

Biológiai jelenségeket modellező késleltetett differenciál- és differenciaegyenletek vizsgálata

Doktori értekezés

GARAB ÁBEL

Témavezető:

DR. KRISZTIN TIBOR

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Szegedi Tudományegyetem

Természettudományi és Informatikai Kar

Bolyai Intézet

Szeged

2014

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Krisztin Tibornak, hogy megismertette velem a dinamikus rendszerek szépségeit. Szeretném kifejezni hálámat az érdekes problémákért és az elmúlt évek során tőle kapott rengeteg segítségért és hasznos tanácsért, amelyek nélkül ez a disszertáció nem készülhetett volna el.

Köszönettel tartozom társszerzőmnek, Dr. Bartha Ferencnek, a lendületes és remek hangulatú közös munkáért, és hogy a matematika egy számomra addig ismeretlen területébe nyújtott betekintést.

Köszönöm Dr. Hatvani László tanár úrnak az elmúlt évek során nyújtott támogatását, valamint hogy inspiráló előadásaival és feladataival már elsőéves koromban az analízis irányába terelte érdeklődésemet. Köszönet illeti Dr. Vas Gabriellát és Dr. Röst Gergelyt, akik szakmai tanácsaikkal hozzájárultak a dolgozat elkészítéséhez. Szeretnék köszönetet mondani Dr. Dénes Attilának, aki a számomra nehéz pillanatokban a közös feladatainkból orozslánrészt vállalva lehetőséget biztosított a nyugodt munkára.

Szeretném megköszönni a Bolyai Intézet, a Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola és a Jedlik Ányos Doktorjelölti Ösztöndíj támogatását, az Intézet munkatársainak és hallgató társaimnak pedig a kiváló szakmai közeget és a hasznos eszmecseréket.

Végül, de nem utolsósorban, hálás vagyok feleségemnek, Nórának, édesanyámnak, Dr. Bogdány Anikónak és édesapámnak, Dr. Garab Győzőnek, valamint tágabb családomnak és barátaimnak a sok szeretetért, bátorításért és segítségért, amit tőlük kaptam.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	7
1.1. A disszertáció felépítése és tartalma	8
1.2. Jelölések, definíciók	11
2. Neuronhálózatok modellezése	13
2.1. Bevezetés	13
2.1.1. Az idegsejtek felépítése és az ingerület terjedése	13
2.1.2. Egy általános modell	14
2.1.3. A késleltetés szükségessége	16
2.2. A modell definiálása, az eredmények rövid összefoglalása	18
2.3. Előkészületek	21
2.4. Periodikus pályák száma és jellemzése egy egyenlet esetén	29
2.4.1. Előkészületek	29
2.4.2. Periodikus pályák: szükséges feltétel létezésre, elegendő feltétel unicitásra	30
2.4.3. Periódusfüggvény, elegendő feltétel létezésre	44
2.5. Egy speciális gyűrűszerű rendszer periodikus megoldásai	50
3. Másodrendű differenciaegyenletek globális stabilitásvizsgálata	59
3.1. Egy diszkrét idejű neuronmodell	60
3.1.1. Előkészületek	62
3.1.2. Fő eredmény: a globális stabilitás szükséges és elegendő feltétele	69
3.2. Egy Ricker-féle populációdinamikai modell	80
3.2.1. A kompakt pozitív invariáns halmaz megkonstruálása	82
3.2.2. A fixpont vonzástartományához tartozó környezet konstruálása	83
3.2.3. A trajektóriák vizsgálata, a 3.15. Tétel bizonyítása	93
3.3. Nyitott kérdések	94
Összefoglalás	97
Summary	101

Irodalomjegyzék**105****Függelék****111**

1. fejezet

Bevezetés

Az időben változó biológiai folyamatok differenciálegyenletekkel történő modellezése bő kétszáz éves múlttal rendelkezik, és a huszadik század eleje óta folyamatosan és intenzíven fejlődik; egyre több élettani és ökológiai jelenség válik érthetővé, előrejelezhetővé az effajta modellek segítségével.

A biológiában, a fizikában, a kémiában és a közgazdaságban is a vizsgált rendszer pillanatnyi megváltozása többnyire nem csupán a jelenlegi állapottól, hanem korábbi állapotaitól is függ. Ha ezt a tényt nem hagyjuk figyelmen kívül, úgy a modellünkben úgynevezett késleltetett differenciálegyenletekkel, azaz funkcionál-differenciálegyenletekkel kell számolnunk. Ezek fontosságára – a mechanikai rendszerekben – Picard hívta fel a figyelmet a matematikusok 1908-as nemzetközi kongresszusán.

A késleltetett hatás figyelembevétele a vizsgálatot lényegesen megnehezíti, ugyanis az így természetesen adódó fázistér a kezdeti függvények Banach-tere lesz, ami végtelen dimenziós, szemben a közönséges differenciálegyenletekkel történő modellezéssel, ahol kizárólag véges dimenziós problémákkal találkozunk. Noha számos példa mutatta, hogy a késleltetés figyelmen kívül hagyása a modell használhatatlanságához vezethet, a matematikai apparátus hiánya az 1950-es évekig megakadályozta az ilyen jellegű problémák kvalitatív vizsgálatát. Azóta a tudományterület rohamosan fejlődik és a legkülönbélebb területeken alkalmazzák, úgy mint a populációdinamikában, járványos betegségek terjedésének vizsgálatában, (mesterséges) neuronhálózatok vagy egyéb sejtbiológiai folyamatok modellezésében, hogy csupán néhány példát említsünk a biológiai alkalmazásokból, a teljesség igénye nélkül. Az ezen területeken felmerülő problémák megoldásai egyrészt fontos jelenségek megértését eredményezik, másrészt új elméleti matematikai kutatási irányok kialakulását motiválják. A funkcionál-differenciálegyenletek általános elméletének tárgyköréből az érdeklődő olvasónak a [24] és a [17] könyveket ajánljuk.

