

## Zárójelentés a T72146 számú tematikus OTKA pályázat keretében végzett munkáról

Pályázat címe: *Merev testek statikai egyensúlya: morfológia, topológia és evolúció*

### Összefoglalás

*A kutatás keretében konvex, merev testek mechanikai egyensúlyi helyzetei és a morfológiája közötti kapcsolatot vizsgáltuk. Ennek keretében bebizonyítottuk, hogy léteznek gömbtől eltérő, úgynevezett neutrálisan úszó testek melyek tetszőleges pozícióban egyensúlyban vannak. Megmutattuk, hogy szoros kapcsolat van a teknősök élőhelye, talpra-állási stratégiája és páncéljuk geometriája között. Példát mutattunk olyan teknősfajokra, melyek közelítőleg monostatikus páncéllal rendelkeznek és ezért pusztán gravitáció segítségével talpra tudnak állni. A páncél geometriája alapján azonosítottuk egy 200 millió éves ősteknős élőhelyét. Egyensúlyi helyzeteik száma és típusa alapján új osztályozási rendszert javasoltunk kavicsokra. Megmutattuk, hogy az új osztályozás a hagyományos, geológiában elterjedt osztályozásnál több információt hordoz a kavics alakjáról. Igazoltuk, hogy sima felületek egyenletes, kellően finom diszkrétizálásával létrehozott poliéderek esetén az egyensúlyok két, jól elkülönült skálán jelentkeznek és megadtuk a mikro skála pontos szerkezetét. Folytonos és diszkrét, sztochasztikus kopásmodellt állítottunk fel és ezek segítségével modelleztük aszteroidák alakfejlődését illetve folyami mederfenék kopását. Eredményeink jó egyezést mutatnak a csillagászati és geológiai megfigyelésekkel illetve a labor kísérletekkel.*

### Summary

*We investigated the relationship between mechanical equilibrium points and global morphology of convex, rigid bodies. We proved the existence of non-spherical, neutrally swinning objects which are at rest in any position. We demonstrated the close relationship between the habitat, self-righting strategy and shell geometry of turtles. We showed that some turtle species have developed monostatic shells enabling them to self-right under gravity. Based on the geometry of the well-preserved shell we identified the habitat of a 200 million year old turtle fossil. We proposed a new classification scheme for pebbles, based on the number and type of their static equilibrium points and demonstrated that this new system carries more information than the traditional geological Zingg classification. We proved that sufficiently fine, uniform polyhedral discretizations of smooth, convex surfaces give rise to equilibria on two, well-separated scales and we described the detailed geometry of the micro-scale. We developed continuous and discrete, random models for abrasion and found good match between predictions of our model and the shape evolution of asteroids and river bedrock abrasion.*

Témavezető: Dr. Domokos Gábor

Résztvevők: Dr Lángi Zsolt  
Dr Sipos András Árpád  
Szabó Tímea  
Dr Török Ákos  
Dr Várkonyi Péter

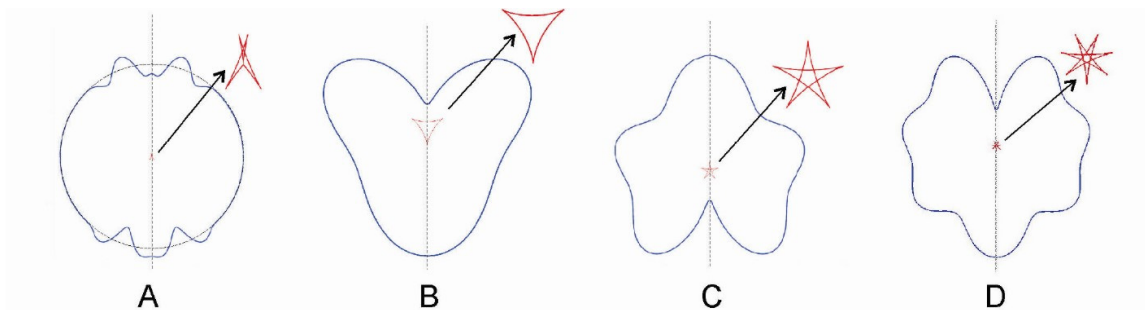
A pályázat címe egy átfogó, igen széles területet jelöl meg, ezen belül a kutatási tervben illetve a kutatási szerződésben rögzített részterületeken értünk el eredményeket.

