A K61007 sz. OTKA-pályázat szakmai záróbeszámolója

Nagy előrelépést tettünk a Leavitt-(út)algebrák elméletében. A C^*-algebrák elméletében a 70-es években vezették be a Cuntz-algebrákat, és ezek azóta is a kutatások homlokterében állnak. Az ún. Elliott-program a Cuntz-algebrák és különböző általánosításaik topologikus K-elmélet segítségével történő jellemzését tűzi ki célul. A Leavitt-algebrák a Cuntz-algebrák gyűrűelméleti megfelelői, amelyeket Leavitt 25 évvel korábban vezetett be. Jelen kutatásaink során sikerült elérnünk az Elliott-program algebrai megfelelőjét: konkrét generátorok megadásával bebizonyítottuk, hogy az $L_{(1,n-1)}$ Leavitt-algebrát egyértelműen meghatározza az algebrai K_0-csoportja a szabad ciklikus modulus által definiált K_0-beli elem pozíciójával együtt. Minthogy a Cuntz-algebrák a megfelelő Leavitt-algebrák teljes burkaként is előállíthatók, azért ezzel egyben új, teljesen algebrai és konstruktív bizonyítást adtunk arra a C^*-algebrákról szóló nevezetes eredményre, miszerint a Cuntz-algebrákat teljesen jellemzi a (topologikus) K-elméletük. Módszerünk az $L_{(1,n-1)}$ Leavitt-algebra számos automorfizmusának konkrét leírására ad lehetőséget. Bebizonyítottuk még egy, a Cuntz-algebrák elméletében fontos és nagyon hasznos egyértelműségi tétel (az ún. Gauge-invariant Uniqueness Theorem) algebrai változatát, amely egész számokkal fokszámozott algebrák közötti bizonyos homomorfizmusok injektivitását garantálja. Ennek fő alkalmazásaként eldönthető, hogy bizonyos gráfokhoz tartozó ún. Leavitt-útalgebrák izomorfak-e, ennek segítségével pedig megmutattuk, hogy Leavitt-útalgebrák egy osztályában a K-elméletük egyértelműen jellemzi az algebrákat.

A kommutatív gyűrűk feletti mátrixokra vonatkozó klasszikus Cayley–Hamilton-tétel jelentősége közismert. A PI-gyűrűk elméletében a T-prím T-ideálok leírása mutatja a Grassmann-algebra feletti mátrixok és szupermátrixok fontosságát. A Grassmann-algebra és még általánosabban Lie-nilpotens gyűrűk feletti mátrixokra már korábban sikerült invariáns Cayley–Hamilton-azonosságot találnunk. Ennek a munkának a folytatásaként invariáns baloldali és jobboldali Cayley–Hamilton-azonosságot adtunk meg tetszőleges gyűrű feletti $n \times n$-es mátrixokra, generikusan megkonstruálható kommutátorelemeket tartalmazó mátrix együtthatókkal. Itt a mátrix együtthatók megjelenése újdonságnak számít, ennek ellenére a klasszikus tétel eredményünk egyszerű speciális eseteként adódik. A Cayley–Hamilton-azonosságot és az ezzel rokon algebraicitás fogalmát is használtuk mátrixgyűrűk bizonyos nevezetes részgyűrűinek a vizsgálatában abból a szempontból, hogy ezek a részgyűrűk zártak-e az inverz képzésére. Egy baloldali Noether-gyűrű feletti teljes mátrixgyűrűnek minden, a skaláris mátrixokat tartalmazó részgyűrűje zárt az inverz képzésére. Hasonló állítás érvényes egy Lie-nilpotens gyűrű feletti teljes mátrixgyűrűre. Ezek általánosításaként igazoltuk, hogy tetszőleges PI-gyűrű feletti teljes mátrixgyűrűnek az ún. strukturális részgyűrűi zártak az inverz képzésére. Arra is rámutattunk, hogy egy alapgyűrű feletti bizonyos méretű teljes mátrixgyűrűn teljesülő Dedekind-végességi feltétel miképpen befolyásolja az ugyanezen alapgyűrű feletti lényegesen nagyobb méretű strukturális mátrixgyűrűknek az inverzképzésére való zártságát és Dedekind-végességét. Közismert (bár nehezen látható be), hogy a Dedekind-végesség nem öröklődik egy gyűrűről a felette vett 2×2-es teljes mátrixgyűrűre sem; tudomásunk szerint egyik tételünk az első olyan eredmény, amely a Dedekind-végesség bizonyos öröklődését garantálja.