Késleltetett differenciaegyenletekkel tudjuk a legjobban modellezni azokat a jelenségeket, amelyeknél a vizsgált mennyiség adott időközönként változik és a megváltozásának mértéke függ a korábbi állapotaitól is. Ennek egy tipikus példája egy olyan faj

populációjának dinamikája, ahol a szaporodás az év meghatározott időszakára korlátozódik és az egyedek nem ivaréretten születnek. Késleltetett differenciaegyenletekhez juthatunk egy funkcionál-differenciálegyenlet diszkretizálásával is.

Az értekezésben neuronhálózatokat modellező késleltetett differenciál- és differenciaegyenletekkel, valamint egy diszkrét idejű késleltetett populációdinamikai modellel foglalkozunk. A populációdinamika talán a legrégebb óta kutatott ága a matematikai biológiának: története egészen Fibonacciig nyúlik vissza. A tudományterület Lotka és Volterra 1920-as évekbeli modellje óta dinamikusan fejlődik, amit az utóbbi évtizedekben a számítógépes szimulációk adta lehetőségek még jobban felgyorsítottak. A populációdinamika történetének alapos áttekintését adja Bacaër [4] monográfiája. Agyunk működésének megértése korunk egyik nagy kihívást jelentő feladata, melynek folyamatában már jelentős szerep jut a matematikának is. A fontossága ma már nemcsak az orvoslás szempontjából vitathatatlan, hiszen az agy működését utánzó áramköröket a mesterséges intelligenciában is használják bizonyos típusú feladatok megoldására. 1943-ban McCulloch és Pitts [49] voltak az elsők, akik matematikai modellt adtak az idegsejtekből álló hálózatokra. A modellben egy idegsejt állapotát annak elektromos potenciáljával írjuk le. Ha figyelembe vesszük az elektromos jel terjedési sebességét, akkor a modellben megjelenik a késleltetett visszacsatolás. Ez a tudományterület is kiterjedt irodalommal rendelkezik, mégis nagyon kevés olyan rendszer van, amire a teljes dinamika ismert lenne. Ebben a témában a [26, 69] és [12] könyveket ajánljuk az olvasó figyelmébe.

A dolgozatban periodikus megoldások létezésére és egyértelműségére, valamint egyensúlyi helyzetek globális aszimptotikus stabilitására adunk szükséges és elegendő feltételeket a paraméterek függvényében. Az adott tételek hozzájárulnak a modellek globális dinamikájának jobb megértéséhez.

1.1. A disszertáció felépítése és tartalma

A dolgozat e rövid áttekintése után a következő 1.2. részben bevezetünk néhány olyan jelölést és fogalmat, amelyeket az egész dolgozat során használunk majd. Ezután a 2. fejezetben egy neuronhálózati modellel fogunk foglalkozni. A 2.1–2.3. részekben a témakörbe való bevezetés után definiáljuk a vizsgálandó egyenletrendszert, definiáljuk a fejezetben használt fogalmakat és felelevenítünk néhány korábbi eredményt, amelyekre a fejezet során szükségünk lesz.

A fejezetben az alábbi neuronhálózatokat modellező késleltetett differenciálegyenletrendszert vizsgáljuk:

$$\dot{x}^j(t) = -\alpha x^j(t) \pm f(x^{j+1}(t - \tau_j)), \quad j = \{0, 1, \dots, n\}, \quad (1.1)$$

ahol $\alpha > 0$ és $\tau_i \geq 0$ paraméterek, valamint a i indexek modulo $(n + 1)$ értendők. Két különböző típusú $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ visszacsatolási függvény mellett vizsgáljuk a rendszert. Az egyik esetben f egy páratlan, sima függvény, mely rendelkezik egy bizonyos konvexitási tulajdonsággal. A másik esetben $f(x) = \beta(|x + 1| - |x - 1|)$ alakú szakaszonként lineáris függvény.

Az (1.1) egyenletrendszer nemkonstans periodikus megoldásaival foglalkozunk, amelyek kiemelt fontossággal bírnak a neuronhálózatok elméletében. Az előbbi típusú visszacsatolási függvényeket elterjedten alkalmazzák valódi neuronhálózatok modellezésében (lásd [26, 69]), az utóbbi pedig a leggyakrabban használt visszacsatolás bizonyos mesterséges neuronhálózatok, úgynevezett celluláris neurális hálók elméletében (lásd [12]), amelynek nagyon fontos szerepe van a mesterséges intelligencia kutatások terén.

A 2.4. részben az $n = 0$ esetet vizsgáljuk. Ekkor a sima esetben a globális attraktorról egy nagyon részletes kép áll rendelkezésre Krisztin, Walther és Wu [37] monográfiájának, valamint [8, 32, 33, 36] cikkeknek köszönhetően. Speciálisan, ismertek a periodikus pályák létezésére és egyértelműségére vonatkozó szükséges és elegendő feltételek ($\alpha, f'(0)$ és τ függvényében). A 2.4. részben ezen eredmények analogonjait bizonyítjuk a szakaszonként lineáris típusú visszacsatolásra.

Természetesen adódik a gondolat, hogy ezt a szakaszonként lineáris függvényt közelítsük a sima függvényosztályban lévő függvényekkel, majd az azokra vonatkozó eredményekből vonjunk le következtetéseket. A globális attraktor azonban csak alulról félig folytonos, így ez a megközelítés nem alkalmas arra, hogy unicitási vagy nemlétezési eredményeket bizonyítsunk vele. További technikai nehézséget jelent, hogy ekkor a visszacsatolás nem mindenhol differenciálható és nem szigorúan monoton, ezért a megoldásoperátor nem sima és nem injektív. Ennek következtében az ebben a témakörben alapvető fontosságú Mallet-Paret- és Sell-féle Poincaré-Bendixson-típusú tétel [47] sem alkalmazható közvetlenül, mint ahogyan a sima esetben.

