$= s_t ayz + ay\bar{r}_t z + n_t ayz + \sum_{i=1}^{w} s_{ti} ay\bar{r}_{ti} z$$

$$= 0.$$

Dus is $Gz = 0$ sodat $z = 0$.

Stel nou $G = \{ay,\ ayr_1,\ \ldots,\ ayr_k \mid r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k \in R\}$. Dan is die versameling $\{y, yr_1,\ \ldots,\ yr_k\}$ 'n isolator vir $a \in R$ sodat R 'n regs-sterkpriemring is.

Ons kan soortgelyk bewys dat R 'n links-sterkpriemring is as en slegs as elke nie-nul ideaal I in R 'n eindige deelversameling F bevat sodanig dat die linker-annuleerder van F in R gelyk aan nul is.

Opmerking 3

Gestel R is 'n regs-sterkpriemring (links-sterkpriemring). Laat $0 \neq I \triangleleft R$ en gestel $F \subseteq I$ is 'n isolator vir R. Dan is $F \neq 0$: laat $F = 0$. Dan is $Fz = 0$ ($zF = 0$) vir $0 \neq z \in R$, 'n teenstrydigheid, want die regter-annuleerder (linker-annuleerder) van F in R is gelyk aan nul.

Stelling 11 [15]

R is 'n regs-sterkpriemring as en slegs as daar vir elke $0 \neq a \in R$ 'n eindige deelversameling $F \subseteq (a)$ bestaan sodanig dat as $Fz = 0$, $z \in R$, dan is $z = 0$.

Bewys

Vir $R = 0$ geld die stelling. Laat $R \neq 0$ 'n regs-sterkpriemring wees en $0 \neq a \in R$. Volgens stelling 10 bevat $(a) \neq 0$ 'n eindige deelversameling, sê F, sodanig dat $ann_R(F) = 0$, met ander woorde, as $Fz = 0$, $z \in R$, dan is $z = 0$.

Laat $R \neq 0$ en gestel, omgekeerd, dat daar vir elke $0 \neq a \in R$ 'n eindige deelversameling $F \subseteq (a)$ bestaan sodanig dat as $Fz = 0$, $z \in R$, dan is $z = 0$. Laat $0 \neq I \triangleleft R$ en $0 \neq a \in I$. Dan bevat (a) $\neq 0$, $(a) \subseteq I$ 'n eindige deelversameling, sê F, sodanig dat as $Fz = 0$, $z \in R$, dan is $z = 0$. Volgens stelling 10 is R 'n regs-sterkpriemring.

Opmerking 4

'n Soortgelyke karakterisering soos gegee in stelling 11 geld nie vir ringe wat regs-sterkpriem van orde n is nie. Met ander woorde, al bestaan daar vir elke $0 \neq a \in R$ 'n deelversameling $F \subseteq (a)$ met n of minder elemente sodanig dat $Fz = 0$, $z \in R$, impliseer dat $z = 0$, dan is R nie noodwendig regs-sterkpriem van orde n nie. Ons illustreer dit met die volgende voorbeeld.

Voorbeeld [15]

Laat T die ring van 2×2 matrikse oor die liggaam $Z_2 = \{0;1\}$ wees. Elke nie-nul hoofideaal in T bevat die versameling met een element,
$F = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$: laat $0 \neq (a) \triangleleft T$.
Volgens [7], gevolgtrekking 2.27 is T enkelvoudig sodat $(a) = T$ en dus volg dat $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in (a)$. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ is die identiteitselement van T.
Dus, as $Fz = 0$, $z \in T$, dan is $z = 0$.
T is egter nie regs-sterkpriem van orde een nie: kies die element
$0 \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in T$ en laat F 'n versameling met een element in T wees, sê

$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\}$, $a,b,c,d \in Z_2$. As $c \neq 0$ of $d \neq 0$, stel

$z = \begin{bmatrix} d & 0 \\ -c & 0 \end{bmatrix}$. Dan is $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Fz = 0$.

Indien $c = 0$ en $d = 0$, dan geld vir elke $0 \neq z \in T$ dat $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Fz = 0$. Vir die element $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in T$ en elke versameling $F \subseteq T$ met een element, kan daar dus 'n $0 \neq z \in T$ gevind word sodanig dat $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Fz = 0$. T is dus nie regs-sterkpriem van orde een nie.

Opmerking 5

Handelman en Lawrence gee in [5] die volgende alternatiewe definisie vir 'n regs-sterkpriemring met 'n identiteitselement: R is regs-sterkpriem as elke nie-nul ideaal in R 'n eindig-voortgebringde linkerideaal waarvan die regter-annuleerder nul is, bevat.

Ons bewys nou die volgende stelling:

Stelling 12

R is 'n regs-sterkpriemring as en slegs as elke nie-nul ideaal I in R 'n eindig-voortgebringde linkerideaal waarvan die regter-annuleerder nul is, bevat.

Bewys

Laat $R \neq 0$ 'n regs-sterkpriemring wees en $0 \neq I \triangleleft R$. Volgens stelling 10 bevat I 'n eindige deelversameling, sê F sodanig dat $ann_R(F) = 0$.

Laat I' die linkerideaal wees wat voortgebring word deur F. Dan is $ann_R(I') = 0$: gestel $ann_R(I') \neq 0$ en laat $0 \neq z \in ann_R(I')$. Dan is $I'z = 0$ sodat $Fz = 0$, strydig met $ann_R(F) = 0$.

Gestel, omgekeerd, dat elke nie-nul ideaal in $R \neq 0$ 'n eindig-voortgebringde linkerideaal I' met $ann_R(I') = 0$, bevat. Laat $0 \neq I \triangleleft R$ en gestel I' is 'n eindig-voortgebringde linkerideaal in I met 'n versameling voortbringers $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ só dat $ann_R(I') = 0$. Dan is $ann_R(F) = 0$: gestel die teendeel, naamlik dat $ann_R(F) \neq 0$ en laat $0 \neq z \in ann_R(F)$.

Dan is $I'z = 0$:

laat $a \in I'$ en sê $a = \sum_{i=1}^{m} (r_i f_i + n_i f_i)$

$(r_i \in R,\ f_i \in F,\ n_i \in Z$ vir $i = 1,2,\ \ldots,\ m)$.

$$az = \left[\ \sum_{i=1}^{m} (r_i f_i + n_i f_i)\ \right] z$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (r_i f_i z + n_i f_i z)$$
$$= 0.$$

Dus volg dat $I'z = 0$. Dit is egter strydig met $ann_R(I') = 0$ en gevolglik is $ann_R(F) = 0$. Volgens stelling 10 is R 'n regs-sterkpriemring.

Stelling 13 [4]

R is 'n regs-sterkpriemring as en slegs as R_n 'n regs-sterkpriemring is.

Bewys

Gestel $R \neq 0$ is 'n regs-sterkpriemring.

Laat $B = (b_{ij}) \in R_n$ met $b_{pq} = b \neq 0$ en gestel $F = \{t_1, t_2,\ \ldots,\ t_y\}$ is 'n isolator vir $0 \neq b \in R$.

Laat (vir $u = 1,2,\ \ldots,\ y$) $e_{qr} t_u = (g^u_{ij})$ die matriks wees met $g^u_{qr} = t_u \in F$ en elke ander posisie gelyk aan nul.

Vir $u = 1,2,\ \ldots,\ y$ volg dat

$$B(e_{qr} t_u) = (b_{ij})(g^u_{ij})$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} g^u_{kj} \right)$$
$$= (c^u_{ij}),\ \text{sê}.$$

(c^u_{ij}) is die matriks waar elke kolom verskillend van kolom r slegs nul-waardes het en die r-de kolom die volgende waardes het: $c^u_{1r} = b_{1q} t_u$; $c^u_{2r} = b_{2q} t_u$; .... Dus is $c^u_{pr} = b_{pq} t_u = b t_u$.

Laat $A = (a_{ij})$ met $a_{rs} = a \neq 0$.

$$(c^u_{ij})(a_{ij}) = (\sum_{e=1}^{n} c^u_{ie} a_{ej})$$
$$= (d^u_{ij}), \text{ sê waar}$$

$$\begin{array}{llll}
d^u_{11} = b_{1q} t_u a_{r1} & d^u_{12} = b_{1q} t_u a_{r2} & \cdots & d^u_{1n} = b_{1q} t_u a_{rn} \\
d^u_{21} = b_{2q} t_u a_{r1} & d^u_{22} = b_{2q} t_u a_{r2} & \cdots & d^u_{2n} = b_{2q} t_u a_{rn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
d^u_{n1} = b_{nq} t_u a_{r1} & d^u_{n2} = b_{nq} t_u a_{r2} & \cdots & d^u_{nn} = b_{nq} t_u a_{rn}
\end{array}$$

Dus is $d^u_{ij} = b_{iq} t_u q_{rj}$ sodat $d^u_{ps} = b_{pq} t_u a_{rs} = b t_u a$.

Die versameling $\{t_1, t_2, \ldots, t_y\}$ is 'n isolator vir $b \in \mathcal{R}$ en dus is $\{B(e_{qr} t_u)A \mid u = 1,2, \ldots, y\} \neq 0$. Die versameling $\{e_{qr} t_u \mid u = 1,2, \ldots, y\}$ is dus 'n isolator vir B en gevolglik is $\mathcal{R}_n$ 'n regs-sterkpriemring.

Gestel, omgekeerd, dat $\mathcal{R}_n \neq 0$ 'n regs-sterkpriemring is en laat $0 \neq a \in \mathcal{R}$. Dan bestaan daar 'n isolator, sê $F = \{B_1, B_2, \ldots, B_r\} \subsetneq \mathcal{R}_n$ vir die matriks $e_{11}a \in \mathcal{R}_n$.

Laat (vir $k = 1,2, \ldots, r$) $B_k = (b^k_{ij})$ en sê dat $b^k_{11} = b_k$.

Vir $k = 1,2, \ldots, r$ is $(e_{11}a)(b^k_{ij}) = (c^k_{ij})$, sê, waar (c^k_{ij}) die matriks is met nulwaardes in elke ry verskillend van ry een, terwyl ry een die volgende waardes het:

$c^k_{11} = ab^k_{11} = ab_k \qquad c^k_{12} = ab^k_{12} \;\ldots\ldots\; c^k_{1n} = ab^k_{1n}$.

Omdat F 'n isolator vir $e_{11}a$ is, volg vir elke $0 \neq z \in \mathcal{R}$ dat

$$\{(e_{11}a)(b^k_{ij})(e_{11}z) \mid k = 1,2, \ldots, r\}$$
$$= \{ e_{11}ab_k z \mid k = 1,2, \ldots, r\}.$$
$$\neq 0$$

Dus is $\{ab_k z \mid k = 1,2, \ldots, r\} \neq 0$, sodat die versameling $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\} \subsetneq \mathcal{R}$ 'n isolator vir a is. Gevolglik is $\mathcal{R}$ 'n regs-sterkpriemring.

Stelling 14

Elke regs-sterkpriemring R is 'n priemring.

Bewys

Die ring $R = 0$ is 'n priemring. Gestel $R \neq 0$ is 'n regs-sterkpriemring. Laat $0 \neq I \triangleleft R$ en $J \triangleleft R$ sodanig dat $IJ = 0$.

Volgens stelling 10 bevat I 'n eindige deelversameling, sê F, sodanig dat $ann_R(F) = 0$.

$FJ = 0$, omdat $IJ = 0$ en gevolglik is $J = 0$ sodat R 'n priemring is.

3.3 Karakterisering van regs-sterkpriemideale

Opmerking 6

Groenewald en Heyman definieer in [4] 'n regs-sterkpriemideaal as volg: 'n Ideaal I in R heet 'n regs-sterkpriemideaal in R as daar vir elke $x \in C_R(I)$ 'n eindige deelversameling F van R bestaan sodanig dat as $r \in R$ en $xFr \subseteq I$, dan is $r \in I$.

Ons bewys nou die volgende stelling:

Stelling 15 [4]

'n Ideaal I in R is 'n regs-sterkpriemideaal in R as en slegs as daar vir elke $x \in C_R(I)$ 'n eindige deelversameling $F \subseteq R$ bestaan sodanig dat as $xFr \subseteq I$, $r \in R$, dan is $r \in I$.

Bewys

Vir $I = R$ geld die stelling.

Laat $I \neq R$ 'n regs-sterkpriemideaal in R wees en $x \in C_R(I)$. R/I is 'n regs-sterkpriemring en dus bestaan daar vir $x+I \in R/I$ 'n eindige deelversameling, sê $F = \{f_1+I, f_2+I, \ldots, f_n+I\} \subseteq R/I$, sodanig dat as $(x+I)F(r+I) = \{I\}$, $r+I \in R/I$, dan is $r+I = I$.

Stel $F' = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ en laat $r \in R$ sodanig dat $xF'r \subseteq I$, dit is, $xf_i r \in I$ vir $i = 1,2, \ldots, n$. Dan is $(x+I)F(r+I) = \{I\}$ en gevolglik is $r + I = I$ sodat $r \in I$.

Laat, omgekeerd, $I \triangleleft R$, $I \neq R$ en gestel daar bestaan vir elke $x \in C_R(I)$ 'n eindige deelversameling $F \subseteq R$ sodanig dat as $xFr \subseteq I$, $r \in R$, dan is $r \in I$.

R/I is 'n regs-sterkpriemring:

Laat $I \neq a+I \in R/I$. Dan is $a \in C_R(I)$ en dus bestaan daar 'n eindige deelversameling, sê $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subseteq R$ sodanig dat as $aFr \subseteq I$, $r \in R$, dan is $r \in I$.

Stel $F' = \{f_1+I, f_2+I, \ldots, f_n+I\}$ en laat $r + I \in R/I$ sodanig dat $(a+I)F'(r+I) = \{I\}$, dit is, $(a+I)(f_i+I)(r+I) = I$ vir $i = 1,2, \ldots, n$. Dan is $af_i r \in I$ vir $i = 1,2, \ldots, n$, met ander woorde, $aFr \subseteq I$. Nou volg dat $r \in I$ sodat $r+I = I$. R/I is dus 'n regs-sterkpriemring sodat I 'n regs-sterkpriemideaal in R is.

Stelling 16 [14]

'n Ideaal I in R is 'n regs-sterkpriemideaal as en slegs as daar vir elke $x \in C_R(I)$ 'n eindige deelversameling $F \subseteq (x)$ bestaan sodanig dat as $Fz \subseteq I$, $z \in R$, dan is $z \in I$.

Bewys

Vir $I = R$ geld die stelling.

Laat $I \neq R$ 'n regs-sterkpriemideaal in R wees en $x \in C_R(I)$. R/I is 'n regs-sterkpriemring en volgens stelling 10 bevat $((x)+I)/I \neq 0$ 'n eindige deelversameling, sê F, sodanig dat $ann_{R/I}(F) = 0$.

Laat $F = \{f_1+I, f_2+I, \ldots, f_n+I \mid f_i \in (x) \text{ vir } i = 1,2, \ldots, n\}$.

