

A pályázat négy éve alatt nagyon sikeresen dolgoztunk és sok szép matematikai eredményt igazoltunk. Nem igazán matematikai eredmény, de meg kell említeni, hogy Toth Geza 2008-ban megkapta az MTA doktora címet, továbbá Barany Imre a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagjának, Füredi Zoltán pedig rendes tagjának választották meg 2010-ben. Az eredményekből néhány jelentősebbet ismertetünk az alábbiakban.

Barany Imre többféle témában dolgozott az utóbbi négy évben. Ezek közül jelentős eredményeket ért el véletlen politópokkal kapcsolatban, például centralis határelőzést tartalmazó tétel bizonyított abban az esetben, mikor a kiinduló test politóp (Matthias Reitznerrel közösen), illetve Gauss politópokra (Van H Vuval közösen). Ezenkívül általános also becslést adott véletlen politóp terfogatánál és csúcshalmazon szórására. Konvex halmazbeli véletlen pontthalmazból maximalisan hanyat lehet kiválasztani úgy, hogy azok mind konvex helyzetben legyenek? Ez a kérdés rácspontok esetén merült fel először. A véletlen esetben Barany Imre és Ambrus Gergely érte el ebben az irányban az első és elég pontos eredményeket, ebben az irányban további kutatások folynak, mert számos érdekes kérdés van még nyitva. Megemlíteném, hogy Barany Imre áttekintő cikk írására kapott felkérést a Bulletin of the AMS folyóirattól. A cikk már meg is jelent Random points and lattice points in convex bodies címmel.

Barany Imre folytatta kombinatorikus geometria kérdések vizsgálatát. Például a sok társszerzős "Very colourful theorems" című cikkben Caratheodory, Tvebreg, és Kirchberger teteleinek egy közös és messzire vezető általánosítását igazolták. Matousekkel közösen azt bizonyították, hogy a színezett Caratheodory tételben legalább  $d^{2/5}$  tarka szimplexet lehet találni, ami nagyságrendileg pontos.

Barany Imre és Por Attila (részen Pavel Valtrral közösen) Fekete és Woeginger egy régóta nyitott problémáját oldotta meg. A kérdés az volt, hogy vajon minden véges síkbeli halmaz elemei sorbarendezhetők úgy, hogy az így adódó torottvonal minden szöge legalább  $\alpha$  legyen, valamilyen pozitív  $\alpha$ -al. Új módszert vezettek be, amivel sikerült  $\alpha = 20$  fokot bizonyítani, továbbá ezt az eredményt kiterjeszteni magasabb dimenziókra is. Barany és Por a diszkrét és végtelen pontthalmazok esetére is igazolta ilyen sorbarendezés létezését kicsit kisebb,  $\alpha=10$  fokos szöggel.

A topológia módszerei egyre gyakrabban és egyre sikeresebben alkalmazhatók geometriai kérdések vizsgálatánál. Barany Imre P. Blagojeviccsal és Szucs Andrassal közösen igazolta, hogy egy síkbeli konvex halmazt fel lehet darabolni három egyenlő területű és egyenlő kerületű konvex részre. A fő nehézséget az okozza, hogy a részek konvexek, emiatt a megfelelő topológikus térnek csak bizonyos részét kell tekinteni, illetve megérteni a topológiáját. Ebben az irányban további fejlemények várhatók. Megemlíteném még, hogy Barany (Castroval és Hubarddal közösen) igazolta, hogy  $d$ -dimenzióban minden  $d+1$  jöl-szeparált konvex halmaz adott ( $\alpha$ ) arányban egyetlen hipersíkkal szétvágható, sőt azt is, hogy csak egy ilyen  $\alpha$ -metszet van. Itt is topológia kellett a bizonyításban.

Ennek az eredménynek Kincses János egy nagyon érdekes folytatást és kiterjesztést bizonyított: meghatározta konvex halmazok alfa-metszeteinek topológiai típusát. Belátta, hogy a kérdéses tér diffeomorf egy gömbfelülettel. Egyben élesítette S. E. Cappel, J. E. Goodman, J. Pach, R. Pollack, M. Sharir, R. Wenger, eredményét, amely a közös érintők topológiai típusára vonatkozik. Ezek az eredmények szigorúan konvex halmazokra érvényesek. Ebből egy cikk született. Kincses vizsgálta meg a nem szigorúan konvex esetet is. Ekkor is alkalmazható a szigorúan konvex eset módszere, diffeomorfizmus helyett homeomorfizmus várható. Az egész egy konvex halmazokra vonatkozó implicit függvény tételre múlna, ami nagyon érdekes volna és ami egyelőre még nyitott.