Vizsgáljuk még ebben a részben a lassan oszcilláló periodikus megoldás periódusfüggvényét is, amit aztán a 2.5 részben tudunk kamatoztatni.

A 2.5. részben az $n \geq 1$ esettel foglalkozunk mindkét típusú visszacsatolás mellett. A rész fő eredményei, hogy szükséges és elegendő feltételeket adunk a relatíve gyorsabban oszcilláló periodikus megoldások létezésére és egyértelműségére vonatkozóan, valamint elegendő feltételeket fogalmazunk meg a lassabban oszcilláló periodikus megoldások létezésére illetve nemlétezésére. Ehhez szükségünk lesz a 2.4. rész eredményeire. Ezen tételek Yi, Chen és Wu [11, 71] eredményeinek egy általánosítását adják.

A 3. fejezetben két másodrendű, paraméteres differenciaegyenlet egyensúlyi helyzetének globális aszimptotikus stabilitására adunk szükséges és elegendő feltételt a para-

méterek függvényében. A 3.1. részben vizsgálatunk tárgya az alábbi differenciaegyenlet:

$$x_{n+1} = mx_n - \alpha \tanh(x_{n-1}), \quad (1.2)$$

ahol $(\alpha, m) \in \mathbb{R}^2$. A fenti egyenletre gondolhatunk úgy, mint egy diszkrét idejű neuron-modellre, ugyanakkor egy egyszerű transzformációjával egy Clark-típusú populációdinamikai modellt nyerhetünk [13].

A 3.2. részben az alábbi késleltetett Ricker-típusú populációdinamikai modellt vizsgáljuk:

$$x_{n+1} = x_n e^{\alpha - x_{n-1}}, \quad (1.3)$$

ahol α pozitív paraméter. A modellt Ricker állította fel 1954-ben [59] (akkor még késleltetés nélkül) és azóta az egyik legelterjedtebb populációdinamikai modell. Levin és May 1976-ban megfogalmazott egy sejtést a fenti modellt is magába foglaló késleltetett differenciaegyenletek egy osztályára, miszerint a pozitív egyensúlyi helyzet lokális aszimptotikus stabilitása maga után vonja annak globális attraktivitását (lásd [41]). Mi ezt a sejtést igazoljuk az (1.3) egyenletre vonatkozólag.

A globális aszimptotikus stabilitás bizonyítása a két egyenlet esetében hasonló módon megy. Különböző, számítógéppel végzett *megbízható* számításokat ötvözzünk analitikus eszközökkel. A bizonyítás nagy vonalakban abból áll, hogy a Neimark–Sacker-bifurkáció (rezonáns) normálalakját felhasználva, annak együtthatóira a paraméterekben egyenletes becsléseket adunk analitikus eszközök és intervallumaritmetika segítségével. Ezután meg tudjuk adni az egyensúlyi helyzet egy olyan paramétertől független környezetét, amelyben az egyensúlyi helyzet vonzása érvényesül (minden olyan paraméter esetén, amikor az egyensúlyi helyzet lokálisan stabil). Ezt követően intervallumaritmetikai módszerek segítségével megmutatjuk, hogy a fázistér bármely pontjából indítva a megoldást, a trajektória belép ebbe a kis környezetbe. Tudomásunk szerint ez a fajta megközelítés új, és bízunk benne, hogy egy hatékony módszer fejlődik ki belőle a differenciaegyenletek, közönséges differenciálegyenletek – és idővel – a késleltetett differenciálegyenletek egyensúlyi helyzeteinek és periodikus pályáinak vizsgálata terén.

A fejezet végén megfogalmazunk néhány, a témakörhöz köthető nyitott kérdést, valamint ismertetjük az ezekkel kapcsolatos közelebbi és távlati céljainkat.

A disszertációt az eredmények magyar és angol nyelvű rövid összefoglalásával zárjuk.

Felhívjuk a figyelmet, hogy a 3.1.2. szakasz II. részében, valamint a 3.2.3. szakaszban a bizonyításban során használt intervallumaritmetikai és gráfrepresentációs technikákat jelen értekezésben nem részletezzük, azok ugyanis Bartha Ferenc eredményeit képezik. Az érdeklődő olvasó megtalálhatja a módszerek részletes leírását a [7] dolgozatban és az abban található hivatkozásokban.

Megjegyezzük továbbá, hogy a 3.2.2. szakaszban számos hosszú formula kiszámítására kerül sor, melyeket a könnyebb olvashatóság érdekében a dolgozat végén található függelékben sorolunk fel.

1.2. Jelölések, definíciók

Jelölje rendre $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{N}$ és \mathbb{N}_0 a komplex, a valós, a pozitív egész, valamint a nemnegatív egész számok halmazát. Az f függvény értelmezési tartományára a $\text{dom } f$ jelölést használjuk.

Az n dimenziós euklideszi térben a $q \in \mathbb{R}^n$ körüli $\delta \geq 0$ sugarú nyílt gömböt az euklideszi normában illetve a maximumnormában jelölje rendre $B(q; \delta)$ és $K(q; \delta)$. A $q = 0 \in \mathbb{R}^n$ esetén használni fogjuk a rövidebb B_δ és K_δ jelöléseket. Mivel ez sehol nem okoz félreértést, így a $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \delta\}$ nyílt körlapra a komplex síkon is a B_δ jelölést fogjuk használni.

Egy $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz esetén jelölje $\text{int}(H)$, $\text{ext}(H)$, $\text{bd}(H)$, valamint $\text{cl}(H)$ rendre a H halmaz topológiai belsejét, külsejét, határát, illetve lezártját. Egy c egyszerű zárt síkbeli görbének képhalmazát jelölje $|c|$. A Jordan-féle görbetétel szerint ennek komplementere egy korlátos és egy nem korlátos, összefüggő síkbeli halmazból áll, melyeket jelölje rendre $\text{int}(c)$, valamint $\text{ext}(c)$.