Stel $F' = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. $F' \subseteq (x)$ en vir F' geld dat as $F'z \subseteq I$, $z \in R$, dan is $z \in I$: laat $z \in R$ sodanig dat $F'z \subseteq I$. Dan is $f_i z \in I$ vir

$i = 1,2, \ldots, n$. Dus is $(f_i+I)(z+I) = I$ vir $i = 1,2,\ldots, n$. Met ander woorde, $F(z+I) = I$. $z + I = I$, omdat $ann_{R/I}(F) = 0$ en gevolglik is $z \in I$.

Omgekeerd, laat $I \lhd R$, $I \neq R$ en gestel dat daar vir elke $x \in C_R(I)$ 'n eindige deelversameling $F \subsetneq (x)$ bestaan sodanig dat as $Fz \subsetneq I$, $z \in R$, dan is $z \in I$.

Laat $\{I\} \neq K/I \lhd R/I$ en $I \neq b+I \in K/I$. Vir $b \in C_R(I)$ bestaan daar 'n eindige deelversameling, sê $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subsetneq (b)$ sodanig dat as $Gz \subsetneq I$, $z \in R$, dan is $z \in I$.

Stel $T = \{g_1+I, g_2+I, \ldots, g_n+I\}$. $T \subsetneq K/I$ en $ann_{R/I}(T) = 0$: laat $z + I \in R/I$ sodanig dat $T(z+I) = \{I\}$, dit is $(g_i+I)(z+I) = I$ vir $i = 1,2, \ldots, n$. Dan is $g_i z \in I$ vir $i = 1,2, \ldots, n$, met ander woorde, $Gz \subsetneq I$. Gevolglik is $z \in I$ sodat $z+I = I$. R/I is volgens stelling 10 'n regs-sterkpriemring sodat I 'n regs-sterkpriemideaal in R is.

Definisie 10 [14]

'n Deelversameling G van R heet 'n sp^*-stelsel as daar vir elke $g \in G$ 'n eindige deelversameling $F \subsetneq (g)$ bestaan sodanig dat $Fz \cap G \neq \phi$ vir elke $z \in G$.

Stelling 17 [14]

Laat $I \lhd R$. I is 'n regs-sterkpriemideaal in R as en slegs as $C_R(I)$ 'n sp^*-stelsel is.

Bewys

Vir $I = R$ geld die stelling.

Laat $I \neq R$ 'n regs-sterkpriemideaal in R wees en $x \in C_R(I)$. Volgens stelling 16 bestaan daar 'n eindige deelversameling, sê $F \subsetneq (x)$ sodanig dat as $Fz \subsetneq I$, $z \in R$, dan is $z \in I$. Dus, as $z \in C_R(I)$, dan is $Fz \cap C_R(I) \neq \phi$ sodat $C_R(I)$ 'n sp^*-stelsel is.

Gestel, omgekeerd, dat $C_R(I)$ 'n sp^*-stelsel is. Dan bestaan daar vir elke $x \in C_R(I)$ 'n eindige deelversameling $F \subseteq (x)$ sodanig dat $Fz \cap C_R(I) \neq \phi$ vir elke $z \in C_R(I)$. Dus bestaan daar vir elke $x \in C_R(I)$ 'n eindige deelversameling $F \subseteq (x)$ sodanig dat as $Fz \subseteq I$, $z \in R$, dan is $z \in I$. Volgens stelling 16 is I 'n regs-sterkpriemideaal in R.

Opmerking 7

Groenewald en Heyman gee in [4] die volgende definisie: 'n Deelversameling S van 'n ring R heet 'n s-stelsel as daar vir elke $x \in S$ 'n eindige deelversameling F van R bestaan sodanig dat $xFr \cap S \neq \phi$ vir elke $r \in S$. ϕ word ook gedefinieer as 'n s-stelsel.

Ons gebruik die term sp^*-stelsel in plaas van s-stelsel en bewys die volgende stelling.

Stelling 18

Laat $I \triangleleft R$ en $S = C_R(I)$. S is 'n sp^*-stelsel as en slegs as daar vir elke $x \in S$ 'n eindige deelversameling $F \subseteq R$ bestaan sodanig dat $xFr \cap S \neq \phi$ vir elke $r \in S$.

Bewys

Vir $S = \phi$ en $S = R$ geld die stelling.

Laat $S \neq \phi$, $S \neq R$ en gestel S is 'n sp^*-stelsel. Dan is $I = C_R(S)$ 'n regs-sterkpriemideaal in R. Laat $x \in S$, met ander woorde, $x \in C_R(I)$. Omdat I 'n regs-sterkpriemideaal in R is, bestaan daar volgens stelling 15 'n eindige deelversameling, sê $F \subseteq R$, sodanig dat as $xFr \subseteq I$, $r \in R$, dan is $r \in I$. Laat $r \in S$, met ander woorde, $r \in C_R(I)$. Dan is $xFr \not\subseteq I$ sodat $xFr \cap S \neq \phi$.

Gestel, omgekeerd, dat daar vir elke $x \in S$ waar $S \neq R$ 'n eindige deelversameling $F \subseteq R$ bestaan sodanig dat $xFr \cap S \neq \phi$ vir elke $r \in S$.

Laat $x \in C_R(I) = S$. Dan bestaan daar 'n eindige deelversameling, sê $F \subsetneq R$ sodanig dat $xFr \cap S \neq \phi$ vir elke $r \in S$. Dus, as $r \in C_R(I) = S$, dan is $xFr \nsubseteq I$, sodat I volgens stelling 15 'n regs-sterkpriemideaal in R is. Gevolglik is S 'n sp^*-stelsel.

Definisie 11 [14]

'n sp-stelsel in R is 'n paar (G,P) waar G 'n deelversameling van R is en $P \triangleleft R$ sodanig dat $G \cap P$ geen nie-nul elemente van R bevat nie en daar vir elke $g \in G$ 'n eindige deelversameling $F \subsetneq (g)$ bestaan sodanig dat $Fz \cap G \neq \phi$ vir elke $z \in C_R(P)$.

Stelling 19 [14]

Laat $I \triangleleft R$. I is 'n regs-sterkpriemideaal in R as en slegs as $(C_R(I),I)$ 'n sp-stelsel is.

Bewys

Laat I 'n regs-sterkpriemideaal in R wees. Dan bestaan daar volgens stelling 16 vir elke $x \in C_R(I)$ 'n eindige deelversameling $F \subsetneq (x)$ sodanig dat as $Fz \subsetneq I$, $z \in R$, dan is $z \in I$. Dus bestaan daar vir elke $x \in C_R(I)$ 'n eindige deelversameling $F \subsetneq (x)$ sodanig dat $Fz \cap C_R(I) \neq \phi$ vir elke $z \in C_R(I)$.

$C_R(I) \cap I = \phi$ en dus is $(C_R(I),I)$ 'n sp-stelsel.

Gestel, omgekeerd, dat $(C_R(I),I)$ 'n sp-stelsel is. Dan bestaan daar vir elke $x \in C_R(I)$ 'n eindige deelversameling $F \subsetneq (x)$ sodanig dat $Fz \cap C_R(I) \neq \phi$ vir elke $z \in C_R(I)$. Dus bestaan daar vir elke $x \in C_R(I)$ 'n eindige deelversameling $F \subsetneq (x)$ sodanig dat as $Fz \subsetneq I$, $z \in R$, dan is $z \in I$. Volgens stelling 16 is I 'n regs-sterkpriemideaal in R.

3.4 Ideale in $\boldsymbol{R}$ wat regs-sterkpriem is

Stelling 20 [8]

Laat $\boldsymbol{R} \neq 0$ en gestel $\boldsymbol{M}$ is 'n maksimale element van die versameling $I' = \{I \lhd \boldsymbol{R} \mid I$ bevat nie 'n isolator vir $\boldsymbol{R}$ nie$\}$. Dan is $\boldsymbol{M}$ 'n regs-sterkpriemideaal in $\boldsymbol{R}$.

Bewys

Ons bewys eerstens dat I' volgens Zorn se lemma 'n maksimale element bevat:

$I' \neq \phi$, want $(0) \in I'$: die versameling $\{0\}$ is nie 'n isolator vir $\boldsymbol{R}$ nie, want $0r = 0$ waar $0 \neq r \in \boldsymbol{R}$.

Laat $\boldsymbol{V}$ die vereniging van 'n ketting, sê $\boldsymbol{K}$, in I' wees. $\boldsymbol{V} \in I'$: gestel die teendeel, naamlik dat daar 'n eindige deelversameling, sê $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subseteq \boldsymbol{V}$ bestaan sodanig dat as $Fr = 0$, $r \in \boldsymbol{R}$, dan is $r = 0$. Vir $i = 1, 2, \ldots, n$ is f_i bevat in 'n element, sê I_i van $\boldsymbol{K}$. Kies $I_{\bar{F}} \in \boldsymbol{K}$ sodanig dat $I_i \subseteq I_{\bar{F}}$ vir $i = 1, 2, \ldots, n$. Dan is $F \subseteq I_{\bar{F}} \in \boldsymbol{K}$, 'n teenstrydigheid.

Volgens Zorn se lemma bevat I' nou 'n maksimale element, sê $\boldsymbol{M}$.

Laat $0 \neq J/\boldsymbol{M} \lhd \boldsymbol{R}/\boldsymbol{M}$. Ons bewys dat $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{M}$ regs-sterkpriem is, deur aan te toon dat $J/\boldsymbol{M}$ 'n isolator vir $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{M}$ bevat:

$\boldsymbol{M} \subset J$ is maksimaal met betrekking tot die eienskap dat dit nie 'n isolator vir $\boldsymbol{R}$ bevat nie. Dus bevat J 'n isolator, sê $\bar{F} = \{j_1, j_2, \ldots, j_p\}$ vir $\boldsymbol{R}$.

Stel $F' = \{j_1 + \boldsymbol{M}, j_2 + \boldsymbol{M}, \ldots, j_p + \boldsymbol{M}\}$.

Ons bewys nou dat $F' \subseteq J/\boldsymbol{M}$ 'n isolator vir $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{M}$ is: gestel die teendeel, naamlik dat daar 'n element, sê $\boldsymbol{M} \neq r + \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{R}/\boldsymbol{M}$ bestaan sodanig dat $F'(r+\boldsymbol{M}) = \{\boldsymbol{M}\}$. Met ander woorde, $(j_i + \boldsymbol{M})(r + \boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M}$ vir $i = 1, 2, \ldots, p$. Dan is $j_i r + \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}$ vir $i = 1, 2, \ldots, p$ sodat $j_i r \in \boldsymbol{M}$ vir $i = 1, 2, \ldots, p$.

Omdat $r + M \neq M$, is $r \notin M$. Dus is $M \subset (r) + M$. M is maksimaal met betrekking tot die eienskap dat dit nie 'n isolator vir R bevat nie, en dus bevat $(r) + M$ 'n isolator, sê G, vir R.

Ons bewys nou dat G gekies kan word só dat dit van die volgende vorm is: $\{m_1, m_2, \ldots, m_t, r, ra_1, ra_2, \ldots, ra_s\}$ waar $m_i \in M$ vir $i = 1,2, \ldots, t$ en $a_j \in R$ vir $j = 1,2, \ldots, s$.

Laat $g \in G$ en sê $g = n_g r + s_g r + r\bar{a}_g + \sum_{i=1}^{v} s_{gi} r\bar{a}_{gi} + m_g$

$(s_g, \bar{a}_g, s_{gi}, \bar{a}_{gi} \in R$ vir $i = 1,2, \ldots, v$; $n_g \in Z$ en $m_g \in M)$.

Kies $G' = \bigcup_{i,g} \{m_g, r, r\bar{a}_g, r\bar{a}_{gi}\}$.

As $G'z = 0$, $z \in R$, dan is $z = 0$: laat $G'z = 0$ vir 'n $z \in R$.

Dan is $gz = (n_g r + s_g r + r\bar{a}_g + \sum_{i=1}^{v} s_{gi} r\bar{a}_{gi} + m_g)z$

$= 0$, omdat $G'z = 0$.

Dus is $Gz = 0$ sodat $z = 0$.

Laat nou $G = \{m_1, m_2, \ldots, m_t, r, ra_1, ra_2, \ldots, ra_s\}$ waar $m_i \in M$ vir $i = 1,2, \ldots, t$ en $a_j \in R$ vir $j = 1,2, \ldots, s$.

Stel $H = \{m_i \mid i = 1,2, \ldots, t\} \cup \{j_i r \mid i = 1,2, \ldots, p\}$

$\cup \{j_i ra_k \mid i = 1,2, \ldots, p$ en $k = 1,2, \ldots, s\}$.

H is 'n eindige deelversameling van M en dus is $ann_R(H) \neq 0$.

Laat $0 \neq x \in ann_R(H)$.

Dan is: (i) $m_i x = 0$ vir $i = 1,2, \ldots, t$

(ii) $j_i rx = 0$ vir $i = 1,2, \ldots, p$

(iii) $j_i ra_k x = 0$ vir $i = 1,2, \ldots, p$ en 'n vaste k,

waar $k \in \{1,2, \ldots, s\}$.

Uit (ii) volg dat $rx = 0$, want $\bar{F} = \{j_1, j_2, \ldots, j_p\}$ is 'n isolator vir R.

Soortgelyk volg uit (iii) dat $ra_k x = 0$ vir $k = 1,2, \ldots, s$.

Ons het dus nou dat $m_i x = 0$ vir $i = 1,2, \ldots, t$; $rx = 0$ en $ra_k x = 0$ vir $k = 1,2, \ldots, s$. Gevolglik is $x = 0$, want G is 'n isolator vir R. Dit is egter strydig met die keuse van x.

$F' \subsetneq J/M$ is dus 'n isolator vir R/M sodat R/M volgens stelling 10 'n regs-sterkpriemring is. Gevolglik is M 'n regs-sterkpriemideaal in R.

Stelling 21 [4]

As A 'n ideaal in R is en P is 'n regs-sterkpriemideaal in R, dan is $A \cap P$ 'n regs-sterkpriemideaal in A.

Bewys

Vir $P = R$ geld die stelling.

Laat $P \neq R$ 'n regs-sterkpriemideaal in R wees en $A \triangleleft R$. Vir $A = P$ geld die stelling. Laat $A \neq P$. $C_A(A \cap P) = C_R(P) \cap A$: laat $x \in C_A(A \cap P)$, met ander woorde, $x \in A$, maar $x \notin A \cap P$. Dan is $x \notin P$ en dus is $x \in C_R(P) \cap A$ sodat $C_A(A \cap P) \subsetneq C_R(P) \cap A$. Laat $x \in C_R(P) \cap A$, met ander woorde, $x \notin P$ en $x \in A$. Dan is $x \notin A \cap P$, dit is $x \in C_A(A \cap P)$ sodat $C_R(P) \cap A \subsetneq C_A(A \cap P)$.