Dolnikovnak a komplex keresztpolitóp Helly dimenziójára vonatkozó kérdése, valamint a Hanner politópok vizsgálata irányította a figyelmet konvex halmazok  $L_1$  összege Helly-dimenziójának meghatározására. Kincsesnek éles alsó és felső korlátot adott a Helly dimenzióra. Ezen módszereket alkalmazva sikerült Hanner politópok egy családjára kiszámolni a Helly dimenziót.

Furedi Zoltan (tarsszerzővel) modern, egyszerű bizonyítást adott Erdős és Rogers 1959-ből származó következő klasszikus eredményére: An  $n$ -dimenziós tér mindig lefedhető bármely adott konvex test eltolt példányaival, nem sűrűbben mint  $20n \log n$ . Az új bizonyítás a feladat diszkretizálása (vegesse alakítása) után a Lovász lemmán alapuló véletlen módszerrel működik. Furedi Zoltan másik szép eredménye szerint egy háromszög homotetikus eltoltjaival, és a tükörképek homotetikus eltoltjaival nagyon gazdaságosan lehet lefedni az eredeti háromszöget.

Furedi Zoltan többek között  $H$ -design-okkal foglalkozott. A definíció így szól: Legyen  $H$  egy fix graf, grafok egy halmaza,  $P = \{H_1, \dots, H_m\}$ -t,  $n$ -pontos  $H$ -pakolásnak nevezzük, ha (1) minden  $H_i$   $H$ -val izomorf, (2) ezek a kópiák eldiszjunktak, (3) uniójuknak összesen legfeljebb  $n$  pontja van. Ha ezen unió éppen a teljes graf  $K_n$  akkor perfekt  $H$ -pakolásról (vagy  $H$ -design-ről) beszélünk. Wilson (1972-75) nevezetes teteleiből következik, hogy minden  $P$  kiterjesztető egy  $H$ -design-re néhány pont és további kópiák hozzávetéssel. Sőt, ha  $f(P)$  jelöli a hozzáveendő pontok minimális számát akkor  $f(P) < cn$ , ahol  $c$  csak a  $H$ -tól függ. Nemrégiben Hilton és Lindner egy kisebb átlagos érték el, belátták, hogy  $f(C_4) = o(n)$  (valójában  $O(n^{3/4})$ -et bizonyítottak. Furedi, tarsszerzővel (Lehel Jenő), belátta hogy  $f(C_4)$  aszimptotikusan pont  $n^{1/2}$ . Ez a téma még rengeteg érdekes problémát tartalmaz és nemzetközileg egy igen sokat vizsgált kutatási irány. A kódelmélet egyik fő kutatási iránya olyan kódok vizsgálata, ahol az üzenetet vissza lehet következtetni komoly sérülés, pl az üzenetek összekeveredése esetén is. Ezeket hívjuk felülírt (superimposed) kódoknak. Furedi számos eredményt publikált ebben a most ismét megújuló és divatos témakörben, elsősorban az ún. geometriai kódok konstruálásáról.

Solymosi József additív kombinatorikai illetve additív számelméleti problémákkal foglalkozik, különösen tekintettel azokra a problémákra ahol geometriai módszerek hatékonyan alkalmazhatóak. Ilyen módszerrel sikerült például az eddigi legjobb becslést adnia arra, hogy legalább mekkora kell legyen  $|A+A|+|A*A|$ , ha  $A$  egy  $n$

elemu, valos szamokbol allo halmaz. Ez Erdos Pal egy regota ismert es sokat vizsgalt kerdesere. Solymosi egyik tovabbi szep (I. Labaval kozosen elert) eredmenye egy Pach-Sharir tipusu incidencia tetel bizonyos  $R^d$ -beli algebrai gorbekre, es  $R^3$ -beli algebrai feluletekre. Ennek az eredmenynek meg sok alkalmazasa lesz.

Toth Geza grafok metszesi szamaival es lerajzolasaival foglalkozott. Egy  $G$  graf metszesi szama az el-metszesek minimalis szama  $G$  osszes lerajzolasara. Ennek variacioja a kovetkezo ket parameter. A par-metszesi szam  $\text{pair-cr}(G)$  a metszo elparok minimalis szama, a paratlan metszesi szam  $\text{odd-cr}(G)$  pedig az egymast paratlan sokszor metszo elparok minimalis szama. Nyilvan minden grafra  $\text{odd-cr}(G) \leq \text{pair-cr}(G) \leq \text{cr}(G)$ .