Ahol ez nem okoz félreértést, a sor és oszlopvektorok között nem fogunk különbséget tenni. Ha az \mathbb{R}^n téren dolgozunk, akkor $c \in \mathbb{R}$ esetén legyen $\underline{c} = (c, \dots, c) \in \mathbb{R}^n$. Definiáljuk két kétdimenziós komplex vektor skalárszorzatát a következőképp: $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$ és $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2$ esetén legyen $\langle \xi, \zeta \rangle = \overline{\xi_1} \zeta_1 + \overline{\xi_2} \zeta_2$.

Általában f függvény értelmezési tartományát és képterét jelölje rendre $\text{dom } f$, illetve $\text{ran } f$. Legyen a továbbiakban $f: \text{dom } f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ekkor $k \in \mathbb{N}_0$ esetén jelölje f^k az f függvény k -adik iteráltját, vagyis $x \in \text{dom } f \cap \text{ran } f^k$ esetén $f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$, ahol $f^0(x) = x$. Az $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}_0}$ halmazt az $x \in (\text{dom } f \cap (\bigcap_{k=1}^{\infty} \text{ran } f^k))$ pont f leképezés melletti *trajektóriájának* nevezzük.

Vezessük be egy $f: \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $c \in \text{int}(\text{dom } f)$ esetén a

$$\delta_{\text{inf}}(f; c) := \liminf_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{és} \quad \delta_{\text{sup}}(f; c) := \limsup_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

jelöléseket. Ha f korlátos, akkor legyen $M_f := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Az $x^* \in \text{dom } f$ az f *fixpontja*, ha $f(x^*) = x^*$. Egy $q \in \text{dom } f$ pont az f függvény egy *nemvándorló pontja*, ha q bármely U környezetére és bármely $N \geq 0$ egészre létezik $k \geq N$ egész szám, amelyre $f^k(U \cap \text{dom } f) \cap U \cap \text{dom } f \neq \emptyset$ teljesül.

Az f függvény x^* fixpontja *lokálisan stabil*, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy $\|x - x^*\| < \delta$ esetén $\|f^k(x) - x^*\| < \varepsilon$ fennáll minden $k \in \mathbb{N}$ egészre, ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi normát jelöli. Az x^* fixpont *lokálisan aszimptotikusan stabil*, ha lokálisan stabil

és létezik $\delta > 0$, hogy $\|x - x^*\| < \delta$ esetén $\|f^k(x) - x^*\| \rightarrow 0$, amint $k \rightarrow \infty$, valamint a fixpont *instabil*, ha nem lokálisan stabil. Azt mondjuk, hogy az $U \subseteq \text{dom} f$ halmaz az x^* vonzástartományában van, ha bármely $u \in U$ esetén $\|f^k(u) - x^*\| \rightarrow 0$, amint $k \rightarrow \infty$. Ha az f függvény x^* fixpontjának vonzástartományába esik f teljes értelmezési tartománya, akkor azt mondjuk, hogy x^* globálisan attraktív. Ha x^* lokálisan stabil és globálisan attraktív, akkor *globálisan aszimptotikusan stabilnak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $U \subseteq \text{dom} f$ halmaz *pozitív invariáns* f -re nézve, ha bármely $u \in U$ esetén $f(u) \in U$ teljesül.

A 3. fejezet számítógéppel segített részeinél a leképezésekhez irányított gráfokat rendelünk. Egy ilyen gráf csúcsai a leképezés értelmezési tartományának részhalmazai lesznek, az élei pedig a lehetséges átmeneteket jelöli a fenti halmazok között a leképezés mellett. A gráf akkor tükrözi a hozzá tartozó f leképezés viselkedését, ha bármely $x \in \text{dom} f$ és $f(x)$ esetén minden x -et tartalmazó csúcsból vezet él minden $f(x)$ -et tartalmazó csúcsba.

Az \mathbb{R}^2 zárt részhalmazainak egy \mathcal{P} rendszerét a $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz egy *partíciójának* nevezzük, ha $|\mathcal{P}| := \cup_{p \in \mathcal{P}} p = \mathcal{D}$ és $\forall p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ esetén $p_1 \cap p_2 \subseteq \text{bd}(p_1) \cup \text{bd}(p_2)$ fennáll. A \mathcal{P} partíció *átmérőjét* a következőképp definiáljuk:

$$\text{diam}(\mathcal{P}) = \sup_{p \in \mathcal{P}} \sup_{x, y \in p} \|x - y\|.$$

Legyen $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{D} \subseteq \text{dom} f$, továbbá legyen \mathcal{P} a \mathcal{D} -nek egy partíciója. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ gráf az f leképezés egy \mathcal{P} szerinti *gráfrepresentációja*, ha létezik $\iota: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}$ bijekció, melyre a következő implikáció fennáll bármely $u, v \in \mathcal{V}$ esetén:

$$f(\iota(u)) \cap \iota(v) \neq \emptyset \Rightarrow (u, v) \in \mathcal{E}.$$

A fenti bijekciót kihasználva a partíció elemeire hivatkozhatunk úgy, mint csúcsokra és fordítva. Az érdeklődő olvasó részletesebb leírást találhat függvények gráfrepresentációról a [7] dolgozatban és az abban lévő hivatkozásokban.

Adott X szám vagy számhalmaz esetén jelöljön $[X]$ egy olyan halmazt, mely magába foglalja X -et. Hangsúlyozzuk, hogy noha az $[X]$ halmaz legtöbbször egy számítógépes kalkuláció eredményeképp adódik, $X \subseteq [X]$ ekkor is garantált. Az intervallumaritmetikai módszerek helyes használata lehetővé teszi, hogy minden további számítás is matematikailag megbízható legyen.