$C_A(A \cap P)$ is 'n sp^*-stelsel:

Laat $b \in C_A(A \cap P) = C_R(P) \cap A$. $C_R(P)$ is 'n sp^*-stelsel, omdat P 'n regs-sterkpriemideaal in R is. Vir $b \in C_R(P)$ bestaan daar dus volgens stelling 15 'n eindige deelversameling, sê $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subsetneq R$ sodanig dat $bAc \cap C_R(P) \neq \phi$ vir elke $c \in C_R(P)$.

Laat $d \in C_R(P) \cap A \subsetneq C_R(P)$. Dan is $bAd \cap C_R(P) \neq \phi$ en dus bestaan daar 'n element, sê $x_k \in A$ sodanig dat $bx_k d \in C_R(P)$. $C_R(P)$ is 'n sp^*-stelsel. Daar bestaan dus volgens stelling 18 vir $bx_k d \in C_R(P)$ 'n eindige deelversameling, sê

$\{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \subsetneq R$ sodanig dat

$\{bx_k dz_1 t, bx_k dz_2 t, \ldots, bx_k dz_m t\} \cap C_R(P) \neq \phi$ vir elke t $\in C_R(P) \cap A$. Dus

geld vir elke $t \in C_R(P) \cap A = C_A(A \cap P)$, dat
$\{bx_k dz_1 t,\ bx_k dz_2 t,\ \ldots,\ bx_k dz_m t\} \cap C_A(A \cap P) \neq \phi$ want
$\{bx_k dz_1 t,\ bx_k dz_2 t,\ \ldots,\ bx_k dz_m t\} \subseteq A$.

Laat $F = \{x_k dz_1,\ x_k dz_2,\ \ldots,\ x_k dz_m\}$. $F \subseteq A$, want $d \in A$. Vir elke $b \in C_A(A \cap P)$ bestaan daar dus 'n eindige deelversameling $F \subseteq A$ sodanig dat $bFt \cap C_A(A \cap P) \neq \phi$ vir elke $t = C_A(A \cap P)$. Uit stelling 18 volg dat $C_A(A \cap P)$ 'n sp^*-stelsel is, sodat $A \cap P$ volgens stelling 17 'n regs-sterkpriemideaal in A is.

---o0o---

HOOFSTUK 4

DIE VERBAND TUSSEN REGS-SUPERPRIEMRINGE EN REGS-STERKPRIEMRINGE

4.1 Inleiding

Ons gee in hierdie hoofstuk die verband tussen regs-superpriemringe en regs-sterkpriemringe soos aangedui in [15]. Verder gee ons 'n voorbeeld van 'n ring wat regs-superpriem en regs-sterkpriem is, maar nie links-superpriem of links-sterkpriem is nie, om aan te toon dat die begrippe regs-superpriem (regs-sterkpriem) en links-superpriem (links-sterkpriem) nie ooreenstem nie.

4.2 Die verband tussen regs-superpriemringe en regs-sterkpriemringe

Stelling 22

As R 'n regs-superpriemring (links-superpriemring) is, dan is R regs-sterkpriem (links-sterkpriem).

Bewys

Vir $R = 0$ geld die stelling.

Laat $R \neq 0$ 'n regs-superpriemring wees en $0 \neq I \triangleleft R$. Dan bevat I 'n nie-nul element, sê c sodanig dat $ann_R\{c\} = 0$. Stel $F = \{c\}$.

$ann_R(F) = 0$ sodat R volgens stelling 10 'n regs-sterkpriemring is.

Ons kan soortgelyk bewys dat as R 'n links-superpriemring is, dan is R links-sterkpriem.

Stelling 23

As R 'n regs-sterkpriemring van orde een is, dan is R regs-superpriem.

Bewys

Vir $R = 0$ geld die stelling.

Laat $R \neq 0$ 'n regs-sterkpriemring van orde een wees en $0 \neq I \lhd R$. Volgens stelling 9 bevat I 'n deelversameling met een element, sê $\{f\}$ sodanig dat $ann_R\{f\} = 0$. $f \neq 0$ en gevolglik is R 'n regs-superpriemring.

Opmerking 8

'n Regs-superpriemring is nie noodwendig regs-sterkpriem van orde een nie: ons beskou weer die voorbeeld in opmerking 4 waar T die ring van 2×2 matrikse oor die liggaam $Z_2 = \{0;1\}$ is.

T is regs-superpriem, omdat elke nie-nul hoofideaal in T die links-kanselleerbare element $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (soos aangedui) bevat.

T is egter, soos bewys, nie regs-sterkpriem van orde een nie.

Opmerking 9

As R 'n regs-superpriemring is, dan is R nie noodwendig links-superpriem nie, soos wat ons met die volgende voorbeeld aantoon.

Voorbeeld 5 [5]

Gestel $D = Z_2[x_1, x_2, x_3, \ldots]$, dit is die vrye (nie-kommutatiewe) Z_2-algebra met basis $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Laat I die ideaal in D wees wat voortgebring word deur die monome van die vorm $x_i x_j x_k$, $i > j > k$ en stel $R = D/I$.

R is regs-superpriem, want R is regs-sterkpriem van orde een:

laat $m_i + I \neq I$, $m_i \in D$, 'n monoomneweklas van die vorm $x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_b} + I$ wees. $S(m_j) = \{x_{j_b} x_1 + I\}$ is 'n isolator vir $m_j + I$: laat $(m_j + I)(x_{j_b} x_1 + I)(z + I) = I$ vir 'n $z + I \in R$. Met ander woorde, $(x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_b})(x_{j_b} x_1) z + I = I$. $(x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_b})(x_{j_b} x_1) \notin I$. Gevolglik is $z \in I$ sodat $z + I = I$.

Laat nou $I \neq f+I \in R$ en sê $f+I = m_1+m_2 +\ldots+ m_n + I$. Kies $m_i+I \neq I$ uit een van die monoomneweklasse m_1+I, m_2+I, ..., m_n+I en laat $m_i+I = x_{i1}x_{i2} \ldots x_{ik}+I$. $S(m_i) = \{x_{ik}x_1+I\}$ is 'n isolator vir $f+I$: laat $(f+I)(x_{ik}x_1+I)(z+I) = I$ vir 'n $z+I \in R$, met ander woorde, $(m_1x_{ik}x_1+m_2x_{ik}x_1 +\ldots+ m_ix_{ik}x_1 +\ldots+ m_nx_{ik}x_1)z+I = I$.
Dan is $m_ix_{ik}x_1z \in I$. Dus is $(m_i+I)(x_{ik}x_1+I)(z+I) = I$ sodat $z+I = I$, want $x_{ik}x_1+I$ is soos aangedui 'n isolator vir m_i+I.

R is dus regs-sterkpriem van orde een. Uit stelling 23 volg dat R regs-superpriem is.
R is nie links-superpriem nie, want R is nie links-sterkpriem nie: gestel R is links-sterkpriem. Laat $I \neq x + I \in R$ en gestel $F \subseteq R$ is 'n isolator vir $x+I$. $F \neq \{I\}$ (opmerking 3). Laat $I \neq r+I \in F$ en gestel
$r+I = m_1+m_2 +\ldots+ m_e+I$
$= x_{11}x_{12} \ldots x_{1r}+x_{21}x_{22} \ldots x_{2s} +\ldots+ x_{e1}x_{e2} \ldots x_{et}+I$, sê.

Stel $I \neq z+I = x_{n+1}x_n+I \in R$ ($n > i1$ vir $i = 1,2, \ldots, e$).
Nou geld dat
$(z+I)(r+I)(x+I)$
$= x_{n+1}x_n[x_{11}x_{12} \ldots x_{1r}+ x_{21}x_{22} \ldots x_{2s} +\ldots+ x_{e1}x_{e2} \ldots x_{et}]x+I$
$= (x_{n+1}x_nx_{11})(x_{12} \ldots x_{1r}x) + (x_{n+1}x_nx_{21})(x_{22} \ldots x_{2s}x) +$
$\ldots + (x_{n+1}x_nx_{e1})(x_{e2} \ldots x_{et}x) + I$
$= I$.
Dus is $(z+I)(F)(x+I) = I$ vir 'n $z+I \neq I$, wat strydig is met die feit dat F 'n isolator vir $x+I$ is. R is dus nie links-sterkpriem nie. Uit stelling 22 volg dat R nie links-superpriem is nie.

Opmerking 10

As R 'n regs-sterkpriemring is, dan is R nie noodwendig links-sterkpriem nie: gestel $D = Z_2[x_1,x_2,x_3, \ldots]$, dit is die vrye (nie-kommutatiewe)

Z_2-algebra met basis $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Laat I die ideaal in D wees wat voortgebring word deur die monome van die vorm $x_i x_j x_k$, $i > j > k$ en stel $R = D/I$.

Soos bewys in opmerking 9, is R regs-superpriem en dus regs-sterkpriem. R is egter, soos aangetoon, nie links-sterkpriem nie.

---o0o---

HOOFSTUK 5

DIE VERBAND TUSSEN DIE REGS-SUPERPRIEMRADIKAAL, REGS-STERKPRIEMRADIKAAL EN ANDER BEKENDE RADIKALE

5.1 Inleiding

Ons bewys in hierdie hoofstuk eerstens dat die klas van regs-superpriemringe en die klas van regs-sterkpriemringe elk 'n spesiale klas van ringe is en toon dan die posisie van die regs-superpriemradikaal en die regs-sterkpriemradikaal in 'n diagram van bekende radikale aan.

5.2 Die spesiale radikale σ en s

Stelling 24 [15]

Laat $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{R} | \boldsymbol{R}$ is 'n regs-superpriemring$\}$. Dan is $\boldsymbol{M}$ 'n spesiale klas van ringe.

Bewys

$\boldsymbol{M}$ bestaan uit priemringe volgens stelling 5.

$\boldsymbol{M}$ is erflik: laat $0 \neq I \triangleleft \boldsymbol{R}$ vir 'n $0 \neq \boldsymbol{R} \in \boldsymbol{M}$ en $0 \neq a \in I$. $(a)_I$ en $((a)_I)_{\boldsymbol{R}}$ is die ideale wat onderskeidelik deur a in I en $(a)_I$ in $\boldsymbol{R}$ voortgebring word. $\boldsymbol{R}$ is 'n regs-superpriemring en dus bestaan daar 'n element, sê $0 \neq c \in ((a)_I)_{\boldsymbol{R}}$ sodanig dat as $cz = 0$, $z \in \boldsymbol{R}$, dan is $z = 0$. Volgens [1], lemma 4, is $c^3 \in ((a)_I)^3_{\boldsymbol{R}} \subseteq (a)_I$. $c^3 \neq 0$: gestel $c^3 = 0$, dit is $cc^2 = 0$. Dan is $c^2 = 0$ en hieruit volg dat $c = 0$, 'n teenstrydigheid. Laat nou $0 \neq z \in I$. Dan volg soortgelyk dat $c^3 z \neq 0$. Volgens stelling 3 is $c^3 \in (a)_I$ links-kanselleerbaar sodat I 'n regs-superpriemring is.

$\mathcal{M}$ is geslote onder essensiële uitbreidings: laat $I \in \mathcal{M}$ 'n essensiële ideaal in $\mathcal{R}$ wees. Dan is $\mathcal{R} \in \mathcal{M}$: laat $0 \neq a \in \mathcal{R}$. I is 'n essensiële ideaal in $\mathcal{R}$ sodat $I \cap (a)_R \neq 0$. Laat dus $0 \neq b \in I \cap (a)_R$. I is 'n regssuperpriemring en dus bestaan daar 'n element, sê $0 \neq e \in (b)_I \subsetneq (a)_R$ sodanig dat as $ey = 0$, $y \in I$, dan is $y = 0$. Vir $0 \neq e \in (a)_R$ geld dat as $ex = 0$, $x \in \mathcal{R}$, dan is $x = 0$: laat $ex = 0$ vir 'n $x \in \mathcal{R}$. Dan is $e(xI) = 0$ en dus volg dat $xI = 0$. I is 'n priemring en dus is $\mathcal{R}$ 'n priemring. Gevolglik is die linker-annuleerder van I gelyk aan 0 (sien [2] bladsy 60.) Dus $x = 0$ sodat $\mathcal{R}$ 'n regs-superpriemring is.

Laat σ die boradikaal bepaal deur die klas van regs-superpriemringe wees. Dan is σ 'n spesiale radikaal en heet die regs-superpriemradikaal.

Volgens stelling 1 is $\sigma(\mathcal{R}) = \cap\ \{I \triangleleft \mathcal{R} | I$ is 'n regs-superpriemideaal$\}$.

Stelling 25 [4]

Laat $\mathcal{M} = \{\mathcal{R} | \mathcal{R}$ is 'n regs-sterkpriemring$\}$. Dan is $\mathcal{M}$ 'n spesiale klas van ringe.

Bewys

$\mathcal{M}$ bestaan uit priemringe volgens stelling 14.

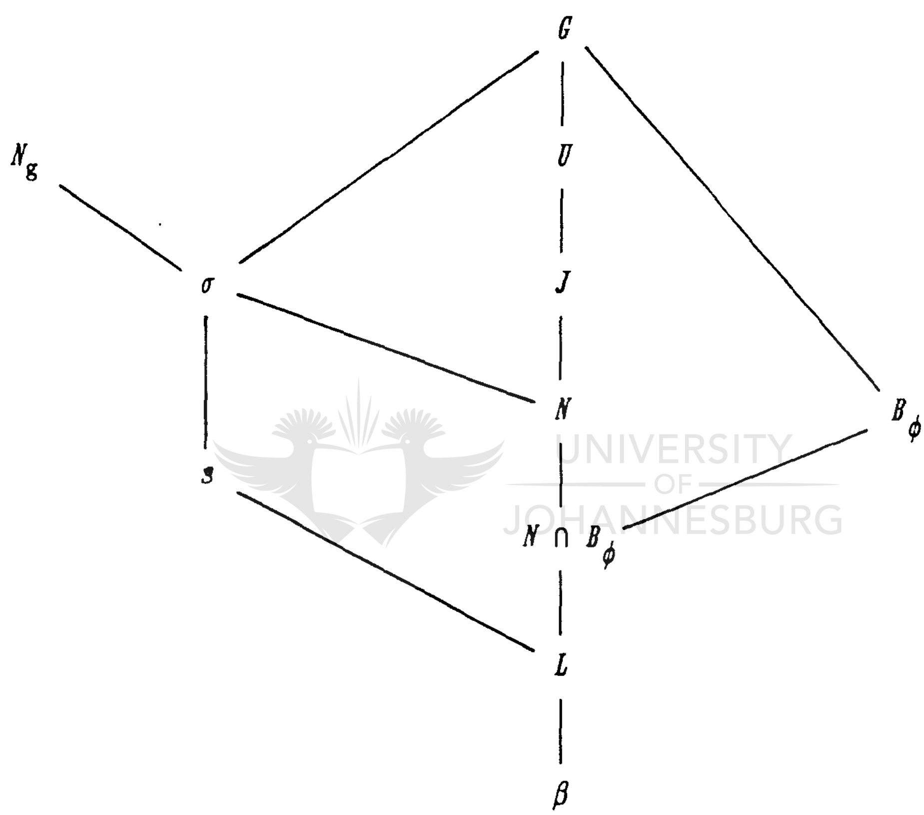
$\mathcal{M}$ is erflik: laat $0 \neq \mathcal{R} \in \mathcal{M}$ en $0 \neq I \triangleleft \mathcal{R}$. (0) is 'n regs-sterkpriemideaal in $\mathcal{R}$ omdat $\mathcal{R}$ 'n regs-sterkpriemring is. Volgens stelling 21 is $(0) \cap I = (0)$ 'n regs-sterkpriemideaal in I sodat I 'n regs-sterkpriemring is.