A zárójelentésben a kutatási szerződés által kitűzött célokat idézzük pontosan, ezután összefoglaljuk röviden az odatartozó eredményeket és felsoroljuk a *jelentősebb publikációkat*.

### 1. Elméleti kérdések

1.1 Azt kívánjuk megvizsgálni, hogy létezhet-e hidrosztatikus egyensúlyban lévő mono-monostatikus test. Ezen belül azt szeretnénk megvizsgálni, hogyan függ a jelenség az úszó test fajsúlyától.

Várkonyi Péter megtette az első lépést a probléma megoldása irányába. Bebizonyította, hogy 3 dimenzióban is léteznek úgynevezett neutrálisan úszó testek, melyek a nevezetes Ulam-féle probléma megoldását jelentik. A mono-monostatikus testek létezésének kérdését természetesen ezzel még nem válaszoltuk meg.



1. ábra: Neutrálisan úszó, hengersizmetrikus térbeli testek numerikusan meghatározott kontúrgörbéi

P.L. Várkonyi: **Floating Body Problems in Two Dimensions**. *STUDIES IN APPLIED MATHEMATICS* 122:(2) pp. 195-218. (2009) (Ebben a cikkben tévedésből a 72368-as OTKA száma szerepel, de a cikk nem része annak a kutatásnak és ott nem is számolták el.)

P.L. Várkonyi: **Neutrally Floating Objects of Density 1/2 in Three Dimensions**. *STUDIES IN APPLIED MATHEMATICS* 130:(3) pp. 295-315. Paper &. (2013)

## 2. Teknősök geometriája

2.1 Azt kívánjuk megvizsgálni, hogy a páncél morfológiája milyen mértékben alkalmazkodott annak érdekében, hogy a teknősök talpra állását segítse. Ezen belül meg kívánjuk vizsgálni, hogy léteznek-e monostatikus illetve mono-monostatikus testként viselkedő teknősök. Szeretnénk a talpra állás stratégiáját összekapcsolni a páncél geometriájával.

Várkonyi Péterrel felállítottuk a teknős páncélok 3 paraméteres geometriai modelljét, a modell paramétereit 30 teknős fajon mért adatokhoz illesztettük. Megállapítottuk, hogy a teknősök talpra állási stratégiája szorosan összefügg a páncél geometriájával, továbbá azt is megállapítottuk, hogy igen kevés teknős faj esetén a páncél jó közelítéssel monostatikusnak tekinthető. Ilyen páncél birtokában a teknős pusztán gravitáció segítségével is talpra tud állni. Azt is megállapítottuk, hogy az általunk felállított 3 paraméteres modellben a monostatikus páncélok csak nagyon szűk paraméter-tartományban fordulnak elő, ezért az ilyen teknősök geometriája rendkívül kötött. Emiatt eredményünk a különleges evolúciós alkalmazkodásra mutat érdekes és látványos példát és például az indiai csillagteknőst bemutató Wikipedia oldalon is említik ([http://en.wikipedia.org/wiki/Indian\\_star\\_tortoise](http://en.wikipedia.org/wiki/Indian_star_tortoise)).