2. fejezet

Neuronhálózatok modellezése

2.1. Bevezetés

Az ember viselkedéséért és gondolkodásáért felelős szerv, a központi idegrendszer irányítóközpontja az agy, melyet több, mint százmilliárd egymással összeköttetésben álló idegsejt (neuron) alkot. Az idegsejtek az idegrendszer legkisebb önálló egységei. Alakjuk, méretük és elhelyezkedésük nagyban különbözhet, felépítésük azonban meglehetősen egységes és az ingerület továbbítása is ugyanazon elektronikai és kémiai alapokon történik, így lehetőségünk nyílik egységes modellezésükre. A szükséges biológiai ismereteket Wu [69] könyve alapján foglalom össze.

2.1.1. Az idegsejtek felépítése és az ingerület terjedése

A neuron sejtteste tartalmazza a sejtmagot és más sejtalkotókat, melyek a sejt működéséhez szükségesek. Ebből ágaznak szét gyökérszerű nyúlványokként a sejt dendritjei és axonjai. A sejttest és a dendritek rendelkeznek egy speciális ingerületfogadó területtel, az úgynevezett szinapszissal. Az axon a sejttest szálszerű nyúlványa, mely számos elágazás után más idegsejtek szinapszisaihoz kapcsolódik. Ilyen módon egy neuron akár 10000 másikkal is továbbíthatja az ingerületet.

Az idegsejt nyugalmi állapotában – azaz, amikor külső inger nem éri – megfigyelhető, hogy a sejtben és a sejt közötti térben a nátrium- és káliumkationok, illetve a kloridionok és a disszociált aminosavak koncentrációja különböző. A legnagyobb különbség a nátrium- és káliumionok eloszlásában van: a sejtben belül a káliumion koncentrációja magasabb, míg a nátriumioné alacsonyabb, mint a sejt kívüli térben. Ennek köszönhetően nyugalmi állapotban a sejt belsejének a sejt kívüli térhez viszonyított relatív elektromos potenciálja – melyet nyugalmi potenciálnak nevezünk – körülbelül -60 mV és -80 mV között van. Ezt az állapotot a membránban működő Na-K-pumpa tartja fenn.

Az ingerület elektromos impulzus formájában terjed a sejten belül és a sejtek közt egyaránt. A sejten belül elektromos vezetés érvényesül, míg a sejtek közti szinapszisonnál kémiai mechanizmusok segítségével történik a jel továbbítása. Inger hatására az idegsejt membránja depolarizálódik: a membrán felszíne 20–30 millivolttal pozitívabb lesz a külsőnél. Ezt a gyors potenciálváltozást nevezik akciós potenciálnak. Ekkor a membrán nátriumion áteresztőképessége többszázszorosára növekszik, így a nátriumionok a sejtbe áramlanak. Ennek köszönhetően a sejt belsejének relatív potenciálja átmenetileg pozitív lesz. A depolarizáció az ingerlés területével szomszédos részekre is átterjed a membránon, így az elektromos impulzusok hullámszerűen végighaladnak a neuronon egészen az axonvégig. Az axonvég és a hozzá szinapszissal kapcsolódó sejt membránjai között van egy körülbelül 20–30 nm nagyságú rés, ez a szinaptikus rés. Ez a távolság túl nagy ahhoz, hogy a depolarizáció az előbb leírtak szerint át tudjon terjedni a másik sejtire is, így itt ingerületátvivő anyagok segítségével megy végbe a folyamat. Aszerint, hogy mi az ingerületátvivő anyag, megkülönböztetünk serkentő, illetve gátló szinapszisokat. A serkentő szinapszis esetén az átvivő anyag az acetilkolin, mely a követő neuron membránját depolarizálja, így az ingerület továbbterjed. A gátló szinapszis esetén az átvivő anyag a γ -amino-vajsav, melynek molekulái a követő neuronhoz kapcsolódva hiperpolarizálják annak membránját, így kloridionok áramlanak be a sejtbe, mely csökkenti vagy közömbösíti a környéken lévő serkentő szinapszisok hatását. Az akciós potenciál létrejötte után a Na–K-pumpa visszaállítja az idegsejt nyugalmi potenciálját.

2.1.2. Egy általános modell

A következőkben Harvey [25] modelljét vesszük alapul és néhány egyszerűsítő feltételezéssel élünk. Egy neuronhálózat az előzőek alapján felfogható úgy, mint egy áramkör, melynek pillanatnyi állapotát az egyes sejtek potenciálja írja le az adott időpontban. Tekintsünk egy n neuronból álló hálózatot. Az egyes sejteket jelölje rendre v_1, \dots, v_n . Vezessük be a következő változókat:

- $x^i(t) = v_i$ potenciáljának eltérése t időpillanatban a nyugalmi potenciáltól,
- $Z_{ij} = v_i$ és v_j közti szinapszisban v_i axonján egy frekvenciára jutó átlagos ingerületátvivőanyag-kibocsátás mennyisége.