$\mathcal{M}$ is geslote onder essensiële uitbreidings: laat $I \in \mathcal{M}$ 'n essensiële ideaal in $\mathcal{R}$ wees. Uit [5], proposisie IV.1 volg dat $\mathcal{R} \in \mathcal{M}$.

Laat s die boradikaal bepaal deur die klas van regs-sterkpriemringe wees. Dan is s 'n spesiale radikaal en heet die regs-sterkpriemradikaal.

Volgens stelling 1 is $s(R) = \cap \{I \triangleleft R \mid I$ is 'n regs-sterkpriemideaal$\}$.

5.3 Die verband tussen σ, s en ander bekende radikale [4], [9], [14]



β is die Baer-radikaal, L is die Levitzki-radikaal, N is die nilradikaal, J is die Jacobson-radikaal, U is die radikaalklas van alle ringe wat nie homomorf op enkelvoudige ringe met nie-nul idempotente elemente afgebeeld kan word nie en G is die Brown-McCoy-radikaal.

N_g is die spesiale radikaal bepaal deur die klas van alle nie-nul ringe sonder nuldelers en B_ϕ is die spesiale radikaal bepaal deur die klas van alle subdirek-onherleibare ringe met idempotente harte. σ is die regs-superpriemradikaal en s is die regs-sterkpriemradikaal.

In [2] word bewys dat $\beta \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{G}$ en $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}_{\phi} \subset \mathcal{G}$.

I. $\mathcal{L} \subsetneq s$:

Laat R 'n s-halfenkelvoudige ring wees. Dan is $s(R) = 0$ en dus is (0) 'n regs-sterkpriemideaal in R sodat R 'n regs-sterkpriemring is. Volgens stelling 14 is R 'n priemring.

R is $\mathcal{L}$-halfenkelvoudig, want elke nie-nul ideaal in R bevat 'n eindige deelversameling wat 'n ring voortbring wat nie nilpotent is nie: laat $0 \neq I \triangleleft R$ en $0 \neq a \in I$. Omdat R regs-sterkpriem is, bevat (a) 'n eindige deelversameling, sê F, sodanig dat as $Fz = 0$, $z \in R$, dan is $z = 0$. Volgens opmerking 3 is $F \neq 0$. $F \subseteq I$ bring 'n ring voort wat nie nilpotent is nie: gestel die teendeel, naamlik dat F 'n nilpotente ring, sê S, voortbring. Dan bestaan daar 'n positiewe heelgetal, sê n, sodanig dat $S \neq 0$, $S^2 \neq 0$, ..., $S^{n-1} \neq 0$ en $S^n = 0$.

Omdat $S^n = 0$, volg dat $F^n = 0$.

Nou is $F^n = F(F^{n-1}) = 0$ sodat $F^{n-1} = 0$

$$F^{n-1} = F(F^{n-2}) = 0 \text{ sodat } F^{n-2} = 0.$$

$$\vdots$$

$$F^{n-n+2} = F\,F = 0 \text{ sodat } F = 0, \text{ 'n teenstrydigheid.}$$

$\mathcal{L} \subset s$:

Laat V 'n vektorruimte met 'n aftelbare basis oor 'n liggaam wees en gestel S is die ring van alle lineêre transformasies van eindige rang op V.

S is $\mathcal{L}$-halfenkelvoudig, want S is $\mathcal{N}$-halfenkelvoudig: S bevat nie-nul idempotente elemente: laat $0 \neq t \in S$. Volgens [7], stelling 7.4, bestaan daar 'n element, sê $t' \in S$ sodanig dat $t = tt't$.

tt' is 'n nie-nul idempotente element van S, want

$$(tt')(tt') = (tt't)t' = tt'.$$

S is enkelvoudig ([7], stelling 7.8) en tt' is nie nilpotent nie. Dus is S N-halfenkelvoudig. Gevolglik is S L-halfenkelvoudig, want $L \subsetneq N$.

S is s-radikaal: $s(S) \neq 0$ want S is nie 'n regs-sterkpriemring nie sodat (0) nie 'n regs-sterkpriemideaal in S is nie:
Laat $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\} \subsetneq S$. Volgens [2], voorbeeld 11, kan elke element van S voorgestel word deur 'n oneindige matriks met 'n eindige aantal kolomme wat nie-nul inskrywings het. Laat $n_1, n_2, \ldots, n_k$ die "laaste" kolom met 'n nie-nul inskrywing in elk van die matrikse $f_1, f_2, \ldots, f_k$ onderskeidelik aandui. Kies uit $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ die grootste waarde, sê n_r. Laat z die matriks wees met een in posisie $(n_r+1, 1)$ en 0 in elke ander posisie. Dan is $Fz = 0$ sodat $0 \neq z \in ann_s(F)$. Elke eindige deelversameling van S het dus 'n nie-nul regter-annuleerder in S.
Omdat S enkelvoudig is en $s(S) \neq 0$, volg dat $s(S) = S$.

Vir die bewys van $s \subset \sigma$, benodig ons die volgende resultaat.

Stelling 26

Gestel G is 'n eindig-voortgebringde ring en $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ is 'n versameling voortbringers van G. Dan geld vir elke positiewe heelgetal k, dat G^k eindig-voortgebring is met voortbringers:

$$A_1 = \{a_1 a_2 \ldots a_k \mid a_i \in F \text{ vir } i = 1,2, \ldots, k\} \cup$$
$$A_2 = \{a_1' a_2' \ldots a_{k+1}' \mid a_i' \in F \text{ vir } i = 1,2, \ldots, k+1\} \cup \ldots$$
$$\vdots$$
$$A_{2k-1} = \{a_1'' a_2'' \ldots a_{2k-1}'' \mid a_i'' \in F \text{ vir } i = 1,2, \ldots, 2k-1\}.$$

Bewys

Laat $g \in G^k$, en sê $g = \sum_{i=1}^{m} g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k}$ $\quad (g_{i_j} \in G,\ m \in N)$.

Elke $g_{i_j} \in G$ is van die vorm $\sum_{\ell=1}^{r} \left[\pm\, x_{\ell_1} x_{\ell_2} \dots x_{\ell_{p(\ell)}}\right]$

$(x_{\ell_t} \in F$ en $r,\ p(\ell) \in \mathrm{N})$.

Dus is g van die vorm, $g = \sum_{b=1}^{d} \left[\pm\, a_{b_1} a_{b_2} \dots a_{b_{f(b)}}\right]$

$(a_{b_e} \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{2k-1}$ en

$d,\ f(b) \in N)$.

II. $\quad s \subsetneq \sigma$:

Elke regs-superpriemring is 'n regs-sterkpriemring en dus is die boradikaal bepaal deur die regs-sterkpriemringe bevat in die boradikaal bepaal deur die regs-superpriemringe.

$s \subset \sigma$: $\quad$ [9], Voorbeeld 1

Laat G 'n eindig-voortgebringde nilring wees wat nie lokaal-nilpotent is nie (Voorbeeld van Golod in [11], §20).

Stel $T = \{I \triangleleft G \mid G^k \nsubseteq I$ vir elke $k = 1,2, \dots \}$.

T bevat 'n maksimale element volgens Zorn se lemma:

$T \neq \phi$, want $(0) \in T$: $\ G^k \nsubseteq (0)$ vir $k = 1,2, \dots$, want G is nie lokaal-nilpotent nie en dus ook nie nilpotent nie.

Laat V die vereniging van 'n ketting, sê K, in T wees. $V \in T$: gestel die teendeel, naamlik dat daar 'n positiewe heelgetal k bestaan sodanig dat $G^k \subseteq V$. Volgens stelling 26 is G^k 'n eindig-voortgebringde ring. Laat $F = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}$ 'n versameling voortbringers van G^k wees. Dan geld vir $\ell = 1,2, \dots, s$ dat $f_\ell \in I_\ell$, sê, waar $I_\ell \in K$. Kies $I_F \in K$ sodanig dat $I_\ell \subseteq I_F$ vir $\ell = 1,2, \dots, s$. Dan is $F \subseteq I_F$ en geld dat

$G^k \subseteq I_F$: Laat $a \in G^k$ en sê $a = \sum_{i=1}^{v} (\pm f_{i_1} \dots f_{i_{t(i)}})$ ($f_{i_j} \in F \subseteq I_F$ en $t(i)$, $v \in N$). $a \in I_F$, omdat I_F geslote is onder optelling en vermenigvuldiging. Dus volg dat $G^k \subseteq I_F \in K$, strydig.
Laat nou I 'n maksimale element in T wees en stel $Q = G/I$. Q is regs-sterkpriem volgens [10], voorbeeld 1.12. Dus is Q s-halfenkelvoudig.

$Q \in N$, want elke homomorfe beeld van 'n nilring is nil. Dus is $Q \in \sigma$, want $N \subseteq \sigma$.

III. $N \subseteq \sigma$:

Laat R 'n σ-halfenkelvoudige ring wees. Dan is $R \cong \dot{\pi} R_i$ waar elke R_i 'n regs-superpriemring is. As elke R_i N-halfenkelvoudig is, dan is R ook N-halfenkelvoudig. Gestel R_i vir 'n sekere i is nie N-halfenkelvoudig nie. Dan bevat R_i 'n nie-nul nilideaal, sê I. Laat $0 \neq c \in I$. Daar bestaan 'n positiewe heelgetal, sê n, só dat $c \neq 0$, $c^2 \neq 0$, ..., $c^{n-1} \neq 0$ en $c^n = 0$. Dus $c(c^{n-1}) = 0$, waar $c^{n-1} \neq 0$. Gevolglik is $ann_{R_i}\{c\} \neq 0$. Dus is R_i nie regs-superpriem nie, 'n teenstrydigheid.

$N \subset \sigma$:

Laat V 'n vektorruimte met 'n aftelbare basis oor 'n liggaam wees en gestel S is die ring van alle lineêre transformasies van eindige rang op V.
S is σ-radikaal: soos aangetoon in I, is $ann_S\{x\} \neq 0$ vir elke $x \in S$.
S is dus nie 'n regs-superpriemring nie en gevolglik is (0) nie 'n regs-superpriemideaal in S nie. Omdat S enkelvoudig is volg dat $\sigma(S) = S$.

S is N-halfenkelvoudig soos aangedui in I.

IV. $\mathcal{s}$ is nie vergelykbaar met $N \cap B_\phi$ nie:

$N \cap B_\phi \nsubseteq s$: [9]

Laat G 'n eindig-voortgebringde nilring wees wat nie lokaal-nilpotent is nie ([11], §20) en stel $T = \{I \triangleleft G \,/\, G^k \nsubseteq I$ vir elke $k = 1,2,\ldots\}$. Soos aangedui in II, bevat T volgens Zorn se lemma 'n maksimale element, sê I. Laat $Q = G/I$. Dan is $Q \in N$, want elke homomorfe beeld van 'n nilring is nil.

Ons bewys nou dat $Q \in B_\phi$:

'n Homomorfe beeld van Q is van die vorm $Q/(0)$ of Q/J, waar $0 \neq J \triangleleft Q$.

'n Egte homomorfe beeld van Q, naamlik Q/J waar $J \neq 0$, is nilpotent: Laat Q/J 'n egte homomorfe beeld van Q wees. Dan is $Q/J = G/I/M/I$, sê, waar $I \subset M \subseteq G$. I is 'n maksimale element in T en dus is $M \notin T$. Daar bestaan gevolglik 'n positiewe heelgetal, sê r sodanig dat $G^r \subseteq M$. Dus is $G^r + I \subseteq M$ en gevolglik is $(G^r+I)/I \subseteq M/I$, met ander woorde, $Q^r \subseteq J$, sodat Q/J nilpotent is.

As Q/J subdirek-onherleibaar is, dan bevat Q/J nie 'n idempotente hart nie: gestel Q/J is subdirek-onherleibaar en bevat 'n idempotente hart, sê $H \neq 0$. Dan is $H^2 = H$ en vir elke positiewe heelgetal k geld dan dat $H^k = H$. Dit is egter strydig met die feit dat Q/J nilpotent is. Om te bewys dat $Q \in B_\phi$, is dit dus voldoende om te bewys dat Q subdirek-herleibaar is.

Gestel dat Q subdirek-onherleibaar is en laat $0 \neq H = P/I$, sê, die hart van Q wees. Dan is $I \subset P \triangleleft G$. Omdat $P \notin T$, bestaan daar 'n positiewe heelgetal, sê k, sodanig dat $G^k \subseteq P$. Gevolglik is $(G^k+I)/I \subseteq P/I$, met ander woorde $Q^k \subseteq H$. $Q^k = (G^k+I)/I \neq 0$, want $G^k \nsubseteq I$. Dus is $H \subseteq Q^k$ en gevolglik is $H = Q^k$. $Q^{2k} = (G^{2k}+I)/I \neq 0$, want $G^{2k} \nsubseteq I$. Dus is $H \subseteq Q^{2k}$ en omdat $Q^{2k} \subseteq Q^k = H$, volg dat $Q^{2k} = H = Q^k$ sodat $Q^k = H$ idempotent is.

$Q^k = H$ is 'n nilring, want Q is 'n nilring. $Q^k = H \neq 0$ is dus 'n eindig-voortgebringde idempotente nilring. Dit lei egter tot 'n teenstrydigheid, soos wat ons nou aantoon:

Laat $\bar{H} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 'n versameling voortbringers van die eindig-voortgebringde ring H wees. Ons bewys eerstens dat

$H = Hx_1 + Hx_2 + \ldots + Hx_n$.

Dit is duidelik dat $Hx_1 + Hx_2 + \ldots + Hx_n \subseteq H$.

$H \subseteq Hx_1 + Hx_2 + \ldots + Hx_n$: laat $h \in H$. Dan is $h \in H^2$, want $H = H^2$.

Gevolglik is $h = \sum_{i=1}^{v} h_i h_i'$ $(h_i, h_i' \in H$ vir $i = 1, 2, \ldots, v)$.

