

## DIFFERENCIÁLEGYENLETEK KVALITATÍV ELMÉLETE ALKALMAZÁSOKKAL

MAT: 75517 kutatás zárójelentése

A pályázat célja másodrendű közönséges differenciálegyenletek és funkcionál-differenciálegyenletek vizsgálata volt. Ezek az egyenletek gyakran modelleznek fizikai, kémiai, biológiai, közgazdasági jelenségeket. A vizsgálatukat elsősorban az alkalmazások motiválják.

Kutatásaink eredményeként 33 dolgozatot publikáltunk, további 4 el van fogadva közlésre, hatot benyújtottunk, és készült 3 szoftvercsomag.

A kutatómunkában 6 PhD hallgató is részt vett, közülük négyen a projekt indulása után csatlakoztak a pályázathoz. Kettőn már PhD fokozatot szereztek ([47,48]), további kettő fokozatszerzés várható 2013-ra.

### 1. MÁSODRENDŰ KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

A másodrendű közönséges differenciálegyenletekre elért eredmények ([3,4,11,19,41,42]) közül kiemelendő a

S. Csörgő, L. Hatvani: Stability properties of solutions of linear second order differential equations with random coefficients, J. Differential Equations 248(2010), 21-49.

dolgozat, amely az

$$x'' + a^2(t)x = 0 \quad (t \geq 0)$$

lineáris, nemanonóm egyenletet (Meissner egyenlet) vizsgálja. Az  $x = 0$  egyensúlyi helyzet stabilitására és instabilitására ad elegendő feltételeket, amikor az  $a(t)$  egy lépcsős függvény. Csak annyi a megszorítás az  $a(t)$ -re, hogy az egymást követő ugrások közötti időintervallumok független, pozitív (nem feltétlenül azonos eloszlású) véletlen változók. Az eredmények illusztrálására megadunk egy következményt:

*Legyen az  $a^2(t)$  együtthető egy lépcsős függvény a következő tulajdonsággal:*

$$a(t) = a_k \quad (t_{k-1} \leq t < t_k, k \in \mathbb{N}); \quad a_k \nearrow \infty.$$

Tegyük fel, hogy a  $(t_k - t_{k-1})_{k=1}^{\infty}$  differenciák sorozata független azonos eloszlású véletlen változók, amelyek karakterisztikus függvénye  $\phi$ . Ha

$$\limsup_{|s| \rightarrow \infty} |\phi(s)| < 1,$$

akkor tetszőleges  $(a_k)$  sorozat esetén az egyenlet bármely  $x$  megoldására

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \text{majdnem biztosan.}$$

Az instabilitási tétel a véletlen hintázásra alkalmazható. A sztochasztikus paraméter-rezonanciára is adódik feltétel [4].

A [19] dolgozat az

$$x''|x'|^{n-1} + q(t)|x|^{n-1}x = 0, \quad 1 \leq n \in \mathbb{R}$$

egyenlet  $x = 0$  megoldásának aszimptotikus stabilitására ad elegendő feltételeket. A bizonyítás módszere alkalmazható 2-dimenziós nem-autonóm differenciaegyenletekre is. Az alkalmazás Elbert egy eredményének élesített változatára ad új bizonyítást.

Mechanikai rendszerek kaotikusságának vizsgálata tovább folytatódott, de itt csak rész-eredmények születtek.

## 2. FUNKCIONÁL-DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

A nagyobb terjedelmű

Krisztin, T., Vas, G., Large-amplitude periodic solutions for a differential equation with delayed positive feedback, *Journal of Dynamics and Differential Equations* 23 (2011) 4, 727–790.