Így v_i állapotát x^i írja le, míg Z_{ij} -t a v_i és v_j neuronok közti *kapcsolaterősségnek* nevezzük. A továbbiakban feltételezzük, hogy Z_{ij} konstans minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén. Az x^i változása egyaránt köszönhető a sejten belüli állapotváltozásoknak (gondoljunk a Na–K-pumpa működésére), a neuronhálózaton kívülről érkező ingereknek és hálózaton belüli kölcsönhatásoknak, melyek lehetnek serkentő vagy gátló típusúak. Feltételezzük, hogy

ezek a hatások összeadódnak, vagyis:

$$\frac{dx^i}{dt} = \left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{\text{belső}} + \left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{\text{serk}} - \left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{\text{gátló}} + \left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{\text{inger}}. \quad (2.1)$$

Tegyük fel továbbá, hogy egy magára hagyott neuron potenciálja exponenciális sebességgel tér vissza a nyugalmi potenciáljához:

$$\left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{\text{belső}} = -\mu_i(x^i)x^i, \quad \mu_i(x^i) > 0.$$

A modellek többségében μ_i konstans. A továbbiakban mi is ezt feltételezzük. Feltéve, hogy a serkentő szinapszisok hatása arányos a jel frekvenciájával, a következőt kapjuk:

$$\left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{\text{serk}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Z_{ik} S_{ik}(t),$$

ahol $S_{ik}(t)$ a v_k és v_i szinapszisánál v_k axonjában jelentkező jel átlagos frekvenciáját jelöli, mely függ a jel v_k -tól v_i -ig terjedésének τ_{ik} idejétől, valamint egy Γ_k küszöbértéktől a következők szerint:

$$S_{ik} = f_k(x^k(t - \tau_{ik}) - \Gamma_k),$$

ahol $f_k : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ adott nemnegatív függvény v_k jelátviteli függvénye. Hasonlóan:

$$\left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{\text{gátló}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n c_{ik} f_k(x^k(t - \tau_{ik}) - \Gamma_k),$$

ahol $c_{ik} \geq 0$ konstansok. A fent leírtak szerint és bevezetve $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$ jelölést, a (2.1) összefüggésből a következő (Hopfield-típusú) késleltetett differenciálegyenlet-rendszert kapjuk:

$$\dot{x}^i(t) = -\mu_i x^i(t) + \sum_{k=1}^n a_{ik} f_k(x^k(t - \tau_{ik}) - \Gamma_k) + I_i(t), \quad (2.2)$$

ahol $a_{ik} \in \mathbb{R}$ konstansok, és $I_i(t)$ jelöli a neuronhálózaton kívülről v_i -be érkező külső ingert, mely függhet az időtől. Ha $a_{ik} > 0$, akkor azt mondjuk, hogy a v_k és v_i közötti kapcsolat serkentő, míg $a_{ik} < 0$ esetén gátló kapcsolatról beszélünk, a_{ik} nagysága pedig a kapcsolat erősségét írja le.

A különböző modellekben különböző jelátviteli függvények lehetnek (lásd a 2.1. ábrát). A leggyakrabban használt jelátviteli függvények a következők:

- lépcsős függvény,
- szakaszonként lineáris függvény,
- szigmoid függvény.

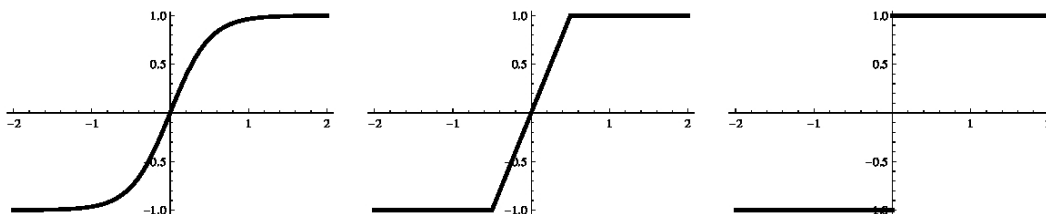
A lépcsős függvényt legtöbbször a következőképp definiálják:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Az alábbi szakaszonként lineáris függvény (és ennek lineáris transzformáltjai) nagyon gyakran használatosak úgynevezett celluláris neurális hálók modellezésekor.

$$f(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{2} = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \leq -1, \\ x, & \text{ha } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Simaságuk miatt a szigmoid függvények a legelterjedtebbek a jelátviteli függvények modellezésében, ezek közt is leggyakrabban használatosak a tangens hiperbolikus, illetve az inverztangens-típusú függvények [26].



2.1. ábra. $f(\xi) = \tanh 2\xi$, $f(\xi) = (|\xi + 0,5| - |\xi - 0,5|)$, és $f(\xi) = \text{sgn}(\xi)$ függvények.

2.1.3. A késleltetés szükségessége

Minden neuronhálózatban jelen van a késleltetés, hiszen az inger (jel) csak véges sebességgel terjedhet, ez azonban a legtöbb esetben sokkal bonyolultabb modellt eredményez, mintha ezt a paramétert elhanyagolnánk, így felvetődik a kérdés, hogy érdemes-e figyelembe venni a késleltetést, vagyis megváltoztatja-e lényegesen a megoldások dinamikáját? A válasz függ a konkrét modelltől is. Definiáljunk néhány speciális tulajdonságú hálózatot, melyek például fognak szolgálni késleltetéstől független jelenségekre.

2.1. Definíció. Tekintsük a (2.2) egyenletrendszer által modellezett neuronhálózatot. Tegyük fel, hogy bármely i -re f_i Lipschitz-folytonos egy alkalmas L_i konstanssal, $f_i(0) = 0$, $\Gamma_i = 0$, továbbá I_i konstans. Ha

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{L_i}{\mu_i} \sum_{k=1}^n |a_{ki}| < 1,$$

akkor azt mondjuk, hogy a neuronhálózat kontraktív.

Megjegyezzük, hogy ha a jelátviteli függvények tangens hiperbolikus vagy arcus tangens típusúak, akkor $f_i(0) = 0$ és f_i Lipschitz-folytonos $f'_i(0)$ konstanssal.

2.2. Definíció. Egy neuronhálózat irreducibilis, ha bármely neuronból bármely másikba létezik irányított út a kapcsolatok mentén.

2.3. Definíció. Egy hálózatot kooperatívnak nevezünk, ha – a változók esetleges transzformálása után – minden kapcsolat serkentő.

A következő tétel bizonyítása megtalálható Gopalsamy és He [21] cikkében.