Laat vir 'n vaste i, $h_i' = \sum_{j=1}^{w(i)} x_{j_1}^{(i)} \ldots x_{j_{k(j)}}^{(i)}$

$$(x^{(i)}_{k_{k(j)}} \in \bar{H},\ w(i) \text{ en } k(j) \in N).$$

Dan is $h = \sum_{i=1}^{v} h_i \left[\sum_{j=1}^{w(i)} x_{j_1}^{(i)} \ldots x_{j_{k(j)}}^{(i)} \right]$.

Dus is

$$h = \left[h_1 x^{(1)}_{1_1}\, x^{(1)}_{1_2} \ldots\ldots x^{(1)}_{1_{k(1)-1}} \right] x^{(1)}_{1_{k(1)}} + \ldots\ldots$$

$$+ \left[h_1 x^{(1)}_{w(1)_1}\, x^{(1)}_{w(1)_2} \ldots\ldots x^{(1)}_{w(1)_{k(w(1))-1}} \right] x^{(1)}_{w(1)_{k(w(1))}}$$

$$+ \left[h_2 x^{(2)}_{1_1}\, x^{(2)}_{1_2} \ldots\ldots x^{(2)}_{1_{k(1)-1}} \right] x^{(2)}_{1_{k(1)}} + \ldots\ldots$$

$$+ \left[h_2 x^{(2)}_{w(2)_1}\, x^{(2)}_{w(2)_2} \ldots\ldots x^{(2)}_{w(2)_{k(w(2))-1}} \right] x^{(2)}_{w(2)_{k(w(2))}}$$

$$+ \left[h_v x^{(v)}_{1_1} x^{(v)}_{1_2} \cdots x^{(v)}_{1_{k(1)-1}} \right] x^{(v)}_{1_{k(1)}} + \cdots$$

$$+ \left[h_v x^{(v)}_{w(v)_1} x^{(v)}_{w(v)_2} \cdots x^{(v)}_{w(v)_{k(w(v))-1}} \right] x^{(v)}_{w(v)_{k(w(v))}}$$

Vir 'n vaste i en vir $j = 1,2, \ldots, w(i)$ is $x^{(i)}_{j_{k(j)}} \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Dus is $h \in Hx_1 + \ldots + Hx_n$.

Vir $h_i' = - \sum_{j=1}^{w(i)} x^{(i)}_{j_1} \cdots x^{(i)}_{j_{k(j)}}$ volg die bewys soortgelyk.

Kies nou 'n minimale deelversameling, sê $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ van $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sodanig dat $H = Hy_1 + Hy_2 + \ldots + Hy_m$. Daar bestaan elemente, sê $h_1, \ldots, h_m \in H$ sodanig dat $y_1 = h_1 y_1 + \ldots + h_m y_m$, want $y_1 \in H$. $h_1 \neq 0$, want as $h_1 = 0$, dan is $y_1 = h_2 y_2 + \ldots + h_m y_m$, strydig met die minimaliteit van $\{y_1, \ldots, y_m\}$.

H is 'n nilring en dus bestaan daar 'n positiewe heelgetal, sê $a \geq 2$, sodanig dat $h_1^a = 0$. Deur die gelykheid $y_1 = h_1 y_1 + \ldots + h_m y_m$ met h_1^{a-1} te vermenigvuldig, volg dat

$$\begin{aligned} h_1^{a-1}(y_1) &= h_1^{a-1}(h_1 y_1) + h_1^{a-1}(h_2 y_2) + \ldots + h_1^{a-1}(h_m y_m) \\ &= 0 + h_1^{a-1}(h_2 y_2) + \ldots + h_1^{a-1}(h_m y_m). \end{aligned}$$

Dus is $h_1^{a-1}(y_1) \in Hy_2 + \ldots + Hy_m$. Laat δ die kleinste positiewe heelgetal wees sodanig dat $h_1^{\sigma} y_1 \in Hy_2 + \ldots + Hy_m$. $\delta > 1$, want gestel $\delta = 1$. Dan is $h_1^{\sigma} y_1 = h_1 y_1 \in Hy_2 + \ldots + Hy_m$. Laat dus $h_1 y_1 = h_2' y_2 + \ldots + h_m' y_m$, waar $h_i' \in H$ vir $i = 2, \ldots, m$. Dan is

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1 y_1 + h_2 y_2 + \ldots + h_m y_m \\ &= h_2' y_2 + \ldots + h_m' y_m + h_2 y_2 + \ldots + h_m y_m \\ &= (h_2' + h_2) y_2 + \ldots + (h_m' + h_m) y_m. \end{aligned}$$

Dit is egter strydig met die minimaliteit van $\{y_1, \ldots, y_m\}$.

Laat $h_1^{\delta} y_1 = h_2^{'} y_2 + \ldots + h_m^{'} y_m$, waar $h_i^{'} \in H$ vir $i = 2, \ldots, m$.

$$
\begin{aligned}
h_1^{\delta-1} y_1 &= h_1^{\delta-1}(h_1 y_1) + h_1^{\delta-1}(h_2 y_2) + \ldots + h_1^{\delta-1}(h_m y_m) \\
&= h_1^{\delta} y_1 + h_1^{\delta-1}(h_2 y_2) + \ldots + h_1^{\delta-1}(h_m y_m) \\
&= h_2^{'} y_2 + \ldots + h_m^{'} y_m + h_1^{\delta-1}(h_2 y_2) + \ldots + h_1^{\delta-1} h_m y_m \\
&= (h_2^{'} + h_1^{\delta-1} h_2) y_2 + \ldots + (h_m^{'} + h^{\delta-1} h_m) y_m \\
&\in H y_2 + \ldots + H y_m .
\end{aligned}
$$

Dit is egter strydig met die aanname dat δ die kleinste positiewe waarde is sodanig dat $h_1^{\delta} y_1 \in H y_2 + \ldots + H y_m$. Q is gevolglik subdirek-herleibaar.

Uit $Q \in B_{\phi}$ en $Q \in N$ volg dat $Q \in N \cap B_{\phi}$. $Q \notin s$, want Q is regs-sterk-priem. Dus is $N \cap B_{\phi} \nsubseteq s$.

$s \nsubseteq N \cap B_{\phi}$:

Laat V 'n vektorruimte met 'n aftelbare basis oor 'n liggaam wees en gestel S is die ring van alle lineêre transformasies van eindige rang op V. Soos bewys in I, is S s-radikaal, maar N-halfenkelvoudig. Dus is $S \in s$, maar $S \notin N \cap B_{\phi}$.

V. $L \subset N \cap B_{\phi}$:

Laat G 'n eindig-voortgebringde nilring wees wat nie lokaal-nilpotent is nie ([11], §20) en stel $T = \{I \triangleleft G \mid G^k \nsubseteq I \text{ vir elke } k = 1,2, \ldots \}$. T bevat volgens Zorn se lemma 'n maksimale element, sê I. Laat $Q = G/I$. Soos bewys in IV is $Q \in N \cap B_{\phi}$.

Q is egter s-halfenkelvoudig en dus is Q L-halfenkelvoudig.

VI. s en B_{ϕ} is nie vergelykbaar nie:

$s \nsubseteq B_{\phi}$: laat V 'n vektorruimte met 'n aftelbare basis oor 'n liggaam wees en gestel S is die ring van alle lineêre transformasies van eindige rang op V. Soos bewys in I, is $S \in s$.

$S \notin B_{\phi}$, want S is enkelvoudig en dus is S subdirek-onherleibaar met 'n idempotente hart, naamlik $S^2 = S$.
$B_{\phi} \nsubseteq s$, want $N \cap B_{\phi} \nsubseteq s$.

VII. $J \subset U$:

Die Behrens-radikaal, J_B, is die boradikaal bepaal deur die klas van alle subdirek-onherleibare ringe met idempotente harte wat idempotente elemente bevat.
$J_B \subseteq U$: laat R 'n enkelvoudige ring met 'n nie-nul idempotente element, sê e, wees. Die hart van R, dit is R self, bevat die idempotente element e en R is idempotent: $R^2 \neq 0$, omdat $0 \neq e = e^2 \in R$. Dus is $R \subseteq R^2$. Uit $R^2 \subseteq R$ volg dat $R^2 = R$.
Die boradikaal bepaal deur die klas van subdirek-onherleibare ringe met idempotente harte, wat idempotente elemente bevat, is dus bevat in die boradikaal bepaal deur die klas van enkelvoudige ringe wat nie-nul idempotente elemente bevat. Volgens [2] is $J \subset J_B$ sodat $J \subset U$.

VIII. s en U is nie vergelykbaar nie:

$s \nsubseteq U$: laat V 'n vektorruimte met 'n aftelbare basis oor 'n liggaam wees en gestel S is die ring van alle lineêre transformasies van eindige rang op V. Soos bewys in I, is $S \in s$. S is egter enkelvoudig en bevat nie-nul idempotente elemente sodat $U(S) = 0$.
$U \nsubseteq s$, want $N \cap B_{\phi} \nsubseteq s$.

IX. $\sigma \subseteq N_g$:

Laat R 'n N_g-halfenkelvoudige ring wees. Dan is $R \cong \dot{\pi}\, R_i$, waar R_i vir elke i 'n nie-nul ring is wat geen nuldelers bevat nie.

Elke nie-nul ring S wat geen nuldelers bevat nie, is regs-superpriem: gestel $S \neq 0$ is 'n ring wat geen nuldelers bevat nie. Laat $0 \neq J \triangleleft S$ en $0 \neq c \in J$. $ann_S\{c\} = 0$, omdat S geen nuldelers bevat nie, sodat S 'n regs-superpriemring is.

Nou volg dat $R \cong \dot{\pi}\, R_i$, waar R_i vir elke i 'n regs-superpriemring is. Gevolglik is R σ-halfenkelvoudig.

$\sigma \subset N_g$:

Laat T die ring van 2×2 matrikse oor die liggaam $Z_2 = \{0;1\}$ wees. Volgens [2], bladsy 154 is T N_g-radikaal. T is egter regs-superpriem volgens opmerking 8. Dus is T σ-halfenkelvoudig.

X. $\sigma \subseteq G$:

Laat R 'n ring wees wat G-halfenkelvoudig is. Dan is $R \cong \dot{\pi}\, R_i$, waar R_i vir elke i 'n enkelvoudige ring met 'n identiteitselement is.

Elke enkelvoudige ring S met 'n identiteitselement is regs-superpriem: laat S 'n enkelvoudige ring met 'n identiteitselement wees. Dan is S die enigste nie-nul ideaal in S en vir $1 \in S$ geld dat as $1 \cdot z = 0$, $z \in S$, dan is $z = 0$.

Dus volg dat $R \cong \dot{\pi}\, R_i$, waar R_i vir elke i 'n regs-superpriemring is, sodat R σ-halfenkelvoudig is.

$\sigma \subset G$:

Laat V die ring van alle rasionale getalle van die vorm $\frac{2x}{2y+1}$ wees, waar x en y heelgetalle is en die ggd van $2x$ en $2y + 1$ gelyk aan een is. V is J-radikaal volgens [2], voorbeeld 10. Dus is V G-radikaal, want $J \subseteq G$. V is regs-superpriem want die regter-annuleerder van elke element van V is nul. Dus is V σ-halfenkelvoudig.

XI. σ en J is nie vergelykbaar nie:

$\sigma \not\subseteq J$: laat V 'n vektorruimte met 'n aftelbare basis oor 'n liggaam wees en gestel S is die ring van alle lineêre transformasies van eindige rang op V. S is σ-radikaal soos aangetoon in III, maar J-halfenkelvoudig ([2], voorbeeld 11).

$J \not\subseteq \sigma$: laat W die ring van alle rasionale getalle van die vorm $\frac{2x}{2y+1}$ wees, waar x en y heelgetalle is en die *ggd* van $2x$ en $2y + 1$ gelyk aan een is. W is J-radikaal ([2], voorbeeld 10). W is egter σ-halfenkelvoudig (soos aangetoon in **IX**).

XII. σ en U is nie vergelykbaar nie:

$\sigma \not\subseteq U$, want $s \not\subseteq U$.

$U \not\subseteq \sigma$, want $J \not\subseteq \sigma$ (soos aangetoon in **X**).

XIII. $U \subsetneq G$:

Laat R 'n G-halfenkelvoudige ring wees. Dan is $R \cong \dot{\sum} R_i$, waar R_i vir elke i 'n enkelvoudige ring met 'n identiteitselement is. Vir elke i is die identiteitselement van R_i 'n nie-nul idempotente element. Dus is $R \cong \dot{\sum} R_i$, waar R_i vir elke i 'n enkelvoudige ring met 'n nie-nul idempotente element is. R is gevolglik U-halfenkelvoudig.

$U \subset G$: laat V 'n vektorruimte met 'n aftelbare basis oor 'n liggaam wees en gestel S is die ring van alle lineêre transformasies van eindige rang op V. S is G-radikaal, omdat S volgens I s-radikaal is.

S is egter U-halfenkelvoudig, want S is enkelvoudig en bevat nie-nul idempotente elemente (volgens I).

Stelling 27

Vir ringe met stygkettingvoorwaarde op linkerideale is $\beta = \mathcal{L} = \mathcal{N} = s = \sigma$.

Bewys

Laat R 'n ring met stygkettingvoorwaarde op linkerideale wees. $\beta = \sigma$: ons bewys die volgende:

(i) R is σ-radikaal as en slegs as R β-radikaal is.

(ii) $\sigma(R) = \beta(R)$.

(i) R is σ-radikaal as en slegs as R β-radikaal is: gestel R is σ-radikaal. Dan kan R nie homomorf op 'n nie-nul regs-superpriemring afgebeeld word nie. R kan dus nie homomorf op 'n nie-nul Noetherse priemring afgebeeld word nie, want volgens stelling 6 is elke Noetherse priemring regs-superpriem. R is dus β-radikaal.

Omgekeerd, as R β-radikaal is, dan is R σ-radikaal, want $\beta \subseteq \sigma$.

(ii) $\sigma(R) = \beta(R)$: soos reeds bewys is $\beta(R) \subseteq \sigma(R)$.

$\sigma(R) \subseteq \beta(R)$: laat I 'n priemideaal in R wees. Dan is R/I 'n Noetherse priemring. Elke Noetherse priemring is regs-superpriem (stelling 6). Dus is R/I regs-superpriem en gevolglik is I 'n regs-superpriemideaal in R.

Soos reeds bewys is $\beta \subseteq \mathcal{L} \subseteq s \subseteq \sigma$ vir alle ringe en volgens [2] is $\beta = \mathcal{L} = \mathcal{N}$ vir ringe met stygkettingvoorwaarde op linkerideale.

Dus volg dat $\beta = \mathcal{L} = \mathcal{N} = s = \sigma$ vir ringe met stygkettingvoorwaarde op linkerideale.

Vir kommutatiewe ringe is $\beta = L = N = s = \sigma = N_g$:

Vir kommutatiewe ringe is $\beta = L = N = N_g$ ([2], lemma 88). Dus volg dat $\beta = L = N = s = \sigma = N_g$.