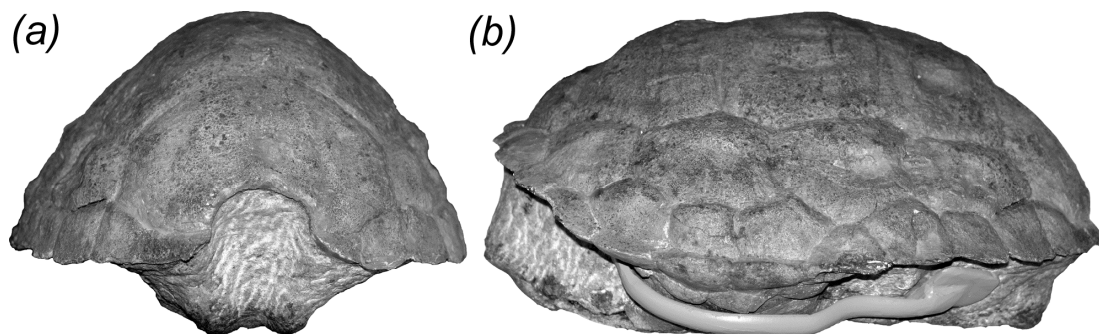


2. ábra: A monostatikus indiai csillagteknős talpraállása (Kép forrása: Adam Summers: *The Living Gömböc*, *Natural History Magazine/Biomechanics*, March 2009.

G. Domokos, P.L. Várkonyi: **Geometry and self-righting of turtles**, *Proc. R. Soc. B* 7. January 2008. vol. 275 no. 1630, pp 11-17

2.2 Egy olyan geometriai modellt kívánunk létrehozni a páncél leírására melynek paraméterei a mért adatokhoz illeszthetőek.

Roger Bensonnal, Robert Reisz-szal és Várkonyi Péterrel tovább fejlesztettük a korábban felállított 3 paraméteres modellt és segítségével meghatároztuk a világ egyik legismertebb, 200 millió éves ősteknőse, a *Proterochersis* az élőhelyét. Munkánkban több mint 200 teknőspáncél adataihoz illesztett paraméterek segítségével megmutattuk, hogy a teknősök élőhelye és a páncél geometriai paraméterei között szoros összefüggés van. Ezen összefüggés felhasználásával az ősteknős páncélja alapján arra következtettünk, hogy ellentétben a paleontológusok által korábban elfogadott nézettel, a *Proterochersis* nem kizárólag, illetve nem elsősorban szárazföldön élt.



3. ábra: A *Proterochersis robusta* páncélja (Állami Természettudományi Múzeum, Stuttgart, SMNS 17561)  
(a) nézet szemből (b) nézet oldalról.

R. Benson, G. Domokos, P.L. Várkonyi, R. Reisz: **Shell geometry and habitat determination in extinct and extant turtles (Reptilia: Testudinata)**, *Paleobiology* Vol 37, pp 547-562 (2011)

### 3. Kavicsok geometriája

3.1 Az egyensúlyi helyzetek számát egyesével növelő Kolumbusz-algoritmus által használt kis csonkolások igen hasonlatosak a kopási folyamat során bekövetkező anyagvesztéshez. Ennek alapján az sejthető, hogy a kopás eredményeként sok egyensúlyi helyzettel rendelkező testek állnak elő. A kísérletek azonban mast mutatnak: a kavicsok többsége kevés egyensúlyi helyzettel rendelkezik. Célunk ezen, úgynevezett „Kolumbusz-paradoxon” feloldása.

*A paradoxonra adandó válasz első lépéseként Sipos Andrással, Szabó Timeával és Várkonyi Péterrel közösen részletesen megvizsgáltuk, hogyan kapcsolható az egyensúlyi helyzetek száma a kavicsok geometriájához. Bevezettük az egyensúlyi helyzetek számán alapuló egyensúlyi osztályok fogalmát és megmutattuk, hogy ezen osztályozásból nagy biztonsággal következtethetünk az adott kavicsminta hagyományos, Zingg-féle osztálybeli besorolására, fordítva azonban nem igaz az állítás. Megmutattuk azt is, hogy a kavicsok egyensúlyi osztályozása gyors, kézi mérésekkel elvégezhető. Szoros statisztikai összefüggést mutattunk ki a kavicsok stabil egyensúlyainak száma és a kavics lapossága között.*