dolgozat funkcionál-differenciálegyenleteket vizsgál monoton pozitív visszacsatolás esetén. Megmutatja, hogy a globális attraktor szerkezete bonyolultabb lehet a pontonkénti rendezésben szomszédos stabil egyensúlyi helyzetek között található orsó-szerű alakzatok uniójánál: nagy amplitúdójú (nem szomszédos stabil egyensúlyi helyzetek között elhelyezkedő) periodikus pályákat konstruál lépcsős függvényhez "közeli" visszacsatolási függvényekre. Bizonyos nemlinearitásokra pontosan két nagy amplitúdójú periodikus megoldás létezik. A periodikus pályák instabil halmazainak leírásával teljes képet ad a globális attraktor orsó-szerű alakzatokon kívüli szerkezetéről, az összekötő pályákról. Ez a dolgozat nagy érdeklődést váltott ki bizonyos egydimenziós parabolikus egyenletekkel foglalkozó kutatók körében (B. Fiedler, C. Rocha, A. Carvalho), mert hasonlóságot mutat a nevezetes Chafee–Infante eredményhez. Ezért valamivel részletesebben

ismertetjük. Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$$

egyenletet, ahol  $\mu \geq 0$  és  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  síma függvény. Sok minden ismert a generált szemidinamikai rendszer globális attraktoráról. Egy diszkrét Ljapunov-függvény — mint elsődleges technikai eszköz — alkalmazása mély, végtelen dimenziós dinamikai rendszerek eszközeivel teszi lehetővé pl. Poincaré–Bendixson típusú tétel igazolását (Mallet-Paret, Sell), a globális attraktor Morse-felbontását (McCord, Mischaikow). Bizonyos nemlinearitásokra a globális attraktorról teljes kép ismert (Krisztin, Walther, Wu). De sok esetben nem ez a helyzet. Tegyük fel, hogy  $\mu > 0$ ,  $f'(\xi) > 0$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , és

$$\xi_{-2} < \xi_{-1} < \xi_0 = 0 < \xi_1 < \xi_2$$

öt egymás után következő zéróhelye az  $\xi \mapsto \mu\xi + f(\xi)$  függvénynek úgy, hogy  $f'(\xi_j) < \mu < f'(\xi_k)$ , ha  $j \in \{-2, 0, 2\}$  és  $k \in \{-1, 1\}$ . Ekkor a  $C = C([-1, 0], \mathbb{R})$  fázistér  $C_{j,k} = \{\varphi : \xi_j \leq \varphi(s) \leq \xi_k, -1 \leq s \leq 0\}$  részhalmazai,  $j \in \{-2, 0\}$ ,  $k \in \{0, 2\}$ , pozitív invariánsak a generált  $F$  dinamikai rendszerre. Az  $F$  dinamikai rendszer  $F|_{[0,\infty) \times C_{-2,0}}$  és  $F|_{[0,\infty) \times C_{0,2}}$  a globális attraktorait, azaz a  $\mathcal{A}_{-2,0}$  és  $\mathcal{A}_{0,2}$  halmazokat (legalábbis részben) leírtuk korábban. Az  $\mathcal{A}_{-2,0}$  és  $\mathcal{A}_{0,2}$  halmazok orsószerű struktúrájúak. A dolgozat azt a problémát vizsgálja, hogy vajon az  $F$  dinamikai rendszer  $\mathcal{A}$  globális attraktorára a

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{-2,0} \cup \mathcal{A}_{0,2}$$

egyenlőség fennáll-e. A fő eredmény az, hogy  $\mathcal{A}$  bonyolultabb lehet annál, amit a fenti egyenlőség mond. Megadunk olyan egyenleteket, ahol az  $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A}_{-2,0} \cup \mathcal{A}_{0,2})$  halmaz periodikus pályákat tartalmaz. Leírjuk az  $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A}_{-2,0} \cup \mathcal{A}_{0,2})$  halmaz szerkezetét.

