OTKA ZAROJELENTES, T68398
DISZKRET GEOMETRIA, MAKAI ENDRE

1) A 2010. VII. 1-TOL 2011. VI. 30-IG ELVEGZETT MUNKA LEIRASA, A 2008, 2009, 2010 EVIEKHEZ HASONLO TERJEDELEMBEN (l. ezen evi reszjelenteseket)
2) A 2007. VII. 1-TOL 2011. VI. 30-IG ELERT OSSZES EREDMENYEK ROVID OSSZEFOGLALASA (a reszjelentesekhez hasonlo terjedelemben)

1) A 2010. VII. 1-TOL 2011. VI. 30-IG ELVEGZETT MUNKA LEIRASA

Ket 0-ra szimmetrikus konvex test logaritmikus kozepe az a legnagyobb 0-ra szimmetrikus konvex test, melynek tamaszfuggvenye legfeljebb a ket test tamaszfuggvenyenek mertani kozepe. Ha a ket test a koordinatahipersikokra szimmetrikus, akkor belattuk, hogy a logaritmikus kozep terfogata legalabb a ket terfogat mertani kozepe. Ez az egyenlotlenseg erosebb a Brunn-Minkowski egyenlotlensegnel ebben az esetben.

Gromovot, Milmant stb. kovetve egy 0-ra szimmetrikus konvex poliederhez hozza lehet rendelni az un. kupterfogat merteket a gombfelszinen. Ez a kulso normalisokra van koncentralva, es egy kulso normalis merteke a hozza tartozo lap alapu es 0 csucsu kup terfogata. Sikerult jellemezni a 0-ra szimmetrikus konvex poliederek kupterfogat mertekeit.

A szeparacios problema: hany hipersikkal lehet egy P konvex d-politop hiperlapjait szigoruan szeparalni tetszoleges adott belso pontjatol. A sejtes szerint ez a szam legfeljebb 2^d. (Ez ekvivalens a Gohberg-Markus-Hadwiger-fele fedesi problemaval.) Belattuk a szeparacios sejtest a 4-dimenzios szomszedsagi politopok egy olyan vegtelen osztalyara, amelyek egy bizonyos specialis varrassal keletkeznek.

Sikbeli korkonvex alakzatok kozeliteset vizsgaltuk korulirt, ill. beirt korpoligonok segitsegevel. Belattunk aszimptotikus formulakat kulonbozo metrikakban (teruletkulonbseg, keruletkulonbseg, Hausdorff metrika, stb.) a kozelites rendjere. Ezen eredmenyek McClure es Vitale 1975-os klasszikus eredmenyeinek analogjai.

H^2-ben leirtuk azon nem-ures belseju, zart konvex halmazok parjait, melyek barmely kongruens peldanyainak metszete rendelkezik nem-trivialis szimmetriaval, azon feltetel mellett, hogy a hatarok osszefuggo komponenseinek szama veges (9 eset).

Leirtuk az Abel csoportok olyan reszosztalyait, amelyek zartak reszcsoportra, osszegre, es homomorf kepre. A leiras a csoportbeli elemek rendjeivel kapcsolatos.

Egy veges $(d+1)$-uniform H hipergraf onatfedesi szama az a legkisebb $c(H) \in (0,1]$ szam, melyre akarhogy agyazzuk be H csucsait $\mathbb{R}^d$-be, van olyan pont $\mathbb{R}^d$-ben, amely a hipereleknek megfelelo szimplexek legalabb $c(H)$-szorosaban benne van. Belattuk Gromov sejteset: vannak olyan tetszolegesen nagy meretu, de korlatos

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

foku $(d+1)$-uniform hipergrafok, melyek onatfedesi szama legalabb egy $c(d) > 0$ konstans. $c(d)$ legjobb erteke aszimptotikusan egyenlo az n-pontu teljes $(d+1)$-uniform hipergrafok onatfedesi szamai limeszevel, ha $n \to \infty$.

Haussler es Welzl nevezetes tetele szerint barmely korlatos VC-dimenzios hipergrafban van $O[\varepsilon^{-1} \log \log \varepsilon^{-1}]$-meretu ε-net. Belattuk, hogy vannak olyan geometriai modon definialt 2 VC-dimenzios hipergrafok a sikban, melyekre ezen becsles eles. Vannak olyan hipergrafok is, melyek hipereleit egy ponthalmaz tengelyparhuzamos teglalapokkal valo metszeteikent kapjuk, es melyekben a legkisebb ε-net merete $\Omega[\varepsilon^{-1} \log \log \varepsilon^{-1}]$, ami pontos.

Legyen $f(d)$ az 1 atmeroju gombok maximalis szama, melyek bepakolhatok $[-1, 1]^d$-be. $7 \leq d \leq 24$-re $f(d)$-re felso korlatokat adtunk; belattuk: $f(6) \leq 116$.