2.4. Tétel. Tegyük fel, hogy a (2.2) egyenletű hálózat kontraktív. Ekkor létezik pontosan egy $x_* = (x_*^1, \dots, x_*^n) \in \mathbb{R}^n$ egyensúlyi helyzete, amely globálisan attraktív, azaz (2.2) bármely megoldására $\lim_{t \rightarrow \infty} x^i(t) = x_*^i$, $1 \leq i \leq n$.

A bizonyítást nem részletezzük; az érdeklődő olvasó megtalálja azt Gopalsamy és He [21] cikkében (Proposition 1), valamint Wu [69] könyvében (Theorem 5.2.1). A bizonyítás fő ötletét azonban közöljük, ugyanis ezt később felhasználjuk a 2.9. Lemmában.

A bizonyítás vázolata. Hogy egyetlen egyensúlyi helyzet van, az megmutatható egy fix-ponttétele segítségével. Ezek után bevezetve az $y(t) = x(t) - x^*$ jelölést és felírva rá a transzformált egyenletet kapjuk, hogy

$$D^+ |y^i(t)| \leq -\mu_i |y^i(t)| + \sum_{k=1}^n |a_{ik}| L_k |y^k(t - \tau_{ik})|,$$

ahol D^+ a Dini-féle felső deriváltat jelöli, azaz $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in [a, b]$ esetén

$$D^+ z(t) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{z(t+h) - z(t)}{h}.$$

Ezt felhasználva megmutatható, hogy

$$V(y)(t) = \sum_{i=1}^n \left(|y^i(t)| + \sum_{k=1}^n |a_{ik}| L_k \int_{t-\tau_{ik}}^t |y^k(s)| ds \right)$$

Ljapunov-függvény, pontosabban megmutatható, hogy létezik $\varepsilon > 0$, hogy a következők fennállnak:

$$\begin{aligned} D^+ V(t) &\leq \sum_{i=1}^n \left(-\mu_i |y^i(t)| + \sum_{k=1}^n |a_{ik}| L_k |y^k(t - \tau_{ik})| \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| L_k (|y^k(t)| - |y^k(t - \tau_{ik})|) \\ &= -\sum_{i=1}^n \mu_i \left(1 - \frac{L_i}{\mu_i} \sum_{k=1}^n |a_{ki}| \right) |y^i(t)| \leq -\varepsilon \sum_{i=1}^n |y^i(t)| \leq 0, \end{aligned}$$

Innen az állítás gyorsan adódik; részletekért lásd [21, 69]. \square

Vegyük észre, hogy a tételben nincs semmilyen megkötés a késleltetésre, valamint hogy egy egyenletnek pontosan ugyanazok az egyensúlyi helyzetei akár van benne késleltetés, akár nincs, így az előző tétel szerint kontraktív hálózatok esetén a megoldások

aszimptotikus viselkedése nem változik a késleltetés bevezetésével. Hasonló állítás igaz Smith [60] dolgozata szerint kooperatív, irreducibilis hálózatokra is: ha a (2.2) egyenletű hálózat kooperatív, irreducibilis, a jelátviteli függvények korlátosak, folytonosan differenciálhatóak és szigorúan monoton növekvők valamint $\tau_{ji} = \tau_j$ (vagyis a késleltetés csak a jelet kibocsájtó sejttől függ), akkor a kezdeti állapotok (kezdeti függvények) azon halmaza, melyekre a megoldások egyensúlyi helyzetéhez konvergálnak tartalmazza a fázistér egy sűrű, nyílt részhalmazát (részletekért lásd Smith [60] cikkét (Theorem 4.5), és [61] könyvét (5. fejezet, Theorem 4.1). Speciálisan, ha létezik periodikus megoldás, annak vonzástartományára „sovány”.

Most következzen a teljesség igénye nélkül néhány példa olyan jelenségekre, amiket a késleltetés idézhet elő. Ezekről bővebben olvashatunk Wu [69] könyvének 5. fejezetében és az abban található hivatkozásokban.

- *Késleltetés-indukált periodikus oszcilláció.* Ismert, hogy a késleltetés bevezetésének hatására az addig stabil egyensúlyi helyzetek – például Hopf-bifurkáció következtében – instabillá válhatnak és stabil periodikus oszcillációk keletkezhetnek. Látni fogjuk, hogy a mi esetünkben is ez a jelenség tapasztalható. Hogy a keletkező periodikus oszcilláció stabil legyen, annak szükséges feltétele, hogy legyen olyan sejt, melybe létezik olyan irányított kör a kapcsolatok mentén, hogy a körön páratlan sok gátló kapcsolat van (negatív visszacsatolás).
- *Késleltetés által indukált kaotikus oszcilláció.* Ki kell emelni, hogy a késleltetésnek köszönhető oszcilláció nem feltétlenül periodikus, sőt, akár már két neuron esetén is tapasztalható késleltetés által indukált káosz (lásd [20]).
- *Késleltetés által indukált ideiglenes oszcilláció.* Numerikus eredmények azt mutatják, hogy ideiglenes oszcilláció előfordulhat olyan hálózatokban is a késleltetés hatására, amelyben a késleltetés által indukált instabilitás kizárt. Ilyen jelenségre találtak példákat kooperatív, irreducibilis hálózatok esetén is, ahol az aszimptotikus viselkedés független a késleltetéstől. Az oszcilláció időtartama exponenciálisan nőhet a késleltetés növelésével, így olyan hosszan tarthatnak, hogy gyakorlati szempontból nem különböztethetők meg a tartós oszcillációktól (lásd [3,5,58]).

2.2. A modell definiálása, az eredmények rövid összefoglalása

Vezessük be az alábbi függvényosztályt.

2.5. Definíció. Legyen $f \in S$ pontosan akkor, ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, páratlan és szigorú monoton növekvő, továbbá $\xi \mapsto \frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)}$ szigorúan monoton csökkenő a $(0, \infty)$ intervallumon.