A benyújtott [38] cikk a fenti egyenlet egy speciális esetével, az ún. Wright-egyenlettel foglalkozik, azaz

$$x'(t) = -\alpha(e^{x(t-1)} - 1),$$

ahol  $\alpha > 0$  paraméter. Erre az egyenletre fogalmazta meg 1955-ben E.M. Wright azt a nevezetes sejtést, hogy minden megoldás 0-hoz tart, ha  $\alpha < \pi/2$ , és ezt be is bizonyította  $\alpha \leq 3/2$  esetén. Analitikus és megbízható numerikus technikák kombinálásával megmutattuk, hogy a sejtés igaz  $\alpha \in [1.5, 1.5706]$  esetén is (vesd össze a  $\pi/2 = 1.570796\dots$  értékkel). A kifejlesztett technikák várhatóan más problémákra is alkalmazhatók lesznek. Egy hasonló módszert alkalmazva — végtelen helyett azonban 2 dimenzióban — a [34] dolgozatban S. Levin és R. May egy 1976-ból származó, a Ricker-egyenletre vonatkozó sejtését bizonyítottuk be.

A [23] cikk becslést ad a fundamentális megoldás integráljára késleltetett lineáris autonóm differenciálegyenletek esetén, majd alkalmazza az eredményt perturbált egyenletek stabilitási tulajdonságainak vizsgálatában. Továbbá olyan becsléseket tartalmaz, amelyek a Wright-egyenletre vonatkozó sejtés további vizsgálatához szükségesek.

A [15] publikáció igazolja, hogy bizonyos negatív visszacsatolású késleltetett differenciálegyenletek esetén választható olyan lokálisan Lipschitz-folytonos visszacsatolási függvény, hogy az egyenletnek végtelen sok különböző, lassan oszcilláló periodikus megoldása legyen. A visszacsatolási függvény differenciálhatósága esetén ezek a periodikus pályák stabilak és hiperbolikusak.

A [13] dolgozat  $x'(t) = -\mu x(t) + f(x(t-r))$  alakú egyenletek periódusfüggvényét vizsgálja, ahol  $\mu > 0$ ,  $r > 0$ ,  $f$  pedig egy folytonosan differenciálható, szigorúan monoton, páratlan függvény. Megmutattuk, hogy a periódusfüggvény monoton növekvő ( $r$  függvényében) és Lipschitz-folytonos, 2 konstanssal, majd mindezt felhasználva szükséges és elegendő feltételt adtunk egy gyűrűszerű rendszer periodikus megoldásának létezésére és egyértelműségére bizonyos frekvencia-feltételek mellett. A [32] cikk a nem-síma  $f(x) = (|x+1| - |x-1|)/2$  speciális esetet vizsgálja, amely CNN-hálózatok vizsgálatában fordul elő. Szükséges és elegendő feltételt ad periodikus megoldások létezésére és egyértelműségére egyes frekvencia tartományokban, továbbá a periódusfüggvény vizsgálatával kiterjeszti a létezésre és egyértelműségre vonatkozó tételt a fentivel analóg, gyűrűszerű késleltetett differenciál-egyenletrendszerre bizonyos frekvencia tartományokban.

Nem-monoton visszacsatolási  $f$  függvény esetén vizsgálja a fenti egyenletet a [22] dolgozat, és az ún. "bubbling" jelenségre ad magyarázatot lokális és globális bifurkációs eredmények segítségével. Nem-monoton visszacsatolási függvény fordul elő az [1,10] cikkekben is.

A fenti egyenletek nem-autonóm (speciálisan periodikus) verziójával is foglalkoztunk. A nem-autonóm dinamika eszközeit lehet alkalmazni. Speciálisan az ún. "pullback attractor" fogalma használható. Egy előkészületben lévő dolgozat azt vizsgálja, hogy a pullback attraktor gradiens-szerű struktúrája megmarad-e a nem-autonóm esetben.

Állapotfüggő késleltetésű egyenletekre több előkészületben lévő dolgozat van.

### 3. ALKALMAZÁSOK

Egy genetikai modell dinamikáját vizsgálja az [5] dolgozat.

A [9] cikkben vizsgált rendszer a Tanganyika-tóban élő növényevő és ragadozó halak eloszlását modellezi. Az egyenletnek nincs egyensúlyi helyzete, de a határegyenletnek

van. A cikkben megmutatjuk, hogy ez az egyensúlyi helyzet globálisan eventuálisan egyenletesen aszimptotikusan stabil pontja az eredeti egyenletnek. A bizonyítás során a linearizációt, a határegyenletek módszerét és Ljapunov direkt módszerét használjuk.