Egy graf metszesi szama, $\mathrm{cr}\,(G)$ (ill. monoton metszesi szam. $\text{mon-cr}\,(G)$) a lerajzolasahoz szukseges metszesek minimalis szama (ill. ha meg az osszes elt x-monoton gorbevel kell lerajzolni). Belattuk: $\text{mon-cr}\,(G) \leq 2\,\mathrm{cr}\,(G)^2$. Mutattunk grafokat, melyekre $\text{mon-cr}\,(G) \geq (7/6)\,\mathrm{cr}\,(G) - 6$.

Egy graf par-metszesi szama, $\text{pair-cr}\,(G)$ a lerajzolasahoz szukseges metszo elparok minimalis szama. Belattuk: ha $\text{pair-cr}\,(G) = k$, akkor $\mathrm{cr}\,(G) \leq c(k^{7/4} \log^{3/2} k)$.

Thomassen hires tetele szerint minden sikgraf lista-szinezesi szama $(\mathrm{ch}\,(G))$ legfeljebb 5. Belattuk: ha $\mathrm{cr}\,(G) = 2$, akkor is $\mathrm{ch}\,(G) \leq 5$.

2) A 2007. VII. 1-TOL 2011. VI. 30-IG ELERT OSSZES EREDMENYEK ROVID OSSZEFOGLALASA

Megcafoltuk Fejes Toth Laszlo 60 eves sejteset: van olyan konvex lemez, amelynek kongruens peldanyaibol valo barmely legritkabb fedesben van ket keresztezo lemez (azaz az uniojuk minusz barmelyik nem osszefuggo). Ez azt mutatja, hogy a fedesi problemak lenyegesen nehezebbek, mint az elhelyezesi problemak, a sejtett dualitas nem all fenn.

$\mathbb{R}^n$-ben, fix $r > 1$-re, vizsgaltunk az egysеggombot tartalmazo konvex testeket, melyek minden extremalis pontja 0-tol legalabb r tavolsagra van. Ezen testek terfogatai/felszinei/atlagszelessegei minimuma minusz az egyseggomb terfogata/felszine /atlagszelessege, $r \to 1$-re aszimptotikusan, mindharom esetre, const$\cdot(r-1)$.

Kulonbozo ertelemben vizsgaltunk veletlen politopokat: konvex testhez koreirt, beirt politopokat, hataron egyenletesen eloszolt pontok konvex burkat. Reszben bizonyos feltetelek mellett, aszimptotikusan meghataroztuk a test es a veletlen politop quermassintegraljai kulonbsegeit, es a hiperlapok szamanak varhato erteket. Tovabba szorasokat is meghataroztunk, es egy nagy szamok eros torvenyet bizonyitottunk.

Belattuk ket alapveto affin-invarians egyenlotlensegnek, a Blaschke-Santalo, es az affin izoperimetrikus egyenlotlensegnek optimalis hibatagu stabilitasi valtozatat. Zonoidokra a terfogatszorzat minimuma a parallelepipedonra vetetik fel: belattuk ennek stabilitasi valtozatat, optimalis hibatagrenddel. Belattuk a Prekopa-Leindler egyenlotlenseg stabilitasat 1 dimenzioban, es paros fuggvenyekre n dimenzioban.

Rogers fedesi tetelet javitottuk: $\mathbb{R}^n$-ben barmely konvex test eltoltjaibol van $O(n \log n)$ surusegu fedes, ami egy testracs $O(\log n)$ szamu eltolt peldanyabol all.

A sikban, legfeljebb 1 sugaru korok elhelyezesere, barmely ket, altaluk le nem fedett, d tavolsagu pont osszekotheto a korokon kivul halado $(1,273... + o(1)) \cdot d$ hosszu uttal.

Korkonvex alakzatok kozeliteset vizsgaltuk beirt es koreirt korpoligonok segitsegevel. Kulonbozo metrikakban (terulet es keruletkulonbseg, Hausdorff metrika) aszimptotikus formulakat bizonyitottunk, amelyek a klasszikus McClure-Vitale eredmenyek analogjai.

A transzverzalis problemaval foglalkoztunk, kor, ill. konvex lemez eltoltjaira. T: minden lemeznek van kozos szeloje. $T(k)$: minden k lemeznek van kozos szeloje. t-diszjunkt eltoltak: a sulypontbol t-szeresre nagyitott eltoltak diszjunktak. Danzer klasszikus tetelet elesitettuk: korokre, amelyek $\sqrt{3}/2$-diszjunktak, fennall $T(5) \Longrightarrow T$. Ha $t \in [2/\sqrt{3}, \sqrt{2}]$, ill. $t \in [1, 2/\sqrt{3}])$, es a korok szama eleg nagy ($\geq N_3(t)$, ill. $\geq N_4(t)$), akkor $T(3) \Longrightarrow T$, ill. $T(4) \Longrightarrow T$.