Toth Geza olyan grafokat konstrualt, amelyekre  $0.855 \cdot \text{pair-cr}(G) > \text{odd-cr}(G)$ . Ez Pelsmajer, Schaefer es Stefankovic korlatjat javitja. A konstrukcionk egyben valaszt ad Tutte egy regi kerdesere. Kisse javitva Valtr korlatjat, azt is belatjak hogy ha  $G$  par-metszesi szama  $k$  akkor (hagyomanyos) metszesi szama  $\text{cr}(G)$  legfeljebb  $O(k^2/\log^2 k)$ .

Pach Janos es Toth Geza bebizonytottak hogy ha egy graf lerajzolható a toruszra metszes nelkul, es a maximalis fokszama  $d$ , akkor a sik-metszesi szama legfeljebb  $cdn$  vagyis linearis. Erosebb es altalanosabb valtozatot is bizonytottak, ahol a torusz helyett tetszoleges irányithato felulet szerepelhet, es a fokszamokra vonatkozó korlatozast is kikuszoboltek. Kesobb ezeket az eredmenyeket Pach es Toth (Boroczky Karollyal kozosen) altalanositottak nem irányithato feluletekre.

Egy sikbeli  $C$  halmazt fedes-felbonthatonak mondunk, ha letezik olyan  $k$  konstans, hogy ha a sik  $k$ -szorosan le van fedve  $C$  eltoltjaival, akkor az eltoltak ket osztalyba sorolhatóak ugy hogy mindket osztaly kulon is lefedje a sikot. 1980-ban Pach Janos vetette fol a kerdest, hogy mely halmazok fedes-felbonthatoak. Azt sejtette hogy minden konvex halmaz az. 1986-ban bebizonyította hogy a kozeppontosan szimmetrikus nyilt sokszogek fedes-felbonthatoak. Toth Geza Tardos Gaborral együtt igazolta, hogy minden nyilt haromszog fedes-felbonthato. Kesobb Palvolgyi Domotorral azt is bebizonyította hogy minden nyilt konvex sokszog fedes-felbonthato. Pach es Toth Tardos Gaborral együtt belattak, hogy a konkav sokszogek NEM fedes-felbonthatok.

A "discharging method" (talan sulyozasos modszer) egy hatekony technika amit gyakran alkalmaznak sikgrafokkal, vagy sikba rajzolt grafokkal kapcsolatos bizonyitasokban. Toth Geza es Rados Radoicic egy osszefoglalo cikkben attekintik a modszer legfontosabb alkalmazasait. Egy uj alkalmazast is adnak, amellyel megjavtjak Pach es Sharir egy eredmenyet, mely szerint ha  $G$   $n$  darab konvex sikbeli halmaz metszesgrafja, es nem tartalmaz 4 hosszú kort, akkor csak linearisan sok  $(cn)$  ele lehet. Ezt altalanostottak 4 hosszú kor helyett  $K_{2,3}$ -ra es a 6 hosszú korre.

Egy sikbeli ponthalmaz rendtipusa az osszes harmas irányitasainak a listaja. Hasonloan definialhatjuk paronként diszjunkt konvex halmazok csaladjanak is

a rendtpusat. Legyen  $A, B, C$  három, paronként diszjunkt konvex halmaz. Ha  $A, B, C$  közös konvex burkan mindhárom halmaz egy-egy intervallumként jelenik meg, akkor az  $A, B, C$  harmas irányítása egyértelmű, megegyezik a három megfelelő intervallum irányításával. Elképzeltető meg hogy a három halmaz közül az egyik két intervallumként jelenik meg a határon, illetve hogy meg sem jelenik. Ezekben az esetekben azt mondjuk hogy  $A, B, C$  irányítása nem egyértelmű. Konstruálunk olyan,  $n$  darab paronként diszjunkt konvex halmazból álló rendszert, ahol mindegyik harmas irányítása egyértelmű, de az így kapott rendtípus nem reprezentálható pontokkal. Sőt, legfeljebb  $n^{\lceil \log 8 / \log 9 \rceil}$  darab választható ki közülük, amelyeknek a rendtípusa pontokkal is reprezentálható. Hasonló állításokat bizonyítottunk a duális verzióban is, pszeudo-egyenes elrendezésekre.