---o0o---

HOOFSTUK 6

KARAKTERISERING VAN DIE REGS-SUPERPRIEMRADIKAAL EN DIE REGS-STERKPRIEMRADIKAAL

6.1 Inleiding

In hoofstuk twee het ons regs-superpriemideale in terme van 'n sup-stelsel en superstelsel gekarakteriseer en in hoofstuk drie is regs-sterkpriemideale in terme van 'n sp-stelsel gekarakteriseer. In hierdie hoofstuk karakteriseer ons nou die regs-superpriemradikaal deur gebruik te maak van sup-stelsels en superstelsels en die regs-sterkpriemradikaal deur gebruik te maak van sp-stelsels.

Ons gee verder eienskappe van die regs-superpriemradikaal en die regs-sterkpriemradikaal.

6.2 Karakterisering van die regs-superpriemradikaal

Stelling 28 [15]

Laat $B = \{a \in R \mid$ as $a \in G$ waar G 'n sup-stelsel is, dan is $0 \in G\}$. Dan is $B \subseteq \sigma(R)$.

Bewys

Laat $a \in B$ en gestel I is 'n regs-superpriemideaal in R. Dan is $C_R(I)$ 'n sup-stelsel en dus is $a \in I$, want as $a \in C_R(I)$, dan is $0 \in C_R(I)$, 'n teenstrydigheid. Gevolglik is $a \in \cap \{I \lhd R \mid I$ is 'n regs-superpriemideaal$\}$, met ander woorde, $a \in \sigma(R)$ sodat $B \subseteq \sigma(R)$.

Definisie 12 [15]

'n Ideaal I in R is 'n s-priemideaal as $C_R(I)$ 'n deelversameling S bevat sodanig dat S geslote onder vermenigvuldiging is en $(a) \cap S \neq \phi$ vir elke $a \in C_R(I)$.

Stelling 29 [15]

Laat $B = \{a \in R \mid$ as $a \in G$ waar G 'n sup-stelsel is, dan is $0 \in G\}$.
$\sigma(R) = B$ as en slegs as $\sigma(R) = N(R)$, waar $N(R)$ die nilradikaal van R is.

Bewys

Gestel $\sigma(R) = B$. Laat $x \in \sigma(R) = B$ en $a \in (x)$. Stel $G = \{a, a^2, a^3, a^4, \ldots\}$.
G is 'n sup-stelsel: laat $r \in G$, sê $r = a^n$. Dit geld nou dat $r \in (r)$ en $rG \subseteq G$: laat $a^m \in G$. Dan is $ra^m = a^n a^m = a^{n+m} \in G$. G is dus 'n sup-stelsel en omdat $a \in B$ en $a \in G$, volg dat $0 \in G$. Daar bestaan dus 'n positiewe heelgetal, sê t, sodanig dat $a^t = 0$. $a \in (x)$ is met ander woorde nilpotent. Gevolglik is (x) 'n nilideaal, sodat $(x) \subseteq N(R)$. Dus is $\sigma(R) \subseteq N(R)$.
Ons weet dat $N(R) \subseteq \sigma(R)$ en dus is $\sigma(R) = N(R)$.
Gestel, omgekeerd, dat $\sigma(R) = N(R)$. Volgens stelling 28 is $B \subseteq \sigma(R)$.
Ons toon nou aan dat $\sigma(R) \subseteq B$:
Laat $x \in C_R(B)$. Dan bestaan daar 'n sup-stelsel, sê G, sodanig dat $x \in G$, maar $0 \notin G$. Laat $I' = \{I \triangleleft R \mid G \cap I = \phi\}$. I' bevat volgens Zorn se lemma 'n maksimale element: $I' \neq \phi$, want $(0) \in I'$.
Laat V die vereniging van 'n ketting, sê $\mathbf{I}$ in I' wees. $V \in I'$: gestel die teendeel, naamlik dat $G \cap V \neq \phi$, en laat $x' \in G \cap V$. Dan is $x' \in G$ en $x' \in I$, sê, waar $I \in \mathbf{I}$. Dus is $x' \in G \cap I$, 'n teenstrydigheid. Laat P 'n maksimale element in I' wees.

Volgens [12], stelling 9 is $N(R) = \cap \{I \triangleleft R | I$ is 'n s-priemideaal$\}$. Ons toon nou aan dat P 'n s-priemideaal is, want dan geld dat $x \notin N(R) = \sigma(R)$, omdat $x \notin P$.

Laat $S = C_R(P)$ en stel $G^* = \{c \in R | cG \subseteq G\}$. $G^* \neq \phi$, want $x \in G$ en dus bevat (x) 'n element, sê e′ sodanig dat $e'G \subseteq G$. G^* is geslote onder vermenigvuldiging: laat $c_1, c_2 \in G^*$. $c_1 c_2 G = c_1(c_2 G) \subseteq c_1 G \subseteq G$. Laat $S^* = \{c \in R | c = e+p$, waar $e \in G^*$ en $p \in P\}$.

$S^* \subseteq S$: laat $s^* \in S^*$ en sê $s^* = e+p$, waar $e \in G^*$ en $p \in P$. As $s^* \notin S$, dan is $s^* = e + p = \bar{p}$, sê, waar $\bar{p} \in P$. Dus is $e = \bar{p} - p \in P$, strydig.

S^* is geslote onder vermenigvuldiging: laat $e_1+p_1^*$ en $e_2+p_2^* \in S^*$, waar $e_1, e_2 \in G^*$ en $p_1^*, p_2^* \in P$. Dan is

$$\begin{aligned}(e_1+p_1^*)(e_2+p_2{}^*) &= e_1 e_2 + e_1 p_2^* + p_1^* e_2 + p_1^* p_2^* \\ &= e_3 + p_3^*, \text{ sê waar } e_3 \in G^* \text{ en } p_3 \in P.\end{aligned}$$

$P \neq R$, want $x \notin P$. Laat $a \in S = C_R(P)$. Dan is $(a) \cap S^* \neq \phi$:

$((a)+P) \cap G \neq \phi$, want P is 'n maksimale element in I'. Laat $g \in ((a)+P) \cap G$ en sê $g = a_1+p_1$, waar $a_1 \in (a)$ en $p_1 \in P$.

G is 'n sup-stelsel en daarom bestaan daar 'n element, sê $g^* \in (g)$ sodanig dat $g^*G \subseteq G$. Dus is $g^* \in G^*$.

Elke element van die hoofideaal $(g) = (a_1+p_1)$ is van die vorm: $a'+p'$, waar $a' \in (a)$ en $p' \in P$:

$$(a_1+p_1) = \{n(a_1+p_1) + s(a_1+p_1) + (a_1+p_1)t + \sum_{i=1}^{v} s_i(a_1+p_1)t_i \mid n \in Z,\ v \in \mathbb{N} \text{ en } s, t, s_i, t_i \in R \text{ vir } i = 1,2, \ldots, v\}.$$

Dus is
$$(a_1+p_1) = \{na_1+sa_1+a_1 t + \sum_{i=1}^{v} s_i a t_i + np_1+sp_1+p_1 t + \sum_{i=1}^{v} s_i p_1 t_i \mid n \in Z,\ v \in \mathbb{N} \text{ en } s, t, s_i, t_i \in R \text{ vir } i = 1,2, \ldots, v\}.$$

Laat dus $g^* = a_2 + p_2$, sê, waar $a_2 \in (a)$ en $p_2 \in P$.

Dan is $a_2 = g^* - p_2 \in S^*$, sodat $(a) \cap S^* \neq \phi$.

P is dus 'n s-priemideaal sodat $x \notin P$ impliseer dat $x \notin N(R) = \sigma(R)$.

Stelling 30 [15]

$\sigma(R) = D$, waar $D = \{x \in R \mid$ as $x \in G$ waar (G,I) 'n superstelsel vir 'n ideaal I in R is, dan is $0 \in G\}$.

Bewys

$D \subseteq \sigma(R)$: laat $x \in D$ en gestel I is 'n regs-superpriemideaal in R. Dan is $(C_R(I),I)$ 'n superstelsel en $x \in I$, want gestel $x \in C_R(I)$. Dan is $0 \in C_R(I)$, strydig met $0 \in I$. Dus is $x \in \cap\ \{I' \lhd R \mid I'$ is 'n regs-superpriemideaal$\}$, met ander woorde $x \in \sigma(R)$.

$\sigma(R) \subseteq D$: as $D = R$, dan is $\sigma(R) \subseteq D$.

Laat $x \in C_R(D)$ waar $D \neq R$. Dan is $x \in G$, sê, waar (G,I) 'n superstelsel vir 'n ideaal I in R is, en $0 \notin G$.

Laat $I' = \{J \lhd R \mid I \subseteq J$ en $G \cap J = \phi\}$.

Volgens Zorn se lemma bevat I' 'n maksimale element: $I' \neq \phi$, want $I \subseteq I$ en $G \cap I = \phi$ sodat $I \in I'$.

Laat V die vereniging van 'n ketting, sê K, in I' wees. $V \in I'$: $I \subseteq V$, want vir elke $J \in K$, geld dat $I \subseteq J$. $G \cap V = \phi$, want gestel $w \in G \cap V$. Dan is $w \in J'$, sê, waar $J' \in K$. Dus is $w \in G \cap J'$ 'n teenstrydigheid.

Laat P 'n maksimale element in I' wees.

$x \notin P$, want $x \in G$ en $G \cap P = \phi$. Ons gebruik stelling 7 om te bewys dat P 'n regs-superpriemideaal in R is:

Laat $a \in C_R(P)$. Dan is $G \cap (P + (a)) \neq \phi$, want P is maksimaal met betrekking tot $G \cap P = \phi$. Laat $g \in G \cap (P+(a))$, en sê $g = p_1 + e_1$, waar $p_1 \in P$ en $e_1 \in (a)$.

Soos aangetoon is elke element van die hoofideaal $(g) = (p_1+e_1)$ van die vorm $p + e$, waar $p \in P$ en $e \in (a)$.

Omdat $(\mathcal{G},I)$ 'n superstelsel is, bestaan daar 'n element, sê $c \in (g)$, sodanig dat $cz \in \mathcal{G}$ vir elke $z \in C_{\mathrm{R}}(I)$. Laat $c = p + e$ waar $p \in P$ en $e \in (a)$. Vir die element $e \in (a)$, geld dat as $ez \in P$, $z \in \mathcal{R}$, dan is $z \in P$: laat $z \in \mathcal{R}$ sodanig dat $ez \in P$ en gestel $z \in C_{\mathrm{R}}(P)$. Dan is $z \in C_{\mathrm{R}}(I)$, want $I \subseteq P$. Dus is $cz \in \mathcal{G}$, omdat $(\mathcal{G},I)$ 'n superstelsel is. $cz = pz + ez \in P$, want $p \in P$ en $ez \in P$. Dus is $cz \in P \cap \mathcal{G}$, strydig met $P \cap \mathcal{G} = \phi$ en gevolglik is $z \in P$.
P is dus 'n regs-superpriemideaal in $\mathcal{R}$ wat nie vir x bevat nie sodat $x \notin \sigma(\mathcal{R})$.

Opmerking 11 [14]
$\sigma(\mathcal{R})$ besit die volgende eienskap: laat $a \in \mathcal{R}$ sodanig dat daar vir elke $c \in (a)$ 'n positiewe heelgetal k bestaan waarvoor geld dat $c^k a \in \sigma(\mathcal{R})$. Dan is $a \in \sigma(\mathcal{R})$: laat $\sigma(\mathcal{R}) \neq \mathcal{R}$ en $a \in C_{\mathrm{R}}(\sigma(\mathcal{R}))$. Dan bestaan daar 'n regs-superpriemideaal, sê I, in $\mathcal{R}$ sodanig dat $a \notin I$.
$(C_{\mathrm{R}}(I),I)$ is 'n superstelsel, omdat I 'n regs-superpriemideaal in $\mathcal{R}$ is. Dus bestaan daar 'n element, sê $c \in (a)$, sodanig dat as $z \in C_{\mathrm{R}}(I)$, dan is $cz \in C_{\mathrm{R}}(I)$. Dus is $ca \in C_{\mathrm{R}}(I)$, want $a \in C_{\mathrm{R}}(I)$. So ook is $c^2a = c(ca) \in C_{\mathrm{R}}(I)$, want $ca \in C_{\mathrm{R}}(I)$. Deur telkens opeenvolgende magte van c met a te vermenigvuldig, volg dat die produk $c^k a \notin I$ vir elke positiewe heelgetal k. Dus geld vir elke positiewe heelgetal k dat $c^k a \in C_{\mathrm{R}}(\sigma(\mathcal{R}))$.

Ons definieer 'n s-nilpotente element as volg: $a \in \mathcal{R}$ heet s-nilpotent as daar vir elke $c \in (a)$ 'n positiewe heelgetal k bestaan sodanig dat $c^k a = 0$. Dit is duidelik dat $\sigma(\mathcal{R})$ al die s-nilpotente elemente van $\mathcal{R}$ bevat.
Elke s-nilpotente element is nilpotent: gestel a is s-nilpotent. Dan

bestaan daar 'n positiewe heelgetal, sê k, sodanig dat $a^k a = 0$, dit is $a^{k+1} = 0$. $\sigma(R)$ bestaan dus nie slegs uit s-nilpotente elemente nie, want $N(R) \subset \sigma(R)$.

6.3 Karakterisering van die regs-sterkpriemradikaal

Stelling 31 [15]

$s(R) = E$, waar $E = \{x \in R \mid$ as $x \in G$, waar (G,P) 'n sp-stelsel vir 'n $P \vartriangleleft R$ is, dan is $0 \in G\}$.

Bewys

$s(R) \subseteq E$: laat $x \in s(R)$ en $x \in G$, waar (G,P) 'n sp-stelsel vir 'n $P \vartriangleleft R$ is. Stel $M = \{I \vartriangleleft R \mid P \subseteq I$ en $G \cap I = \phi\}$. Laat $0 \notin G$ sodat $x \notin E$. Volgens Zorn se lemma bevat M 'n maksimale element:
$M \neq \phi$, want $P \in M$: $P \subseteq P$ en $G \cap P = \phi$.
Laat T die vereniging van 'n ketting, sê C, in M wees. Dan is $T \in M$:
$P \subseteq T$, want vir elke $K \in C$ geld dat $P \subseteq K$. $G \cap T = \phi$, want gestel $\bar{x} \in G \cap T$. Dan is $\bar{x} \in T$ sodat $\bar{x} \in L$ vir 'n $L \in C$. Dus is $\bar{x} \in G \cap L$, 'n teenstrydigheid. Laat Q 'n maksimale element in M wees.
Ons toon nou aan dat Q volgens stelling 16 'n regs-sterkpriemideaal in R is: $Q \neq R$, want $x \notin Q$. Laat $a \in C_R(Q)$. Dan is $a \in C_R(P)$, want $P \subseteq Q$. $(Q + (a)) \cap G \neq \phi$, want Q is 'n maksimale element in M. Laat $g \in (Q + (a)) \cap G$. Uit die definisie van 'n sp-stelsel, bestaan daar 'n eindige deelversameling, sê $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subseteq (g)$ sodanig dat $Fz \cap G \neq \phi$ vir elke $z \in C_R(P)$. Gestel $f_i = q_i + a_i$ waar $q_i \in Q$ en $a_i \in (a)$ vir $i = 1, 2, \ldots, n$.