Cayley–Hamilton típusú azonosságot találtunk a Lie-feloldhatóság azonosságát teljesítő gyűrűk feletti 2×2-es mátrixokra. A skalár együtthatókat a szóban forgó mátrix hatványainak és azok bonyolultabb szorzatainak a nyomát felhasználva kapjuk. Azt is megmutattuk, hogy két kvadratikus elem által generált algebra beágyazható az alaptest algebrai lezártja feletti egyváltozós polinomgyűrű teljes 2×2-es mátrixalgebrájába. Eredményeket nyertünk az említett két elem által generált algebra centrumáról is. Ez a munka ahhoz a korábban vizsgált kérdéshez is kapcsolódik, hogy lehet-e a teljes mátrixalgebrát két idempotens elemmel generálni. Nyilvánvaló következményként kapjuk, hogy a (test feletti) 3×3-as és az ennél nagyobb teljes mátrixalgebrát nem lehet két kvadratikus elemmel generálni.

Sikerült leírnunk a 2×2-es ún. általánosított felső háromszög mátrixgyűrűk automorfizmuscsoportját a mátrix diagonálisának első, ill. második helyén lévő elemekből álló erősen felbonthatatlan gyűrűk és a mátrix bal felső 2×2-es sarka által meghatározott blokkfelbontásban szereplő bimodulus automorfizmuscsoportjának a segítségével.

Formulát adtunk az ideálok számára az olyan $n \times n$-es felső háromszög mátrixgyűrűkben, amelyeknél az alapgyűrű ideáljainak a hálója véges láncok direkt szorzata. Ilyen formula (Catalan-számokkal) eddig csak a test feletti felső háromszögmátrixok esetében volt ismert.

Sikerült megadni a lineáris algebra néhány alapvető fogalmának és eredményének hálóelméleti általánosítását. Vektortér helyett az alterek hálóját, lineáris leképezés helyett az altérhálón természetes módon indukált leképezést tekintjük. Így lehetővé válik bizonyos hálómorfizmusokra bizonyítani a dimenziótételt, a Fitting-lemmát és nilpotens esetben a Jordan-féle normálalakról szóló tételt is. Következményként egy tetszőleges gyűrű feletti féligegyszerű modulus nilpotens endomorfizmusainak teljes jellemzését kapjuk a Jordan-normálbázis felhasználásával. A klasszikus esetben egy mátrix centralizátorának és dupla centralizátorának a meghatározása a Jordan-féle normalalak segítségével történik. Így nem meglepő, hogy a fenti eredményeket sikerült bizonyos nem kommutatív gyűrűk feletti mátrixok, illetve modulus-endomorfizmusok centralizátorainak a leírásához felhasználnunk. Lokális gyűrűk feletti féligegyszerű modulusok esetén teljes jellemzést adtunk egy tetszőleges nilpotens endomorfizmus centralizátor- és dupla centralizátor-algebráiról. A centralizátorban teljesülő polinom-azonosságokról is sikerült eredményeket kapnunk, sőt, a klasszikus esetben a PI-fokszámra is pontos értéket nyertünk.

