

A T61311 OTKA pályázat zárójelentése

Áttekintés

A pályázat 1 fős. A közlemények listája 25 elemből áll. Ezek között van:

10 konferencia-előadás (ide számít a 2011. márciusban esedékes workshop Barcelonában, mert az utazási költségeket ebből az OTKA-ból fedeztem)

2 külföldi meghívott szemináriumi előadás

egy MTA doktori értekezés

egy társszerkesztőként megjelentetett konferencia proceedings kötet

3 konferenciacikk (ezeket a Mathscinet folyóiratcikkeknek tekinti: Modern Physics Letters B, impakt faktor 0,512)

8 folyóiratcikk (ebből 2 lektorálás alatt van, egy pedig kéziratban; mindhárom cikkhez megadtam a pdf file elérését). Megjelenési helyek: Internat. Math. Res. Notices, J. Math. Anal. Appl, Inverse Problems, J. Phys. A, Int. J. Comput. Sci. Math.

A pályázat ideje alatt, 2009-ben szereztem meg az MTA doktora címet, az OTKA témájához tartozó területen (Inverz feladatok lineáris differenciáloperátorokon).

Apagy Barnabás fizikussal közösen nemzetközi konferenciát szerveztünk 2007. augusztus 27. és 31. között Siófokon „International Conference on Inverse Quantum Scattering Theory” címmel (<http://www.math.bme.hu/~horvath/iqs>). A konferencia egyik plenáris előadója Barry Simon, a ma élő egyik legnagyobb matematikus, a Schrödinger operátor és általában a matematikai fizika első számú szakértője volt. Más neves előadóink is voltak, mint pl. Alexander Ramm, Werner Scheid, Anne Boutet de Monvel, Peter Perry és Boris Zakhariiev. A Proceedings-kötet 2008-ban jelent meg.

A két legfontosabb publikáció

- a. M. Horváth and M. Kiss: *Stability of direct and inverse eigenvalue problems for Schrödinger operators on finite intervals*, International Mathematics Research Notices, Advance Access doi:10.1093/imrn/mp210, 11(2010), 2022-2063.

A dolgozat témája a sajátértékek stabil függése az operátortól véges intervallumon vett Schrödinger operátor esetén. Kiss Mártonnal beláttuk, hogy a sajátértékek eltérésének négyzetösszegével azonos nagyságrendű a potenciálok eltérésének négyzetintegrálja, ha az eredeti sajátértékekből alkotott trigonometrikus rendszer Riesz bázist alkot a megfelelő L^2 térben. Ez az eredmény már abban a klasszikus esetben is új, ha a sajátértékeket két spektrumból, a Dirichlet-Dirichlet és a Dirichlet-Neumann spektrumból vesszük, de a bizonyítás érvényes akkor is, ha akár minden sajátértéket különböző spektrumból veszünk. Azt is igazoltuk, hogy a sajátértékek eltérésének p-normája becsülhető a potenciálok

eltérésének q -normájával pontosan akkor, ha p legalább 2, a fordított egyenlőtlenség pedig pontosan akkor, ha p legfeljebb 2. Itt q a p duálisa, és a trigonometrikus rendszer bázistulajdonsága mellett azt is fel kell tenni, hogy a biortogonális rendszer egyenletesen korlátos. Végül becslést adtunk a potenciálok integrálfüggvényének eltérésére abban az esetben, amikor csak véges sok sajátérték ismert valamilyen hibakorláttal. Ez két spektrum úniójára Marletta és Weikard 2005-ös tétele; az általuk adott bizonyításból a mi esetünkbe semmit sem lehetett beépíteni, a mi bizonyítási technikánk alapja az általam 2005-ben írt cikk az inverz sajátérték-feladat unicitásáról.

b. M. Horváth: *Spectral shift functions in the fixed energy inverse scattering*, (submitted), 2011.

A dolgozat letölthető a közlemények listájában megadott linkről. A fő eredmény az inverz szórás feladat unicitásának igazolása. Ez egy az 1950-es évek óta vizsgált témakör, fontosságát az adja, hogy a kvantummechanika több területén a szórás adatok megfigyelése szinte az egyetlen információforrás. Eddig a rögzített energia melletti inverz szórás feladat unicitása csak exponenciálisan lecsengő potenciálokra volt elérhető (Novikov 1994.). A dolgozatban megmutattam az unicitást 2-nél magasabbrendű polinomiális lecsengésre is. Ez már majdnem az optimális eredmény, mert 1,5 rendű polinomiális lecsengésnél ismert ellenpéldák mutatják, hogy az unicitás nem teljesül. Ugyancsak ebben a cikkben adtam meg a Krein-féle spektrális eltolásfüggvény fixenergiás változatát. A fogalmat M. G. Krein vezette be 1962-ben a rezolvens-operátorral kapcsolatos nyomformula kapcsán. A témakör a 90-es évek óta vett új lendületet, amikor Gesztesy, Simon, Holden, Makarov, Poltoratskii és mások munkássága nyomán kiderült, milyen jól használható ez a fogalom különböző operátorok inverz spektrálméletében. A dolgozatban megadtam a Krein függvény néhány ismert tulajdonságának megfelelőjét fixenergiás szórásra. Végül aszimptotikus képletet adtam a nagy indexű fázistolásokra a potenciál aszimptotikus viselkedésének ismeretében.

A többi eredmény bemutatása

M. Horváth and M. Kiss: *On the stability of inverse scattering with fixed energy*, Inverse Problems 25(2009), 015011, 2009.