Stel $F' = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ en laat $F'z \subseteq Q$ vir 'n $z \in R$. $z \in Q$: gestel $z \notin Q$. Dan is $z \notin P$, want $P \subseteq Q$ en dus geld vir F dat $G \cap Fz \neq \phi$. Laat $v \in G \cap Fz$. Dan is $v \in G$ en $v \in Fz$. $Fz \subseteq Q$: Elke element van Fz is van

die vorm $f_i z = q_i z + a_i z$ ($q_i z \in Q$, $a_i z \in F' z \subseteq Q$; $i = 1,2, \ldots, n$). Dus is $v \in Q$ en gevolglik is $v \in G \cap Q$; strydig met $G \cap Q = \phi$.
Vir $F' \subseteq (a)$ geld dat as $F' z \subseteq Q$, $z \in R$, dan is $z \in Q$ sodat Q 'n regs-sterkpriemideaal in R is.
Omdat $x \in G$, is $x \notin Q$, want $G \cap Q = \phi$. Dit is egter 'n teenstrydigheid, omdat $x \in s(R)$ en Q 'n regs-sterkpriemideaal in R is. Gevolglik is $0 \in G$ sodat $x \in E$.

$E \subseteq s(R)$:
Laat $x \in E$ en gestel I is 'n regs-sterkpriemideaal in R. Dan is $(C_R(I), I)$ 'n *sp*-stelsel. As $x \in C_R(I)$, dan is $0 \in C_R(I)$, strydig met $0 \in I$. Dus is $x \in I$ sodat $x \in s(R)$.
Nou volg dat $s(R) = E$.

Opmerking 12

Ten einde die regs-sterkpriemideaal te karakteriseer, word die volgende klasse deur Parmenter, Stewart en Wiegandt in [9] gegee:
$T_0 = \{A \mid ann_A(F) \neq 0$ vir elke eindige deelversameling $F \subseteq A\}$.
Vir $k = 1,2, \ldots$ is $T_k = \{A \mid ann_A(x_1 \ldots x_k F) \neq 0$ vir elke $x_1, \ldots, x_k \in A$ en elke eindige deelversameling $F \subseteq A\}$.
$T_f = \{A \mid$ vir elke eindige deelversameling $G \subseteq A$ bestaan daar 'n heelgetal $k = k(G) \geq 1$ sodanig dat $ann_A(x_1 \ldots x_k F) \neq 0$ vir elke $x_1, \ldots, x_k \in G$ en elke deelversameling $F \subseteq A\}$.

Volgens [9], stelling 1, is $s = H(T_0) = H(T_k) = H(T_f)$ vir elke $k = 1,2, \ldots$. Ons werk nou deur die bewys van stelling 1 soos gegee in [9] en wys dan daarop dat die riglyne vir die bewys van $s \subseteq T_0$ gegee in [9], nie tot die voltooiing van die bewys van stelling 1 lei nie.

Eerstens is $0 \notin T_0$ sodat $s \subsetneq T_0$ onmoontlik is. Laat daarom

$T_0 = \{A \mid ann_A(F) \neq 0$ vir elke eindige deelversameling $F \subsetneq A\} \cup \{0\}$.

Bewys

Laat A 'n ring wees, $A \notin T_0$ en stel $L = \{I \triangleleft A \mid I \in T_0\}$.

Volgens Zorn se lemma bevat L 'n maksimale element: $L \neq \phi$, want $(0) \in L$.

Laat Q die vereniging van 'n ketting, sê K, in L wees. Dan is $Q \in T_0$: gestel F is 'n eindige deelversameling van Q. Dan is $F \subsetneq K_i$, sê, waar $K_i \in K$. Laat $0 \neq z \in ann_{K_i}(F)$. Dan is $0 \neq z \in ann_Q(F)$.

Laat M 'n maksimale element in L wees. Ons wil nou aantoon dat A/M regs-sterkpriem is sodat $A \notin s$.

Laat $0 \neq J/M \triangleleft A/M$. Dan is $M \subset J$ en omdat M 'n maksimale element in L is, volg dat $J \notin T_0$. J bevat dus 'n eindige versameling, sê $F = \{j_1, \ldots, j_n\}$ sodanig dat $ann_J(F) = 0$.

Stel $F' = \{j_1+M, \ldots, j_n+M\}$. $F' \subsetneq J/M$ en $ann_{J/M}(F') = 0$: gestel $ann_{J/M}(F') \neq 0$. Laat $0 \neq r + M \in ann_{J/M}(F')$. Dan is $r \notin M$ en $M \subset (r) + M$ sodat $(r) + M \notin L$ en dus is $(r) + M \notin T_0$. Daar bestaan dus 'n eindige deelversameling, sê $G \subsetneq (r) + M$ sodanig dat as $Gz = 0$, $z \in (r) + M$, dan is $z = 0$. Ons bewys nou dat G van die volgende vorm is: $\{m_1, m_2, \ldots, m_t, r, ra_1, ra_2, \ldots, ra_s\}$ waar $m_i \in M$ vir $i = 1,2, \ldots, t$ en $a_j \in A$ vir $j = 1,2, .., s$.

Laat $p \in G$ en sê $p = n_p r + s_p r + r\bar{a}_p + \Sigma s_{pi} r\bar{a}_{pi} + m_p$

$$(s_p,\ \bar{a}_p,\ s_{pi},\ \bar{a}_{pi} \in J,\ m_p \in M \text{ en } n_p \in \mathbb{Z}).$$

Kies $G' = \bigcup_{i,p} \{m_p, r, r\bar{a}_p, r\bar{a}_{pi}\}$. As $G'z = 0$, $z \in (r) + M$, dan is $z = 0$: laat $G'z = 0$ vir 'n $z \in (r) + M$. Dan is $pz = (n_p r + s_p r + r\bar{a}_p + \Sigma s_{pi} r\bar{a}_{pi} + m_p)z = 0$, omdat $G'z = 0$. Dus is $Gz = 0$ sodat $z = 0$.

Laat nou $G = \{m_1, m_2, \ldots, m_t, r, ra_1, ra_2, \ldots, ra_s\}$ waar $m_i \in M$ vir $i = 1,2, \ldots, t$ en $a_j \in A$ vir $j = 1,2, \ldots, s$.

Stel $N = \{m_i \mid i = 1,2, \ldots, t\} \cup \{j_i r \mid i = 1,2, \ldots, n\}$

$\cup \{j_i r a_k \mid i = 1,2, \ldots, n \text{ en } k = 1,2, \ldots, s\}$.

N is 'n eindige deelversameling van M: omdat $r + M \in ann_{J/M}(F')$ volg dat $(j_i+M)(r+M) = 0$ vir $i = 1,2, \ldots, n$ sodat $j_i r \in M$ vir $i = 1,2, \ldots, n$. As ons $0 \neq x \in ann_M(N)$ kies, dan lei die keuse van x soos in die bewys van stelling 20 tot 'n teenstrydigheid sodat $ann_{J/M}(F') = 0$ en A/M gevolglik regs-sterkpriem is. Ons kan egter nie bewys dat $M \neq 0$ is nie sodat ons nie $0 \neq x \in ann_M(N)$ kan kies om die bewys te voltooi nie.

Stelling 32 [4]

$[s(R)]_n = s(R_n)$.

Bewys

Laat $M = \{R \mid R$ is 'n regs-sterkpriemring$\}$. Soos bewys in stelling 25 is M 'n spesiale klas van ringe. As R 'n identiteitselement het, dan is $R \in M$ as en slegs as $R_n \in M$ (stelling 13).

Dus word voorwaarde I in opmerking 2 bevredig sodat $[s(R)]_n = s(R_n)$ volgens stelling 2.

Gestel R het nie 'n identiteitselement nie. Dan kan R volgens [7], §2 ingebed word in 'n ring, sê A, met 'n identiteitselement. R is 'n ideaal in A en s is erflik. Dus is $s(R) = R \cap s(A)$. ([2], stelling 48).

A bevat 'n identiteitselement en dus is $s(A_n) = [s(A)]_n$. R_n is 'n ideaal in A_n en dus is $s(R_n) = R_n \cap s(A_n)$. $R_n \cap [s(A)]_n = [R \cap s(A)]_n$:

$R_n \cap [s(A)]_n \subseteq [R \cap s(A)]_n$: laat $(r_{ij}) \in R_n$ en $(r_{ij}) \in [s(A)]_n$.

Dan is $r_{ij} \in R$ en $r_{ij} \in s(A)$ vir $i = 1,2, \ldots, n$ en $j = 1,2, \ldots, n$ sodat $r_{ij} \in R \cap s(A)$. Dus is $(r_{ij}) \in [R \cap s(A)]_n$.

$[R \cap s(A)]_n \subseteq R_n \cap [s(A)]_n$: laat $(r_{ij}) \in [R \cap s(A)]_n$. Dan is $r_{ij} \in R$ en $r_{ij} \in s(A)$ vir $i, = 1,2, \ldots, n$ en $j = 1,2, \ldots, n$ sodat $(r_{ij}) \in R_n$ en $(r_{ij}) \in [s(A)]_n$. Dus is $(r_{ij}) \in R_n \cap [s(A)]_n$.

Nou volg dat $s(R_n) = R_n \cap s(A_n) = R_n \cap [s(A)]_n = [R \cap s(A)]_n = [s(R)]_n$.

Stelling 33 [9]

Laat A 'n regs-sterkpriemring wees. As F 'n isolator vir $a \in A$ is, dan is $ann_A(F^m a F^n) = 0$ vir elke heelgetal $m \geq 0$ en $n \geq 1$.

Bewys

Gestel A is 'n regs-sterkpriemring. Laat $0 \neq a \in A$ en gestel F is 'n isolator vir a. Laat $b \in A$ sodanig dat $aF^n b = 0$ vir 'n positiewe heelgetal n. Dit is, $aFF^{n-1}b = 0$. Dan is $F^{n-1}b = 0$, want $ann_A(aF) = 0$. Dus is $aF^{n-1}b = 0$.

Uit $aF^{n-1}\,b = aFF^{n-2}\,b = 0$, volg dat $F^{n-2}\,b = 0$, want $ann_A(aF) = 0$. Dus is $aF^{n-2}b = 0$.

Soortgelyk volg dat

$$\begin{aligned} aF^{n-3}\,b &= 0, \\ aF^{n-4}\,b &= 0 \\ &\vdots \\ aF\,b &= 0. \end{aligned}$$

$b = 0$, want $ann_A(aF) = 0$ sodat $ann_A(aF^n) = 0$.

Laat $c \in A$, $m \geq 1$ en $n \geq 1$ sodanig dat $F^m a F^n c = 0$. Dan is $aF^m a F^n c = 0$ en dus is $aF^n c = 0$, want $ann_A(aF^m) = 0$. Uit $aF^n c = 0$, volg dat $c = 0$, want $ann_A(aF^n) = 0$.

Definisie 13 [9]

'n Ring A is 'n lokaal-nilpotente uitbreiding van 'n deelring R as daar vir elke eindig-voortgebringde deelring F van A 'n heelgetal $k = k(F) \geq 1$ bestaan sodanig dat $F^k \subseteq R$.

Stelling 34 [9]

As A 'n lokaal-nilpotente uitbreiding van R is, dan is $s(R) = R \cap s(A)$.

Bewys

Gestel A is 'n lokaal-nilpotente uitbreiding van R en laat $S \triangleleft A$ sodanig dat $\bar{A} = A/S$ regs-sterkpriem is.

Laat $\bar{R} = (R+S)/S$. $\bar{R} = (R+S)/S$ is regs-sterkpriem: laat $S \neq r + S \in \bar{R}$. Daar bestaan 'n isolator, sê $\bar{F} \subseteq \bar{A}$ vir $r + S$, omdat $\bar{A}$ 'n regs-sterkpriemring is. Laat $\bar{F} = \{f_1+S, f_2+S, \ldots, f_y+S\}$ en stel $F' = \{f_1, f_2, \ldots, f_y\}$. $\langle f_1, f_2, \ldots, f_y\rangle$ is 'n eindig-voortgebringde deelring van A en A is 'n lokaal-nilpotente uitbreiding van R. Daar bestaan gevolglik 'n positiewe heelgetal, sê $\bar{n}$, sodanig dat $\langle f_1, f_2, \ldots, f_y\rangle^{\bar{n}} \subseteq R$. Dus is $(F')^{\bar{n}} \subseteq R$. Gevolglik is $(\bar{F})^{\bar{n}} \subseteq (R + S)/S = \bar{R}$. Volgens stelling 33 is $ann_{\bar{A}}((r+S)\bar{F}^{\bar{n}}) = 0$ en dus is $\bar{F}^{\bar{n}}$ 'n isolator vir $r + S$, sodat $\bar{R} \cong R/(R \cap S)$ regs-sterkpriem is.

$s(R) \subseteq R \cap S$: laat $u \in s(R)$. Dan is $u \in I$ vir elke $I \triangleleft R$ waar R/I regs-sterkpriem is. Dus is $u \in R \cap S$, want $R/(R \cap S)$ is regs-sterkpriem. Dit geld dan nou dat $s(R) \subseteq R \cap S$ vir elke $S \triangleleft A$ sodanig dat A/S regs-sterkpriem is.

$s(R) \subseteq s(A)$: laat $v \in s(R)$. Dan is $v \in R \cap S$ vir elke $S \triangleleft A$ waar A/S regs-sterkpriem is. Dus is $v \in S$ vir elke $S \triangleleft A$ waar A/S regs-sterkpriem is sodat $v \in s(A)$. Uit $s(R) \subseteq R$ en $s(R) \subseteq s(A)$, volg dat $s(R) \subseteq R \cap s(A)$.

Laat nou $P \triangleleft R$ sodanig dat $R' = R/P$ regs-sterkpriem is.

Stel $I^* = \{I \triangleleft A | I \cap R \subseteq P\}$. Volgens Zorn se lemma bevat I^* 'n maksimale element: $I^* \neq \emptyset$, want $(0) \in I^*$.

Laat V die vereniging van 'n ketting, sê C in I^* vees. Dan is $V \in I^*$: gestel die teendeel, naamlik dat $V \cap R \not\subseteq P$ en laat $x' \in V \cap R$, $x' \notin P$. Dan is $x' \in I'$ sê, waar $I' \in C$. Dus is $x' \in I' \cap R$ waar $x' \notin P$, strydig met $I' \cap R \subseteq$ P.

Laat Q 'n maksimale element in I^* wees en $I \triangleleft A$ sodanig dat $Q \subset I$. Dan is $I \cap R \nsubseteq P$. Laat nou $x \in I \cap R$, $x \notin P$. P is 'n regs-sterkpriemideaal in R en dus bestaan daar volgens stelling 16 'n eindige deelversameling, sê $F \subseteq (x)_R$ sodanig dat as $Fr \subseteq P$, $r \in R$, dan is $r \in P$.