Fontos eredményeket értünk el a kommutatív gyűrűk oszthatósági elméletében. Itt a már korábban bevezetett, de eddig alig vizsgált Bezout-monoidok látszanak kulcsszereplőnek. Velük axiomatikusan vizsgálható nemcsak a Bezout-gyűrűk, hanem általánosabban a Fuchs László által bevezetett aritmetikai gyűrűk végesen generált ideáljainak multiplikatív elmélete is. (Az utóbbi osztály magában foglalja a féligöröklődő gyűrűket.) Vizsgálataink arra az észrevételre épülnek, hogy a részbenrendezett struktúrák leírásában szokásos, minden szűrőre alapozott felbontás itt nem alkalmas, ezek helyett a szorzásra is zárt m-prím szűrőket kell alapul venni. Leírtuk a faktorképzéssel, ill. a lokalizálással keletkező homomorfizmusokat, majd ezek felhasználásával az összes homomorfizmusra adtunk leírást. Ennek érdekessége, hogy a Bezout-monoidok kongruenciáit a 0 és az 1 osztálya együttesen határozza meg. Felbontási tételt adtunk a szemiprím Bezout-monoidokra, megmutatva, hogy a minimális spektrumuk kompakt. A prím spektrum, ill. a maximális spektrum felhasználásával Grothendieck-féle és Pierce-féle kévefelbontást is bizonyítottunk minden Bezout-monoidra. Távlati célunk a reprezentációs probléma megoldása: előállítható-e minden Bezout-monoid valamely Bezout-gyűrű oszthatósági félcsoportjaként? Ez irányban megmutattuk, hogy bármely féligöröklődő Bezout-monoid előállítható egy féligöröklődő Bezout-gyűrű oszthatósági félcsoportjaként. Eljárást adtunk még féligöröklődő Bezout-monoidok konstruálására egy hálószerűen rendezett Abel-csoport és annak (nem feltétlenül különböző) idempotens endomorfizmusaiból álló Boole-algebra segítségével.

Gyűrűk radikálelméletének egy újabb, meglepő kapcsolatát találtuk. A kategóriákat az „ideg" funktor segítségével szimpliciális halmazként tekintve kiterjesztettük a faktorizációs rendszer fogalmát egy kategória morfizmusairól egy tetszőleges szimpliciális halmaz 1-szimplexeire. Megmutattuk, hogy ha ezt a konstrukciót egy alkalmas (pl. félig-Abel) kategória rövid egzakt sorozatainak alkalmasan definiált szimpliciális halmazára alkalmazzuk, akkor éppen a Kuros–Amitsur radikál fogalmát kapjuk. Más szóval, a faktorizációs rendszerek és a Kuros–Amitsur radikálok egyaránt egy szimpliciális halmazok segítségével definiált fogalom speciális esetei.

Bebizonyítottuk Zassenhaus sejtésének gyengített változát, az ún. Kimmerle-sejtést a sporadikus egyszerű M_{12} Mathieu-csoport esetében. A bizonyításban fontos szerepet játszik a Luthar és Passi által bevezetett módszer, valamint a véges p-csoportok Gruenberg–Kegel-gráfja. A már említett Luthar–Passi módszerrel beláttuk Kimmerle sejtését a sporadikus egyszerű Higman–Sims-csoportra a csoportgyűrűje normalizált egységcsoportjának a vizsgálatával. Ha K pozitív karakterisztikájú test és a KG csoportalgebra Lienilpotens, akkor a felső (ill. alsó) Lie-nilpotencia-index legfeljebb eggyel nagyobb, mint a kommutátorcsoport rendje. Ismertek voltak azok a csoportok, amelyekre a fent említett indexek maximálisak vagy majdnem maximálisak. Most meghatároztuk azokat a csoportokat, amelyekre ezek az indexek az ezt megelőző értéket veszik fel.

Egy Abel-csoportok közti epimorfizmus λ-tiszta, ha projektív minden λ-nál kevesebb elemmel generált Abel-csoportra nézve. Bebizonyítottuk, hogy nem megszámlálható, reguláris λ-ra egy kotorziócsoport λ-tiszta projektív dimenziója pontosan akkor nagyobb 1-nél, ha a torziómentes részének számossága legalább λ. Ez Muro, Neeman és Rosický kérdéséhez kapcsolódik: vane olyan gyűrű, amely felett minden λ-ra létezik egynél nagyobb λ-tiszta dimenziójú modulus? (Beleértve a megszámlálható végtelen számosságot is.)