Pach János sokoldalú és eredményes munkát folytatott a diszkrét geometria több területén is. Egy érdekes konvex geometriai eredménye a Center Point tételt terjeszti ki diszjunkt konvex halmazok véges rendszerére. Geometriai grafok keresztezodesi számának többféle definíciója van. Pach János bizonyította (részen társszerzőkkel), hogy ezek a keresztezodesi számok többé-kevésbé jól vannak rendezve. Ehhez kapcsolódó kérdés a síkbeli konvex halmazok metszetstruktúrájának leírása. Ennek egyik alapvető eszköze a Lipton-Tarjan szeparációs tételnek az a változata, amely azt állítja, hogy ha a metszetstruktúrát leíró grafnak  $m$  ele van, akkor a graf két lenyegeben egyform méretű grafra esik szét alkalmasan választott  $O(m^{1/2})$  el elhagyásával. Pach János és J. Fox sejtették, hogy ez az állítás igaz marad string-grafok, azaz olyan grafok esetén is, amelyek folytonos görbék metszetstruktúráját írják le. Pach és Fox be is bizonyította ezt abban az esetben, mikor bármely két görbe legfeljebb  $t$ -szer metszi egymást. (A  $t$ -tól való függés az  $O(\dots)$  jelölésben bujlik meg..) Teljes általánosságban viszont csak  $O(m^{3/4} \sqrt{\log m})$  méretű elvágó elhalmaz létezését tudták bizonyítani. De meg ez a gyengébb tétel is elég volt annak igazolására, hogy minden olyan  $n$  csúcsú string-grafnak, amelyben nincs teljes páros  $K_{t,t}$  részgraf, legfeljebb  $c_t n$  ele van, itt  $c_t$  egy csak a  $t$ -tól függő állandó. A tétel egy másik alkalmazása azt adja, hogy a lokálisan  $f$ -szerű string-grafok globálisan is  $f$ -szerűek.

Jelen pillanatban ezek a Pach János által bevezetett módszerek vezetnek a legjobb ismert becslésekre olyan grafok maximális elszámára vonatkozóan, melyek lerajzolhatóak anélkül, hogy lenne bennük  $k$  paronként metsző él.

Por Attila (T. Müller és J-S Serenivel) grafok "határ"-át vizsgálta. Karakterizáltak azokat a grafokat, amiknek maximum 4 pont van a határon és also korlátot adtak a határpontok számára a maximális és minimális fókuszfüggvényekben. Egy grafban egy pont a határon van, ha egy másik pontból ez a pont van a legmesszebb lokálisan. Egy másik irányban Por Attila N. Lichardopol és J-S Serenivel közösen igazolta a Bermon-Thomassen sejtést  $k=3$  esetén. A sejtés azt mondja hogy ha egy irányított grafban minden pontnak a befoka legalább  $2k-1$ , akkor létezik a grafban  $k$  darab pont-diszjunkt irányított kör. A  $k=1$  eset triviális és a  $k=2$  esetet Thomassen igazolta.

Por Attila (D. Kral, E. Macajova és J-S Serenivel közösen) igazolta, hogy léteznek

univerzális Steiner hármas rendszerek, és karakterizáltak is ezeket. Egy Steiner hármas rendszer univerzális, ha bármely 3 reguláris  $G$  grafra létezik egy elszínezés a  $G$  grafon mely minden pontra a vele szomszédos 3 élre a rendszer egy hármasával színezi ki. Por Attila (P. Hamburgerrel és M. Walshal) közösen grafok Kneser-reprezentációin dolgozott. Egy graf Kneser-reprezentációja egy a pontokhoz "szín"eket rendelő függvény mely pontosan nem-szomszédos pontokhoz rendel diszjunkt színhalmazokat. Ez szoros kapcsolatban áll a frakcionális kromatikus számmal. Kétféleképpen lehet minimalizálni a reprezentációt: az összes használt szín, illetve az egyes pontokhoz használt maximális színek száma. Ugyancsak Por Attila, P. Hamburger és M. Dunkum-al közösen megjavítottuk Chudnovsky-Seymour és Sullivan egy eredményét. Az eredeti eredmény szerint, ha  $G$  egy háromszög-mentes irányított egyszerű graf, és  $k$  azon pont-párok száma amik között egyik irányba se megy él, akkor további  $k$  él elhagyásával kormentese lehet tenni a grafot. Por és társszerzői igazolták, hogy körülbelül  $0.88k$  él elhagyása már elegendő, a legjobb eredmény  $0.5k$  lehet..

Por Attila és David Wood lathatosági grafokon és blokkoló ponthalmazokon dolgoztak. Ha  $P$  egy véges ponthalmaz a síkon, akkor két pont a  $P$ -n belül "látja" egymást ha az őket összekötő szakaszon nincs a  $P$ -nek további pontja. A  $P$  által generált lathatosági graf a  $P$  pontjain ahol az élök éppen azok a pontpárok amik látják egymást. Egy  $B$  ponthalmaz blokkolja  $P$ -t, ha  $P$  bármely két pontját összekötő szakasz tartalmazza  $B$  egy pontját.