[26]-ben egy késleltetési reakció-diffúzió rendszert vizsgálunk, ami egy vírus térbeli terjedését írja le egy baktériumpopulációban. A késleltetés explicit módon a vírus-fertőzés fix idejű látens periódusának felel meg. A rendszernek három változója van, ami a vírusok, a baktériumok illetve a fertőzött baktériumok térbeli sűrűségét adja meg. A fertőződés után a baktérium a fertőzött osztályba kerül, majd  $\tau$  idő elteltével elpusztul, és egyben nagy mennyiségű vírust bocsát ki (burst), ennek a folyamatnak a neve lízis. Egy adott térbeli helyen a kumulatív víruskitettséget mint változót tekintve (ami a vírussűrűség időbeli integrálja az adott helyen), a rendszer egy skaláris parabolikus egyenletre redukálható (az időkésleltetés továbbra is jelen van). Megadjuk a lehetséges aszimptotikus terjedési sebességeket és haladó hullám megoldások létezését igazoljuk. Megmutatjuk azt az érdekes jelenséget, hogy bizonyos paramétertartományban a lineáris determináció elve sérül.

A [29,33] cikkekben egy klasszikus kereslet-kínálati modellt vizsgálunk, ahol a kereslet azonnal reagál az árváltozásra, míg a kínálat bizonyos késéssel teszi ezt, így egy késleltetési differenciálegyenletet kapunk, aminek egy természetes határesetek egy diszkrét dinamikai rendszer. [30]-ban egyenletes korlátokat adunk a fluktuáló árakra a késleltetés függvényében, és elégséges feltételt (a késleltetéstől függően) az egyensúlyi ár globális stabilitására. [33]-ben a diszkrét rendszer dinamikájának részletes analízisét elvégezve és ezt felhasználva új globális stabilitási eredményeket bizonyítunk a folytonos rendszerre, megadva a legélesebb abszolút (késleltetéstől független) globális stabilitási feltételt, az instabil esetben pedig megadjuk a fluktuáló ár lehetséges amplitúdóit, ami abszolút értelemben a lehető legélesebb korlát.

[30]-ban egy SEIR modellt tekintettünk növekvő populációban, konstans látens periódussal. A korlátosság érdekében áttértünk proporcionális változókra. A modell érdekessége, hogy már a nemtriviális egyensúlyi helyzet létezése és unicitása sem triviális kérdés (ez azt jelenti az eredeti modellben, hogy a fertőzők aránya állandó marad-e). A parametrikus reprezentáció módszerével (másik neve envelope method) megoldottuk ezt a problémát. Tudomásunk szerint ez az első alkalmazása ennek a módszernek ilyen típusú modellekre. Emellett elvégeztük a triviális egyensúly stabilitásvizsgálatát és kijavítottunk egy korábbi téves bizonyítást az irodalomban a fertőzött részpopuláció arányának perzisztenciájára.

Röst Gergely a 2009-es H1N1 járvány idején az Országos Epidemiológiai Központtal kötött írásbeli megállapodás alapján analíziseket és előrejelzéseket készített a heti

rendszerességgel kapott részletes influenzaadatok alapján. Ehhez egy új korstrukturált modellt dolgozott ki. Az elméleti eredményeket [18]-ben publikálta doktorranduszával, Knipl Diánával. A model egy 50-dimenziós nemautonóm nemlineáris rendszer. Különböző korszpecifikus oltási menetrendeket hasonlítottak össze egy olyan szituációban, amikor az oltási kampány párhuzamosan fut a járvány kitörésével. Ekkor annak a kéthetes késleltetésnek is komoly hatása van, ami az oldás beadása és az immunitás kialakulása között van. A legjobb stratégiának az bizonyult, amikor az egyes korcsoportokat teljes kontaktszámuk szerinti csökkenő sorrendben vakcinálják. Ez még azoknak a korcsoportoknak is kedvezőbb lehet, akik hátrébb kerülnek a prioritási sorban. Egy ügyes szisztémával akár 10%-kal is csökkenthető a fertőzöttek teljes száma, ugyanannyi vakcina felhasználása mellett. Az [19] dolgozat a Math. Biosci. Eng. folyóirat második legolvasottabb cikke volt hosszú időn át.