Mint ismeretes, felületszingularitások feloldásaiban a függvények multiplicitása a kivételes diviziókon filtrálást indukál a függvények gyűrűjén, sőt, az univerzális Abel-lefedés függvényeinek gyűrűjén is. Splice-quotient szingularitások esetén az univerzális Abel-lefedés függvénygyűrűje szép egyenletrendszerrel definiálható (a konvergens hatványsorok gyűrűjében). Megmutattuk, hogy ez a filtrálás monomiális: azaz egy hatványsor pontosan akkor van benne a filtrálás egy szintjében, ha a hatványsor tagjai (monomok) is a filtrálás ugyanazon szintjén vannak. (A monomokról könnyű eldönteni, hogy a filtrálás mely szintjein vannak.) Ezzel a filtrálás algebrai-kombinatorikai nyelven leírható, és csak a szingularitás topológiai tulajdonságaitól függ, az analitikus tulajdonságoktól nem. A maximális ideál hatványai alkotta filtrálás viszont az analitikus tulajdonságoktól is függ, amint azt egy egyszerű példán megmutattuk. Ez érzékeny az egyenletrendszerben a magasabb fokú tagokra, amelyek a topológiát nem befolyásolják.

A 12 éve bevezetett és azóta alapvetően fontosnak bizonyult félig-Abel kategóriák elméletében több jelentős eredményünk született. Ezek alapja az a felismerés, hogy az Ursini által a 70-es években bevezetett univerzális algebrai ideálelmélet éppen a félig-Abel varietásokról és azok egy közvetlen általánosításáról szól. Megfeleltetést létesítettünk az univerzális algebrai ideálelmélet fogalmai és eredményei, valamint kategóriaelméleti fogalmak és eredmények között – itt olyan kérdésekről van szó, amelyek egy része a két algebrai ágnak egészen a kezdetéig nyúlik vissza, de a kapcsolatukra idáig nem derült fény. Több, meglehetősen technikainak tűnő univerzális algebrai fogalom kategóriai megfelelője egyszerű, könnyen érthető. E téren a legmeglepőbb eredményünk az, hogy az ideálok éppen a normális részalgebrák (= kongruencia-magok) homomorf képei, és ez minden bázisponttal ellátott reguláris kategóriában igaz.

A félig-Abel kategóriák ún. „régi típusú" axiómarendszerében nem volt világos, hogy a Hofmann-axióma független-e a többi axiómától. Most sikerült ezt igazolnunk: a Hofmann-axióma elhagyásával megmaradt axiómarendszer által definiált kategóriákat univerzális algebrai analógia nyomán ideál-meghatározott kategóriáknak nevezve egy univerzális algebrából származó példa azt mutatja, hogy az ilyen kategóriák nem feltétlenül Malcev-kategóriák, így nem lehetnek félig-Abelek. Megmutattuk azt is, hogy még a Malcev-féle ideál-meghatározott kategóriák sem feltétlenül félig-Abel kategóriák, sőt, ez még akkor sem igaz, ha csak algebrák varietásaira szorítkozunk.

A félcsoportok struktúraelméletében az egyik legfontosabb eszköz a legnagyobb félhálófelbontás. Ez funktor, amely egyben az általános Kuros–Amitsur radikálelmélet egyik kiemelt példája is. Mindezek ismeretében meglepő, hogy eddig még nem vizsgálták a legnagyobb félhálófelbontás kategórikus tulajdonságait. Az adjungált funktor tétel értelmében a legnagyobb félhálófelbontás funktora megőriz minden kolimeszt, a kérdés tehát az, hogy mely limeszek őrződnek meg. Ezt megvizsgálva azt találtuk, hogy a válasz legtöbbször negatív, de bizonyos esetekben megőrződést is tudtunk igazolni. Így pl. megmutattuk, hogy ez a funktor megőrzi a véges (direkt) szorzatokat, de nem minden végtelen (direkt) szorzatot.