Laat $K = \{b \in A \mid Fb \subseteq Q\}$. K is 'n regterideaal in A: laat $k_1, k_2 \in K$. Dan is $Fk_1 \subseteq Q$ en $Fk_2 \subseteq Q$. Q is 'n ideaal en is dus geslote onder aftrekking. Dus geld vir elke $f \in F$ dat $fk_1 - fk_2 = f(k_1 - k_2) \in Q$. Dus is $F(k_1 - k_2) \subseteq Q$ sodat $k_1 - k_2 \in K$.

Laat $a \in A$. $Fk_1 a \subseteq Q$, want $Fk_1 \subseteq Q$. Dus is $k_1 a \in K$.

Beskou die ideaal $AK + K$ wat voortgebring word deur K in A. Gestel G is 'n deelversameling van $AK + K$ van die vorm:

$G = \{a_i k_i \mid i = 1,2, \ldots, s\} \cup \{k_j' \mid j = 1,2, \ldots, t\}$ waar $a_i \in A$, $k_i \in K$ en $k_j' \in K$ vir elke $i = 1,2, \ldots, s$ en $j = 1,2, \ldots, t$.

$G^{2n} \subseteq P$ vir 'n positiewe heelgetal n: laat H die deelring van A wees wat voortgebring word deur

$\{a_i \mid i = 1,2, \ldots, s\} \cup \{k_i \mid i = 1, 2, \ldots, s\} \cup \{k_j' \mid j = 1,2, \ldots, t\}$.

Daar bestaan 'n positiewe heelgetal, sê n, sodanig dat $H^n \subseteq R$, want A is 'n lokaal-nilpotente uitbreiding van R.

$F(K \cap R) \subseteq Q \cap R$: Laat $\bar{x} \in F(K \cap R)$. Dan is $\bar{x} = \sum_{c=1}^{\bar{c}} f_c y_c$, waar $f_c \in F$; $y_c \in K$ en $y_c \in R$ vir $c = 1,2, \ldots, \bar{c}$. Vir $c = 1,2, \ldots, \bar{c}$, is $f_c y_c \in Q$, omdat $y_c \in K$ en dus is $Fy_c \subseteq Q$.

Vir $c = 1,2, \ldots, \bar{c}$, is $f_c y_c \in R$, omdat $f_c \in R$ en $y_c \in R$. Dus is $\bar{x} \in Q$ en $\bar{x} \in R$ en daarom volg dat $F(K \cap R) \subseteq Q \cap R \subseteq P$.

Vir die eindige deelversameling F, geld dat as $Fr \subseteq P$, $r \in R$, dan is $r \in P$. Uit $F(K \cap R) \subseteq P$, volg dus dat $K \cap R \subseteq P$.

Elke monoom $m \in G^{2n}$, kan gefaktoriseer word as $m = m_1 m_2$, waar $m_1 \in H^n$ en $m_2 \in \mathbf{K} \cap H^n$: 'n monoom, sê $m \in G^{2n}$, is van die vorm: $m = \bar{m}_1 \bar{m}_2 \ldots \bar{m}_{2n}$, waar $\bar{m}_s \in G$; $s = 1,2, \ldots, 2n$. $\bar{m}_{n+1}$ is òf van die vorm $\bar{m}_{n+1} = k_j'$ vir 'n $j \in \{1,2, \ldots, t\}$ òf $\bar{m}_{n+1} = a_i k_i$ vir 'n $i \in \{1,2, \ldots, s\}$.

Gestel eerstens dat $\bar{m}_{n+1} = k_j'$ vir 'n $j \in \{1,2, \ldots, t\}$. Dan kan ons sê dat $m = m_1 m_2$, waar $m_1 = \bar{m}_1 \bar{m}_2 \ldots \bar{m}_n$ en $m_2 = \bar{m}_{n+1} \ldots \bar{m}_{2n}$.

Nou is $m_1 \in H^n$, want $\bar{m}_s \in H$ vir $s = 1, 2, \ldots, n$ en $m_2 \in H^n \cap \mathbf{K}$:

$m_2 \in H^n$, omdat $\bar{m}_s \in H$ vir $s = n + 1, \ldots, 2n$. $m_2 \in \mathbf{K}$, want $m_2 = k_j' \bar{m}_{n+2} \ldots \bar{m}_{2n}$ en $\mathbf{K}$ is 'n regterideaal.

Gestel andersins dat $\bar{m}_{n+1} = a_i k_i$ vir 'n $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Dan kan ons sê dat $m = m_1 m_2$, waar $m_1 = \bar{m}_1 \ldots \bar{m}_n a_i$ en $m_2 = k_j \bar{m}_{n+2} \ldots \bar{m}_{2n}$. Dus geld weer eens dat $m_1 \in H^n$ en $m_2 \in \mathbf{K} \cap H^n$.

$H^n (\mathbf{K} \cap H^n) \subsetneq \mathbf{R}(\mathbf{K} \cap \mathbf{R})$: laat $y \in H^n(\mathbf{K} \cap H^n)$. Dan is y van die vorm

$y = \sum_{\bar{d}=1}^{d'} y_{\bar{d}} y_{\bar{d}}'$ ($y_{\bar{d}} \in H^n \subsetneq \mathbf{R}$; $y_{\bar{d}}' \in \mathbf{K}$ en $y_{\bar{d}}' \in H^n \subsetneq \mathbf{R}$ vir
$\bar{d} = 1, 2, \ldots, d'$). Dus is $y \in \mathbf{R}(\mathbf{K} \cap \mathbf{R})$.

$\mathbf{R}(\mathbf{K} \cap \mathbf{R}) \subsetneq P$, want $\mathbf{K} \cap \mathbf{R} \subsetneq P$. Dus is $m \in H^n(\mathbf{K} \cap H^n) \subsetneq \mathbf{R}(\mathbf{K} \cap \mathbf{R}) \subsetneq P$ sodat $G^{2n} \subsetneq P$.

Elke eindig-voortgebringde deelring van $A\mathbf{K} + \mathbf{K}$ is bevat in 'n deelring wat voortgebring word deur 'n versameling met dieselfde vorm as G: laat L 'n eindig-voortgebringde deelring van $A\mathbf{K} + \mathbf{K}$ wees en gestel die voortbringers van L is:

$$l_1 = \sum_{d=1}^{n_1} a_{d1} k_{d1} + k_1'$$

$$l_2 = \sum_{d=1}^{n_2} a_{d2} k_{d2} + k_2'$$

$$\vdots$$

$$l_t = \sum_{d=1}^{n_e} a_{d\bar{t}} k_{d\bar{t}} + k_{\bar{t}}'$$

Laat $G' = \{a_{d1}\, k_{d1} \mid d = 1, 2, \ldots, n_1\} \cup \{a_{d2}\, k_{d2} \mid d = 1,2, \ldots, n_2\}$
$\cup \ldots \cup \{a_{d\bar{t}}\, k_{d\bar{t}} \mid d = 1,2, \ldots, n_e\} \cup \{k'_j \mid j = 1,2, \ldots, \bar{t}\}$. Dan is $L \subseteq \langle G' \rangle$, die deelring voortgebring deur G', en G' is van dieselfde vorm as G.

$(((AK+K) \cap R) + P)/P$ is lokaal-nilpotent:

laat D 'n eindig-voortgebringde deelring van $(((AK+K) \cap R) + P)/P$ wees en sê $D = \langle a'_1 + p'_1 + P,\ a'_2 + p'_2 + P,\ \ldots,\ a'_{\bar{u}} + p'_{\bar{u}} + P \rangle$;

$a'_i \in (AK+K) \cap R$ en $p'_i \in P$ vir $i = 1,2, \ldots, \bar{u}$.

$\langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_{\bar{u}} \rangle$ is 'n eindig-voortgebringde deelring van $AK + K$ en is, soos bewys, bevat in 'n deelring, sê $\langle \bar{G} \rangle$ waar $\bar{G}$ dieselfde vorm as G het. $\bar{G}^{2n} \subseteq P$, want $G^{2n} \subseteq P$ en $\bar{G}$ het dieselfde vorm as G. Dus is $\langle \bar{G} \rangle^{2n} \subseteq P$, sodat $\langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_{\bar{u}} \rangle^{2n} \subseteq \langle \bar{G} \rangle^{2n} \subseteq P$.

$D^{2n} = 0$:

Laat $d^* + P \in D^{2n}$ en sê

$$d^* + P = \sum_{j^*=1}^{k^*} (d^*_{j^*1} + P)(d^*_{j^*2} + P) \ldots (d^*_{j^*2n} + P) \text{ waar } d^*_{j^*e^*} \in D$$

$$= \sum_{j^*=1}^{k^*} (d^*_{j^*1}\, d^*_{j^*2} \ldots d^*_{j^*2n}) + P.$$

Vir $e^* = 1,2, \ldots, 2n$ is $d^*_{j^*e^*} + P$ van die vorm

$$d^*_{j^*e^*} + P = \sum_{j=1}^{c^*} (a'_{j_1} + p'_{j_1} + P)(a'_{j_2} + p'_{j_2} + P) \ldots (a'_{j_{r^*(j)}} + p'_{j_{r^*(j)}} + P);$$

$(a'_{j_{s^*}} + p'_{j_{s^*}} \in ((AK + K) \cap R) + P,\ r^*(j)$ en $c^* \in \mathbb{N})$.

Dus is $d^* + P$ van die vorm $a^* + p^* + P$,

waar $a^* \in \langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_{\bar{u}} \rangle^{2n} \subseteq P$ en $p^* \in P$.

Gevolglik is $d^* + P = P$.

$L(R/P) \subseteq s(R/P) = 0$, want R/P is regs-sterkpriem. Dus is $(((AK+K) \cap R) + P)/P = 0$, want $(((AK+K) \cap R) + P)/P$ is lokaal-nilpotent. Gevolglik is $(AK+K) \cap R \subseteq P$.

$K \subseteq Q$: vir elke $q = Q$ geld dat $Fq \subseteq Q$. Dus is $Q \subseteq K \subseteq AK + K$. Q is egter 'n maksimale element in I^* en omdat $(AK+K) \cap R \subseteq P$ en $Q \subseteq AK + K$, volg dat $Q = AK + K$. Dus is $K \subseteq Q$. Nou volg dat $K = Q$, want $Q \subseteq K$.

A/Q is regs-sterkpriem: laat $0 \neq J'/Q \triangleleft A/Q$. Omdat $Q \subset J'$, volg dat $J' \notin I^*$ sodat $J' \cap R \nsubseteq P$. Laat $\bar{e} \in J' \cap R$, $\bar{e} \notin P$. P is 'n regs-sterkpriemideaal in R en dus bestaan daar volgens stelling 16 'n eindige deelversameling, sê $E \subseteq (\bar{e})_R$ sodanig dat as $Er \subseteq P$, $r \in R$, dan is $r \in P$. Laat $E' = \{e + Q \mid e \in E\}$. Dan is $E' \subseteq J'/Q$.

Laat $z + Q \in A/Q$ sodanig dat $E'(z+Q) = 0$ Dan is $E'z \subseteq Q$. Laat $K' = \{b \in A \mid E'b \subseteq Q\}$. Dan is $z \in K'$. Dus is $z \in Q$, want $K' \subseteq Q$, soos bewys vir K. Volgens stelling 10 is A/Q regs-sterkpriem.

Nou volg dat $s(A) \subseteq Q$, omdat A/Q regs-sterkpriem is.

$s(A) \cap R \subseteq P$, want $s(A) \subseteq Q$ en Q is maksimaal met betrekking tot die eienskap dat $Q \cap R \subseteq P$. Vir elke $P \triangleleft R$ waar R/P regs-sterkpriem is, geld dus dat $s(A) \cap R \subseteq P$. Dus is $s(A) \cap R \subseteq s(R)$.

---oOo---

BIBLIOGRAFIE

[1] V.A. Andrunakievic, *Radicals of associative rings* I, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 52(2) (1966), 95-128.

[2] N.J. Divinsky, *Rings and Radicals*, Allen and Unwin, London, 1965.

[3] M. Gray, *A radical approach to algebra*, Addison-Wesley, London, 1970.

[4] N.J. Groenewald and G.A.P. Heyman, *Certain classes of ideals in group rings II*, Comm. Alg. 9(2) (1981), 137-148.

[5] D. Handelman and J. Lawrence, *Strongly prime rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 211 (1975), 209-223.

[6] G.A.P. Heyman and C. Roos, *Essential extensions in radical theory for rings*, J. Austral. Math. Soc. 23 (Series A) (1977), 340-347.

[7] N.H. McCoy, *The theory of rings*, Macmillan, New York, 1966.

[8] M.M. Parmenter, D.S. Passman and P.N. Stewart, *The strongly prime radical of crossed products*, Comm. Alg. 12(9) (1984), 1099-1113.

[9] M.M. Parmenter, P.N. Stewart and R. Wiegandt, *On the Groenewald-Heyman strongly prime radical*, Quaest. Math. 7 (1984), 225-239.

[10] E.R. Puczylowski, *Behavior of radical properties of rings under algebraic constructions*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 38 (1985), 449-480.

[11] F.A. Szasz, *Radicals of rings*, John Wiley and sons, Chichester, 1981.

[12] A.P.J. van der Walt, *Prime ideals and nil radicals in near-rings*, Arch. Math. 15 (1964), 408-414.

[13] A.P.J. van der Walt, *Prime rings - the strong and the not-so-strong*, Technical Report, 1, Dept. Math. University of Stellenbosch.

[14] S. Veldsman, *The elements in the strongly prime radical of a ring*, Math. Japonica, 31(2) (1986), 283-285.

[15] S. Veldsman, *The superprime radical*, Contributions to general algebra 4, Radicals - Theory and Applications, Verlag Hölder - Pichler - Tempsky, Wien, (1987), 181-188.

---o0o---

NOTASIE

$I \triangleleft R$	I is 'n ideaal in R.
(a)	Hoofideaal in R, voortgebring deur $a \in R$.
$(a)_I$	Hoofideaal in I, voortgebring deur a $\in I$.
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	Ideaal voortgebring deur $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$	Ring voortgebring deur $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
$ann_R(S)$	Regter-annuleerder van S in die ring R, waar S 'n deelversameling van R is.
$C_R(I)$	Komplement van I in R, waar I 'n deelversameling van R is.
$\dot{\pi}\, R_i$	Subdirekte som van 'n familie van ringe $\{R_i\}_{i \in I}$.
$0 \neq a \in R$	$a \neq 0$, $a \in R$.
$e_{11}a$	Die matriks (a_{ij}) met $a_{11} = a$ en elke ander posisie gelyk aan nul.
R_n	Ring van $n \times n$ matrikse oor R.
$\cong$	Isomorf aan.

---o0o---