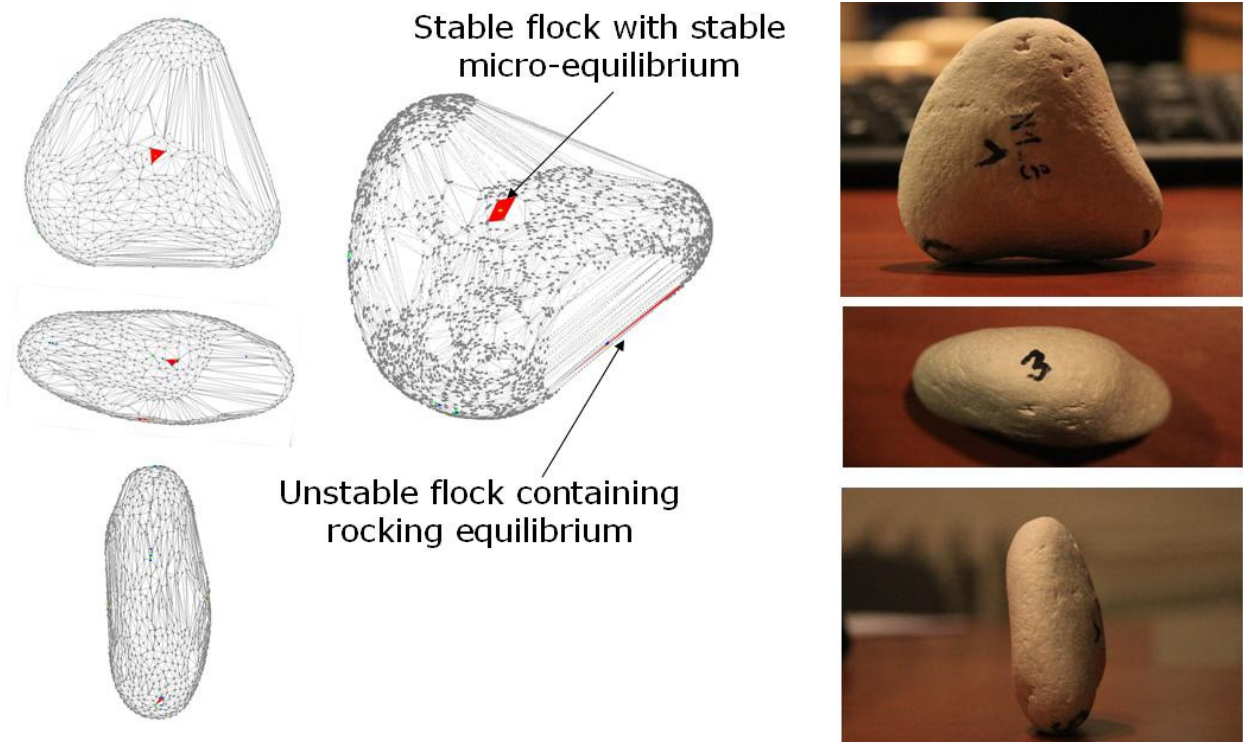
$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1									
2		<b>E(III)</b> 							<b>E(I)</b>
3									
4									
5							<b>E(II)</b>		
6									
7		<b>E(IV)</b>							
8									
...									

4. ábra: Az E(I), E(II), E(III) és E(IV) egyensúlyi osztályok definíciója az egyensúlyi helyzetek száma és típusa alapján.

Domokos, G., Sipos A.Á., Szabó T., Várkonyi P.: **Pebbles, shapes and equilibria**, *Mathematical Geosciences*, doi:10.1007/s11004-009-9250-4, Vol 42, No.1. pp 29-47., 2010