Adott konvex lemez eltoltjaira, ha azok t-diszjuktak, es t eleg nagy, akkor $T(3) \Longrightarrow T$. Itt az optimalis t-k, amik a lemeztol fuggnek, a $[\sqrt{2}, 2]$ intervallumot toltik ki. Az intervallum vegpontjai az ellipszisre ill. a parallelogrammara eretnek el. Ha viszont itt t akarmilyen kicsi, van egy a lemeztol fuggetlen $k(t)$, melyre $T\left(k(t)\right) \Longrightarrow T$.

Belattuk a sikon a teruletszorzat problemara az also ill. felso becslesek stabilitasat, optimalis rendben. Az also becslesnel a Banach-Mazur tavolsagot hasznaltuk, a felsonel a beirt/koreirt ellipszissel valo legjobb teruleti kozelitest.

$\mathbb{R}^n$-ben, $n \geq 3$-ra, barmely adott lapteruletekkel rendelkezo konvex politopok terfogatainak infimuma 0.

S^2, $\mathbb{R}^2$, H^2 eseten leirtuk azon nem-ures belseju zart konvex halmazok parjait, melyek barmely kongruens peldanyainak metszete tengelyesen szimmetrikus. S^d, H^d eseten, ket C^2_+ hataru konvex testre, ha a fenti feltetel centralis szimmetriaval all fenn, akkor a testek kongruens gombok.

$P, Q \subset \mathbb{R}^2$ veges, $|P| = m$, $|Q| = n$-re a $P + Q$-ban konvex helyzetben levo pontok szama $O(m^{2/3} + n^{2/3} + m + n)$.

n diszjunkt $\mathbb{R}^d$-beli konvex halmazra van olyan pont, amelybol kiindulo barmely felegyenes legfeljebb $dn/(d+1)$ halmazt metsz. Ez a sikra eles.

Halmazrendszerek metszetgrafjait vizsgaltuk. A halmazokra vonatkozo kulonbozo feltevesek mellett, a tetszoleges grafokra vonatkozo Ramsey-tetel, szeparalo halmaz merete, Turan-fele extremalis grafelmeleti tetelek lenyeges erositeseit kaptuk.

Aszimptotikusan majdnem pontosan meghataroztuk, legfeljebb hany szin kell, hogy barmely n csucsu graf pontjait kiszinezhessuk, ugy hogy barmely csucsnak szomszedsagaban legyen olyan pont, melynek szine a szomszedsagon belul nem ismetlodik (conflict-free colouring).

Belattuk Gromov egy sejteset: vannak olyan tetszolegesen nagy meretu, de korlatos foku $(d+1)$-uniform hipergrafok, melyekre, alkalmas $c(d) > 0$ mellett, a csucsok barmely $\mathbb{R}^d$-be valo beagyazasa eseten, van $\mathbb{R}^d$-nek olyan pontja, amely a hipereleknek megfelelo szimplexeknek legalabb $c(d)$-szereseben benne van.

$d > 2$-re, minden n-re van n db. paronkent erinto sima szigoruan konvex test $\mathbb{R}^d$-ben.

$f(d,n)$ a minimalis szam, hogy $[0,1]^d$ lefedheto n db. legfeljebb ekkora atmeroju tengelyparhuzamos teglatesttel. $f(d,n)$-re also, felso becsleseket adtunk, ill. bizonyos esetekben pontosan meghataroztuk.

$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow$ minden n csucsu es $m \geq n^{1+\varepsilon}$ elu G grafnak van G' reszgrafja, $(1-\delta)m$ ellel, $\mathrm{cr}(G') \geq (1-\varepsilon)\mathrm{cr}(G)$ (cr a metszesi szam).

n altalanos helyzetu pont a sikon, 2 szinnel szinezve, meghataroz legalabb $cn^{4/3}$

ures haromszoget egyszinu csucsokkal.

$C \subset \mathbb{R}^2$ fedes-felbonthato, ha letezik $k(C)$, hogy ha a sik $k(C)$-szeresen fedett C eltoltjaival, akkor ez a fedes ket osztalyba oszthato, hogy mindket osztaly fedes. C nyilt konvex, es van 3 szakasz a hataran, melyek altal meghatarozott egyenesek C-t tartalmazo haromszoget hataroznak meg $\Longrightarrow C$ fedes-felbonthato.

Ismert: $r \leq 12$-re egy r-kromatikus graf metszesi szama lagalabb annyi, mint a teljes K_r grafe. Ezt kiterjesztettuk $13 \leq r \leq 16$-ra.

n pont a sikon bejarhato egy Hamilton korrel ugy, hogy minden pontban legalabb $\pi/3$-at kanyarodunk, ami bizonyos n-ekre pontos.

Egy graf metszesi szama, monoton-metszesi szama, par-metszesi szama a lerajzolasahoz szukseges metszeseknek, x-monoton gorbekkel valo lerajzolasahoz szukseges metszeseknek, ill. a lerajzolasahoz szukseges metszo elparoknak minimalis szama. Ezen mennyisegek kozott vannak nyilvanvalo egyenlotlensegek. A forditott iranyban viszont: az egyik mennyiseg a masiknak egyszeru fuggvenyeivel becsulheto.