A modellt a valós magyarországi adatokra és vakcinafelhasználásra is alkalmazták, és folyamatosan informálták az Országos Tisztifőorvos epidemiológus tanácsadóját. A modell több szempontból is olyan pontos predikciókat adott, amik a matematikai modell nélkül nem voltak előreláthatók.

#### 4. NUMERIKUS EREDMÉNYEK

Különböző numerikus eljárásokat, algoritmusokat, szimulációs technikákat dolgozott ki Karsai János ([45,46,47) differenciálegyenletes és differenciaegyenletes modellek vizsgálatára. A [12] cikk dinamikus rendszerek attraktorainak és azok medencéinek ábrázolására szolgáló új algoritmus leírását tartalmazza.

Az előkészületben lévő [M. Polner, J.J.W. van der Vegt, A Hamiltonian structure-preserving vorticity-dilatation formulation of the compressible Euler equations] cikk az Euler egyenletek egy új Hamiltoni megfogalmazásával foglalkozik. Az egyenleteket átírják egy úgynevezett örvényesség és dilatáció alakra, amelynek fontos eleme a Hodgefelbontás alkalmazása korlátos tartományokon. Ez a megközelítés, a külső kalkulus alapjait is szolgáló, Hilbert komplexusok fogalmára alapszik. Fontos, hogy az egyenleteknek az új változóiban is Hamiltoni struktúrájuk van. Ennek a legfontosabb lépése a Poisson zárójel helyes megfogalmazása. A dolgozat egy hosszú távú célkitűzés felé vezet, amelynek célja, hogy az Euler egyenletek megoldására olyan stabil numerikus módszert konstruáljunk, amely megőrzi a rendszer Hamilton szerkezetét a diszkretizáció szintjén is. Azon diszkretizációs módszerek, amelyek a Hamilton struktúra megőrzésére alkalmasak, általában kiemelkedően jó stabilitási és pontossági tulajdonságokkal rendelkeznek. Ilyen

módon elérhető, hogy a kialakult örvények ne terjedjenek szét a numerikus módszer diszzipatív tulajdonságai miatt. Ehhez jó kiindulási pont a dolgozatban leírt Hamiltoni szerkezet az örvényesség és dilatáció változóiban.