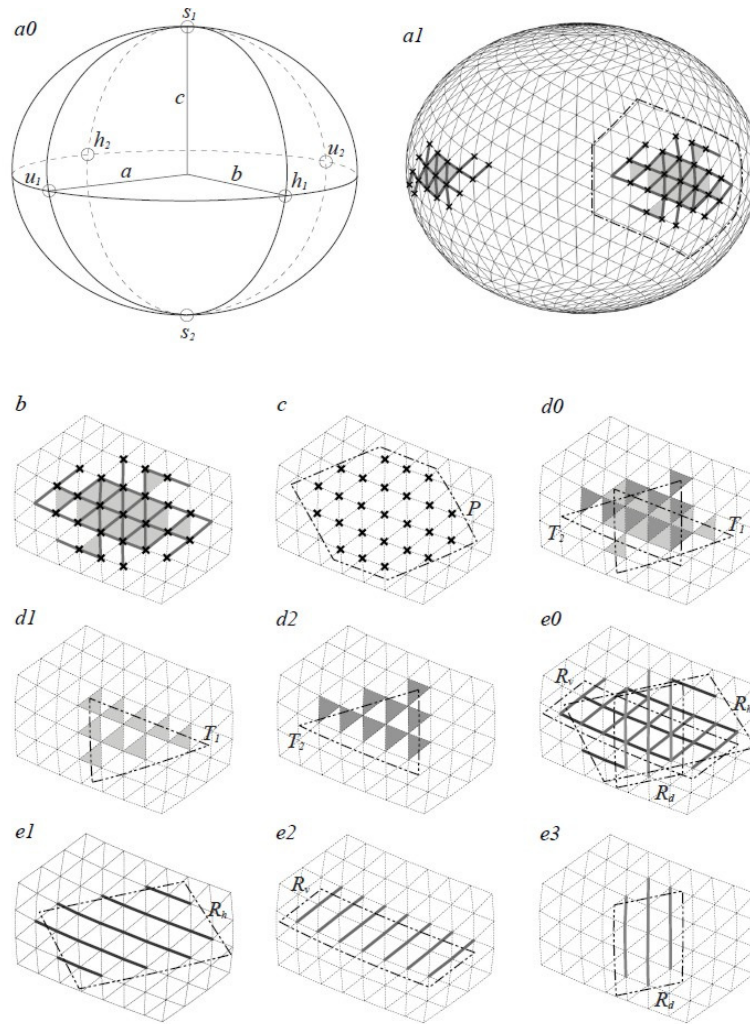
Szabó T., Domokos G.: **A new classification system for pebble and crystal shapes based on static equilibrium points.**, *Central European Geology* (2010) Vol 53 pp 1-19, 20

A Kolumbusz-paradoxonra részleges magyarázatot találtunk Szabó Timeával és Sipos Andrással. Kimutattuk, hogy a kavicsok, sziklák felszínén található egyensúlyi helyzetek két elkülönült skálán léteznek. A lokális egyensúlyok úgynevezett falkákba tömörülnek, a külső szemlélő számára ezek a falkák egymástól viszonylag távoli, globális egyensúlyi helyzetként jelentkeznek. Ezzel a megfigyeléssel mechanikai magyarázatot adtunk az ingókövek viselkedésére is. A kutatás során 3D-ben szkennelt kavicsokon bemutattuk a lokális és globális egyensúlyokat és illusztráltuk, hogy ezek egymástól (gömbtől távoli geometria esetén) élesen szétválnak.



5. ábra: Kavics mikro- és makro egyensúlyai. A baloldali ábrán a 3 dimenzióban beszkenelt kavics konvex burkán számítógéppel azonosított stabil egyensúlyokat hordozó lapokat pirossal jelöltük. A jobb oldalon látható fényképek azt illusztrálják, hogy a számítógéppel azonosított egyensúlyi helyzetek, noha szemlélet alapján nem volnának sejthetőek, mégis léteznek: a kavicsot a megadott pontokon sikerült egyensúlyoznunk.

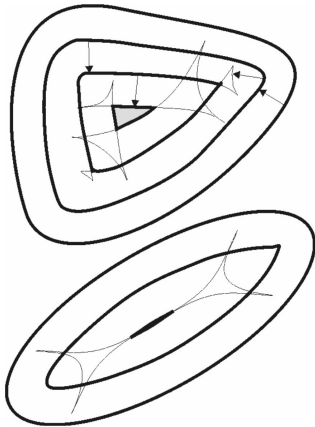
A két skálán jelentkező egyensúlyok pontos matematikai leírását Lángi Zsolttal és Szabó Timeával végeztük el. Ebben a cikkben precíz feltételt adtunk a falkák létezésére, leírtuk a falkák részletes geometriáját és a falkákban található mikro-egyensúlyok számára vonatkozó formulákat is sikerült levezetnünk.