A cikkben a fázistolások perturbációjából képzett véges differenciákkal sikerült felírni a potenciálok eltérése súlyozott L_1 -normájának pontos nagyságrendjét. Ez az eredmény, bár pontos, a magasrendű differenciák hibaérzékenysége miatt mérési adatok esetén nem használható. Abban az esetben, amikor csak véges sok fázistolás ismert adott hibakorláttal (alkalmazásokban ez tipikus helyzet), a potenciálok különbségének súlyozott L_1 -normáját sikerült becsülni simasági pótfeltevés mellett.

M. Horváth and M. Kiss: *Stability of direct and inverse eigenvalue problems: the case of complex potentials*, (submitted), 2011

Ez az első kiemelt cikk folytatása; letölthető a közleménynél megadott linkről. Amikor valós helyett komplex potenciálok sajátértékeit vizsgáljuk, a fő nehézség nem az önadjungálttság elvesztése, hanem az, hogy véges sok sajátérték esetén multiplicitás jelenhet meg. Az ezekhez tartozó fővektorláncok kezelése sok új gondolatot, ötletet igényelt. A cikkben igazoltuk az első kiemelt cikknél ismertetett állítások megfelelőit némileg módosított feltételekkel.

M. Horváth: *Partial identification of the potential from phase shifts*, J. Math. Anal. Appl., 2011

A cikk fő eredménye, hogy a fixenergiás szórási adatokból egyszerűen azonosítható a potenciálfüggvény nagy távolságokon. Konkrétan: annak, hogy két potenciál megegyezzen minden $r > A$ értékre, szükséges és elégséges feltétele, hogy a megfelelő szórási amplitúdók különbsége egy $\frac{1}{2}$ rendű, legfeljebb A típusú egész függvény legyen.

M. Horváth: *Notes on the distribution of phase shifts*, Proceedings of the International Conference on Inverse Quantum Scattering Theory, 27-31. August, Siofok, 2007, Modern Physics Letters B vol 22, No 23, 2163-2175, 2008.

M. Horváth: *Inequalities between the fixed-energy phase shifts*, Int. J. Comput. Sci. Math. 3(2010), 132-141., 2010.

M. Horvath and O. Safar: *Inequalities between fixed energy phase shifts II*, (manuscript), 2011. (letölthető a közleményeknél megadott linkről)

A fázistolások sorozatának bonyolult a belső struktúrája: a sorozat felismerhető bármely olyan (akár 0 relatív sűrűségű) részsorozatából, amelyek indexeinek reciprokösszege végtelen. Ez Ramm 1999-es tétele. Ezért érdekes a fázistolás-sorozat eloszlásának vizsgálata, amely sokkal bonyolultabbnak mutatkozik, mint a sajátértékek eloszlásának Ashbaugh és mások által kutatott tulajdonságai.

Az első cikkben pontos alsó és felső korlátot adtam minden egyes fázistolásra, Bessel függvények felhasználásával.

Barry Simon 1999-ben publikálta az inverz spektrálmélet által egy új felépítést, mely az úgynevezett A -függvényen alapul. Az A -függvény Laplace-transzformáltjával kifejezhető több klasszikus spektrálméleti fogalom, mint például a Weyl-Titchmarsh m -függvény, a spektrálfüggvény és egyes szórási adatok. Simon a fő eredményeket két Annals of Math-cikkben publikálta. Később Remling egzakt jellemzést adott az A -függvényekre. Az Inequalities between the fixed-energy phase shifts c. cikkemben megmutattam, hogy ez a leírás visszavezethető egy jóval korábbi, a spektrálfüggvényre adott, Gelfandtól és Levitantól származó jellemzésre. Ugyanitt végtelen sok egyenlőtlenséget bizonyítottam a fázistolások között, ha a potenciál kompakt tartójú és legfeljebb 1 értékű. A bizonyítás felhasználja az A -függvény exponenciális momentumai és a fázistolások között általam talált kapcsolatot. A harmadik cikkben az első két fázistolás között bizonyítottunk több egyenlőtlenséget. Egyelőre azt vizsgáljuk, lehet-e becsléseinket élesíteni.

B. Apagyí, M. Horváth and T. Pálmai: *Semi-analytic equations to the Cox-Thompson inverse scattering method at fixed energy for special cases*, Proceedings of the International Conference on Inverse Quantum Scattering Theory, 27-31. August, Siofok, 2007, Modern Physics Letters B vol 22, No 23, 2191-2199., 2008.

B. Apagyí, M. Horváth and T. Pálmai: *Simplified solutions of the Cox-Thompson inverse scattering method at fixed energy*, J. Phys. A 41(23)(2008), 235305, 2008.

B. Apagyí and M. Horváth: *Solution of the inverse scattering problem at fixed energy for potentials being zero beyond a fixed radius*, Proceedings of the International Conference on Inverse Quantum Scattering Theory, 27-31. August, Siofok, 2007, Modern Physics Letters B vol 22, No 23, 2137-2149., 2008.

Ez a három dolgozat az inverz szórás problémakörének alkalmazói oldalához tartozik; az elméleti levezetések inkább az én, a problémafelvetések és esettanulmányok szerzőtársaim

munkái. Az első két cikk egy speciális rekonstrukciós eljárásról, a Cox-Thompson módszerről szól, amely fázistolásokból állítja elő a potenciált. A cikkekben ennek a módszernek egy módosítását adtuk meg és vizsgáltuk. Nevezetesen az adatoknak az index paritása szerint elkülönített használatával stabilabb eljárás adódott. A harmadik cikkben egy új eljárást adtunk meg, amely a Gelfand-Levitan integrálegyenlet input magfüggvényét egy momentumfeladat megoldásaként keresi. Kiderült, hogy ha itt a minimális normájú megoldást használjuk, az sok esetben jól közelíti a kötött állapotokat is.

Budapest, 2011-03-02

Horváth Miklós