## REFERENCES

- [1] E. Liz, G. Röst: On the Global Attractor of Delay Differential Equations with Unimodal Feedback, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 24:(4) 1215-1224, 2009
- [2] G. Vas: Asymptotic constancy and periodicity for a single neuron model with delay, *Nonlinear Analysis*, vol. 71, 2268-2277, 2009
- [3] L. Hatvani: Stochastic parametric resonance in a linear oscillator at square-wave modulation, *Problems of Analytical Mechanics and Stability Theory* (Eds. F.L. Chernousko, A.V. Karapetyan, V.V. Kozlov, N.N. Krasovskii, V.N. Tkhai, S.N. Vasil'ev), Fzmatlit, Moscow, 2009
- [4] L. Hatvani: On the critical values of parametric resonance in Meissner's equation by the method of difference equations, *Electronic J. Qualitative Theory of Diff. Equations*, Spec. Ed. I, No. 1, 1-10, 2009
- [5] L. Hatvani, F. Toókos, G. Tusnády: A mutation-selection-recombination model in population genetics, *Dynam. Systems Appl.* 18(2009), 335-362, 2009
- [6] Moghadas SM; Bowman CS; Röst G; Fisman DN; Wu J: Post-exposure prophylaxis during pandemic outbreaks, *BMC MEDICINE* 7: 73doi:10.1186/1741-7015-7-73 p. 1.(2009), 2009
- [7] S.M. Moghadas, C.S. Bowman, G. Röst, D.N. Fisman, J. Wu: Post-exposure prophylaxis during pandemic, *BMC Medicine* 2009, 7:73 doi:10.1186/1741-7015-7-73, 2009
- [8] T. Krisztin: On the fundamental solution of a linear delay differential equation, *Int. J. Qualitative Theory of Differential Equations and Appl.* 3(2009), 1-7, 2009
- [9] A. Dénes, L. Hatvani, L.L. Stachó: Eventual stability properties in a nonautonomous model of population dynamics, *Nonlinear Anal.* 73 (2010), 650-659., 2010
- [10] E. Liz, G. Röst: Dichotomy results for delay differential equations with negative, *Nonlinear Anal. RWA*, 2010 doi:10.1016/j.nonrwa.2009.02.030, 2010
- [11] S. Csörgő, L. Hatvani: Stability properties of solutions of linear second order differential equations with random coefficients, *J. Differential Equations* 248(2010), 21-49., 2010
- [12] A. Dénes, G. Makay: Attractors and basins of dynamical systems, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.* 20 (2011), 1-11, 2011
- [13] Á. Garab, T. Krisztin: The period function of a delay differential equation and an application,, *Periodica Mathematica Hungarica* 63 (2011), 173-190, 2011
- [14] D. Knipl, G. Röst: Influenza models with Wolfram Mathematica, *Interesting Mathematical Problems in Sciences and Everyday Life*, Chapter 4, pp 1-24 (Eds: J. Karsai, R. Vajda), Szeged - 2011 - Novi Sad, 2011
- [15] G. Vas: Infinite number of stable periodic solutions for an equation with negative feedback,, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, No. 18 (2011), pp. 1-20., 2011

- [16] J. Karsai: Investigations of Impulsive Systems with Mathematica, Interesting Mathematical Problems in Sciences and Everyday Life, 27 pages (Eds: J. Karsai, R. Vajda), Szeged - 2011 - Novi Sad, 2011, 2011
- [17] J. Terjéki, M. Bartha: On the convergence of solutions of nonautonomous functional differential equations, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., Proc. 9th Coll.QTDE, 2011, No. 1 1-10, 2011
- [18] Knippl D, Röst G.: Modelling the strategies for age specific vaccination scheduling during influenza pandemic outbreaks, Math. Biosci. Eng. 8(1), 123-139 (2011), 2011
- [19] L. Székely, L. Hatvani: Asymptotic stability of two dimensional systems of linear difference equations and of second order half-linear differential equations with step function coefficients, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., No. 38 (2011), pp. 1-17., 2011
- [20] Röst G: SEI model with varying infectivity and mortality, MATHEMATICS IN SCIENCE AND TECHNOLOGY: Mathematical Methods, Models and Algorithms in Science and Technology, Proceedings of the Satellite Conference of ICM 2010 Konferen, 2011
- [21] Röst G: On an approximate method for the delay logistic equation COMMUNICATIONS IN NON-LINEAR SCIENCE AND NUMERICAL SIMULATION 16:(9) pp. 3470-3474.(2011), COMMUNICATIONS IN NONLINEAR SCIENCE AND NUMERICAL SIMULATION 16:(9) pp. 3470-3474., 2011
- [22] T. Krisztin, E. Liz: Bubbles for a Class of Delay Differential Equations, Qualitative Theory of Dynamical Systems 10 (2011), 169-196, 2011
- [23] T. Krisztin, G. Vas: On the fundamental solution of linear delay differential equations with multiple delays, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., 36 (2011), 1-28, 2011
- [24] T. Krisztin, G. Vas: Large-amplitude periodic solutions for a differential equation with delayed positive feedback, Journal of Dynamics and Differential Equations 23 (2011), 727–790., 2011
- [25] Dénes A; Röst G: Structure of the global attractors in a model for ectoparasite borne diseases, BIOMATH 1:(1) pp. Article ID: 1209256-1–5., 2012
- [26] Jones DA; Smith HL; Thieme HR; Röst G: Spread of Phage Infection of Bacteria in a Petri Dish, SIAM JOURNAL ON APPLIED MATHEMATICS 72:(2) pp. 670-688., 2012
- [27] Knippl DH; Röst G: Multiregional SIR Model with Infection during Transportation, BIOMATH 1:(1) pp. Article ID: 1209255-1–7., 2012
- [28] Liu M; Röst G: Dynamics of an SIS Model on Homogeneous Networks with Delayed Reduction of Contact Numbers, BIOMATH 1:(2) pp. Article ID: 1210045-1-7., 2012
- [29] Röst G: Global convergence and uniform bounds of fluctuating prices in a single commodity market model of Bélair and Mackey, ELECTRONIC JOURNAL OF QUALITATIVE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS 2012:(26) pp. 1-9., 2012
- [30] Röst G; Huang ShY; Székely L: On a SEIR Epidemic Model with Delay, DYNAMIC SYSTEMS AND APPLICATIONS 21: pp. 33-48, 2012
- [31] Dénes A; Kevei P; Nishiura H; Röst G: Risk of infectious disease outbreaks by imported cases with application to the European Football Championship 2012, INTERNATIONAL JOURNAL OF STOCHASTIC ANALYSIS 2013: p. 1.(2013) online <http://www.hindawi.com/journals/ijsa/aip/576381/>
- [32] Garab Á: Unique periodic orbits of a delay differential equation with piecewise linear feedback function, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 33(6):2236-2387, 2013.