6. ábra: Háromtengelyű ellipszoid mikro- és makro egyensúlyai. Az ábra bemutatja egy nyereg-típusú falka pontos belső geometriáját.

3.2 A kopás geometriáját leíró parciális differenciálegyenletek alapján azt várhatjuk, hogy minden kavics gömbhöz közelít a kopási folyamat során, a valóságban azonban mást tapasztalunk. Célunk a kopási modellek vizsgálata, új modellek bevezetése, különös tekintettel a diszkrét, sztochasztikus modellekre melyek az ütközési eseményeken alapuló kopási folyamathoz közelebb állnak, mint a kiátlagolt folytonos egyenletek.

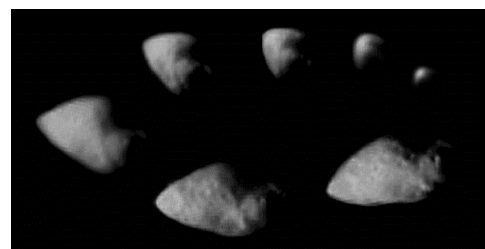
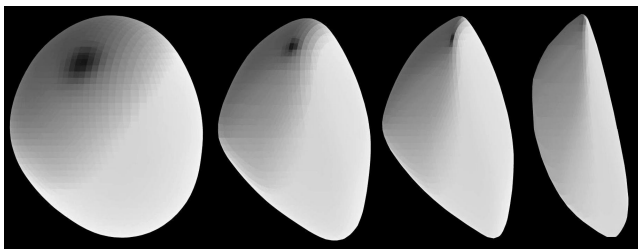
Sipos Andrással és Várkonyi Péterrel levezettük az ütközéses kopás általános parciális differenciálegyenletét és felállítottunk egy diszkrét, sztochasztikus modellt ugyanerre a feladatra. Az utóbbi (diszkrét) modellt számítógépen is implementáltuk és megvizsgáltuk a globális konvergencia-tulajdonságait. A folytonos modell esetén a síkbeli egyenlet egy konstans és egy görbülettel arányos tag lineáris kombinációjának adódott. Megmutattuk, hogy a konstans tag speciális (nem-sima) limesz-geometriákra vezet, melyeket a 7. ábra illusztrál. (a görbülettel arányos tag esetén a limesz a kör). Ezen speciális geometriák térbeli változatai (melyből 3 létezik) a természetben is megfigyelhetők: a geológiában éleskavicsoknak nevezik ezeket a képződményeket.



7. ábra: A baloldali ábra a speciális, nem-sima limesz-geometriákat mutatja be (síkbeli esetben) állandó sebességű kopás esetén. A két lehetséges geometria között a legnagyobb beírt kör érintési pontjainak száma (2 vagy 3) tesz különbséget. A jobboldaléi ábrán egy éleskavics látható (forrás: <http://bc.outcrop.org/>).

Domokos G, Sipos A.Á., Várkonyi P.: **Continuous and discrete models for abrasion processes**, *Periodica Polytechnica Arch.* Vol 40. No.1. pp 3-8., 2010

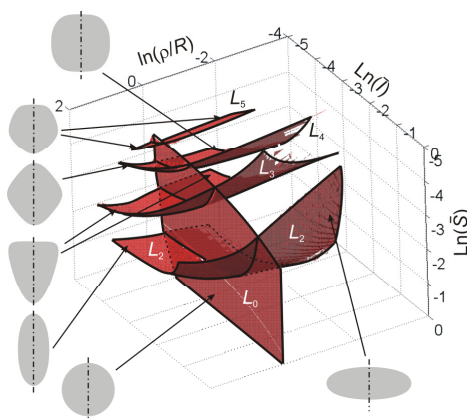
Sipos Andrással, Szabó Gyulával és Várkonyi Péterrel megmutattuk, hogy a fenti egyenletek sokkal nagyobb mérettartományban is érvényesek: az aszteroidiák alakját az egyenletes sebességű kopás alakítja és alakjuk közelít a 7. ábrán bemutatott limesz-geometriákhoz.