- [33] Liz E, Röst G: Global dynamics in a commodity market model, *JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS* 398:(2) pp. 707-714. 2013.

**Elfogadott dolgozatok:**

- [34] F. A. Bartha, Á. Garab, T. Krisztin, Local stability implies global stability for the 2-dimensional Ricker map, *Journal of Difference Equations and Applications*, elfogadva.
- [35] Gergely Rost; Maoxing Liu; Gabriella Vas, SIS model on homogeneous networks with threshold type delayed contact reduction, *Computers and Mathematics with Applications*
- [36] Méri Á, Karsai J, Investigation of the Spatio-Temporal development of cuscuta Species, to appear in *Polish Journal of Ecology*.
- [37] Hulmán Á, Faerch K, Vistisen D, Karsai J, Nyári TA, Tabák AG, Brunner EJ, Kivimäki M, Witte DR, Effect of time of day and fasting duration on measures of glycaemia: analysis from the Whitehall II study, *Diabetologia* (2012), Online first: DOI 10.1007/s00125-012-2770-3 (IF: 6.814), <http://link.springer.com/article/10.1007>.

**Benyújtott dolgozatok:**

- [38] Balázs Bánhelyi, Tibor Csendes, Tibor Krisztin, and Arnold: Neumaier: Global attractivity of the zero solution for Wright's equation.
- [39] Dénes A., Röst G., Global dynamics for the spread of ectoparasite-borne diseases.
- [40] Dénes A., Röst G., Global dynamics of a compartmental system modeling ectoparasite-borne diseases.
- [41] Knippl DH, Fundamental properties of differential equations with dynamically defined delayed feedback.
- [42] Hatvani L., An elementary method for the study of Meissner's equation and its application to proving the Oscillation Theorem.
- [43] L. Cszimadia, L. Hatvani, An extension of the Levi-Weckesser method to the stabilization of the inverted pendulum under gravity.

**Szofverek:**

- [44] Karsai J, Méri Á, Mathematica packages to study stochastic cellular automata for multi-species interactions, 2012.
- [45] Karsai J., Computer-aided study of mathematical models, CD-ROM, Univ. of Szeged, 2008, revised in 2012.
- [46] Karsai J., Mathematical and visualization packages: Mathematica, CD-ROM, Univ. of Szeged, 2008, revised in 2012.

**PhD értekezések:**

- [47] Dénes Attila, Populációdinamikai rendszerek elméleti és számítógépes stabilitásvizsgálata, Szeged, 2011. Témavezető: Hatvani László.
- [48] Vas Gabriella, Periodic Orbits and Global Dynamics for Delay Differential Equations, Szeged, 2011. Témavezető: Krisztin Tibor.