9. ábra: Balra: Numerikus szimuláció egy konvex test alakfejlődéséről, egyenletes kopás esetén. Jobbra: Az Annefrank aszteroidiáról készült fényképfelvételek.

Domokos G., Sipos A.Á., Szabó Gy., Várkonyi P.: **Formation of sharp edges and planar areas of asteroids by polyhedral abrasion**, *Astrophysical journal (Letters)* 2009 ,699 L13-L16, doi: 10.1088/0004-637X/699/1/L13, 2009

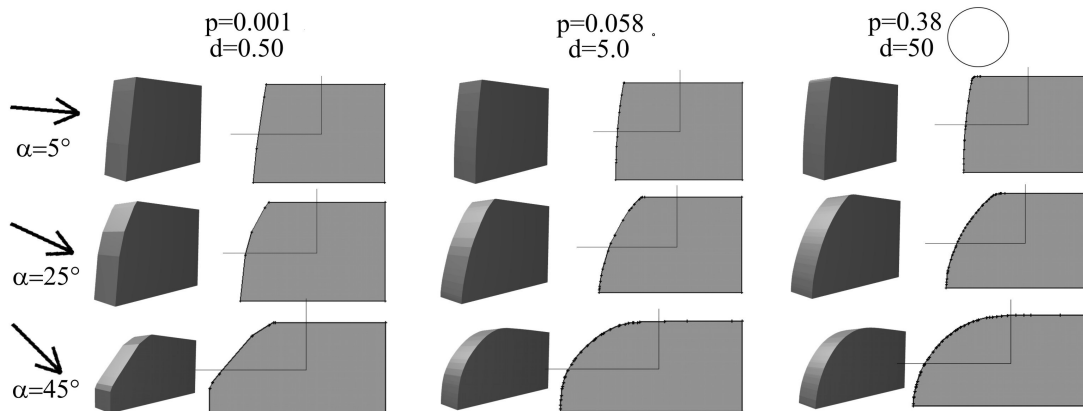
Várkonyi Péterrel levezettük az ütközéses kopás általános parciális differenciálegyenletét a térbeli esetre és numerikusan kerestünk invariáns (önhasonló módon kopó) megoldásokat a forgástestek között. Utóbbi eredményeket illusztrálja a 9. ábra.



9. ábra: Numerikusan azonosított, önhasonló módon kopó forgástestek az általános, 3 dimenziós ütközéses kopásegyenletben.

Várkonyi, P., Domokos G.: **A general model for collision-based abrasion processes**, *IMA J Appl Math* (2011) 76 (1): 47-56. doi:10.1093/imamat/hxq066, 2011

Sipos Andrással, Niels Hoviussal és Andrew Wilsonnal alkalmaztuk a diszkrét, sztochasztikus modellt folyómeder kopását vizsgáló kísérletek numerikus szimulációjára. Sikerült kimutatnunk, hogy a mederben keletkező profilok geometriája a beérkező hordalék-szemcsék méretétől és beesési szögétől függ (9. ábra). Numerikus szimulációnk a laborkísérletekkel jó egyezést mutatott.



9. ábra: Folyómederben kialakuló profil geometriájának függése a koptató hordalék méretétől ( $d$ ) és beesési szögétől ( $\alpha$ ).

A.A. Sipos, G. Domokos, N. Hovius, A. Wilson: **A discrete random model describing bedrock profile abrasion**, *MATHEMATICAL GEOSCIENCES* Vol 43, pp 583-591 DOI 10.1007/s11004-011-9343-8. (2011)., 2011

## ÖSSZEFOGLALÁS

A fentiekben idéztük a kutatási szerződésben megfogalmazott összes kutatási célt és mindegyik után megadtuk az adott témában elért eredményeket, megjelöltük a legfontosabb publikációkat.