Vegyük észre, hogy a $\zeta \mapsto a \arctan(b\zeta)$ és $\zeta \mapsto a \tanh(b\zeta)$ függvények tetszőleges $a, b \neq 0$ esetén beleesnek az S függvényosztályba. Rögzítsük még a következő függvényt:

$$f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \leq -1, \\ x, & \text{ha } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

Vizsgálatunk tárgya ebben a részben egy $n+1$ neuronból álló egyirányú lánc lesz, melyet a következő késleltetett differenciálegyenlettel modellezünk:

$$\begin{aligned} \dot{x}^0(t) &= -\alpha x^0(t) + f_\beta(x^1(t)), \\ &\vdots \\ \dot{x}^{n-1}(t) &= -\alpha x^{n-1}(t) + f_\beta(x^n(t)), \\ \dot{x}^n(t) &= -\alpha x^n(t) + \delta f_\beta(x^0(t-\tau)), \end{aligned} \tag{2.4}$$

ahol $\alpha, \tau, \beta > 0$, $\delta \in \{1, -1\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, továbbá $f_\beta \in S$ és $f'_\beta(0) = \beta$ vagy $f_\beta = \beta f_0$. A δ paraméter előjele szerint beszélhetünk *pozitív*, illetve *negatív visszacsatolásról*, a két különböző típusú visszacsatolási függvényre pedig úgy is fogunk hivatkozni, mint a *si-ma* illetve a *szakaszonként lineáris* eset. Az utóbbi visszacsatolási függvényt előszeretettel alkalmazzák úgynevezett celluláris neurális hálóok elméletében, melyek fontos szerepet játszanak a mesterséges intelligencia (például képfeldolgozás, optimalizálási problémák) kutatásában [12]. Ezekben a modellekben a neuronok (cellák) egy d dimenziós rács rácspontjaiban helyezkednek el és a szomszédos rácspontokon lévő neuronok vannak összeköttetésben (a széleken valamilyen peremfeltétellel). A fenti modell egy egydimenziós rácson elhelyezett celluláris neurális modellnek felel meg, periodikus peremfeltétellel.

2.6. Megjegyzés. Tekintsük most a következő egyenletrendszert:

$$\dot{x}^i(t) = -\alpha x^i(t) + \delta_i f_\beta(x^{i+1}(t-\tau_i)), \quad \delta_i \in \{-1, 1\}, \quad 0 \leq i \leq n, \tag{2.5}$$

(az indexek mod $n+1$ értendő)

Vegyük észre, hogy az

$$x^0(t) = y^0(t), \quad x^i(t) = \sigma_i y^i \left(t - \sum_{j=1}^i \tau_j \right), \quad 1 \leq i \leq n$$

helyettesítéssel a (2.5) egyenlet az egyszerűbb (2.4) alakra hozható, ahol $\sigma_0 = 1$, $\sigma_i = \prod_{j=1}^i \delta_j$. Megjegyezzük továbbá, hogy az α, β és τ paraméterek közül az egyik választható 1-nek.

A (2.4) egyenletrendszer esetén a természetes fázistér a

$$\mathbb{K}_\tau = \mathbb{K}_{\tau, n} = [-\tau, 0] \cup \{1, 2, \dots, n\}$$

halmazon értelmezett folytonos valós függvények supremum-normával ellátott Banach-teret, amelyre a következő jelöléseket használjuk: $C(\mathbb{K}_\tau) = C(\mathbb{K}_\tau, \mathbb{R})$. Használni fogjuk még $\tau = 1$ esetén a $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1$, valamint a $C(\mathbb{K}) = C(\mathbb{K}_1)$ jelöléseket is. Fontos észrevétel, hogy negatív visszacsatolás, valamint pozitív visszacsatolás és $\alpha > \beta$ esetén az azonosan $\hat{0} \in C(\mathbb{K}_\tau)$ megoldás az egyetlen egyensúlyi helyzete a (2.4) egyenletrendszernek ($f_\beta \in S$, $\delta = 1$ esetén $\alpha = \beta$ értékekre is). Ha $\delta = 1$ és $\beta > \alpha$, akkor a zéró megoldáson kívül még két egyensúlyi helyzet van: $\hat{\xi}^+ = (\xi^+, \dots, \xi^+) \in C(\mathbb{K}_\tau)$ és $\hat{\xi}^- = (\xi^-, \dots, \xi^-) \in C(\mathbb{K}_\tau)$, ahol $\xi^+ > 0$ és $\xi^- = -\xi^+$.

2.7. Definíció. Legyen $t_0 \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor az $x = (x^0, \dots, x^n)$ függvény megoldása a (2.4) késleltetett differenciálegyenlet-rendszernek a (t_0, ∞) intervallumon, ha $x^0 \in C([t_0 - \tau, \infty), \mathbb{R})$, $x^i \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ és x^i folytonosan differenciálható a (t_0, ∞) intervallumon bármely $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén, valamint x kielégíti a (2.4) egyenletrendszert minden $t > t_0$ esetén. Azt mondjuk, hogy $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ megoldása a (2.4) rendszernek \mathbb{R} -en, ha megoldása annak bármely (t_0, ∞) intervallumon.

Tegyük fel, hogy x megoldása a (2.4) egyenletrendszernek a (t_0, ∞) intervallumon. Ekkor bármely $t \geq t_0$ esetén $x_t \in C(\mathbb{K}_\tau)$ legyen a következő formula által definiált:

$$x_t(\theta) = \begin{cases} x^0(t + \theta), & \text{ha } \theta \in [-\tau, 0], \\ x^\theta(t), & \text{ha } \theta \in \{1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Az alábbi tétel szerint a kezdetiérték-problémának létezik egyértelmű megoldása.

2.8. Tétel. Tetszőleges $\varphi \in C(\mathbb{K}_\tau)$ esetén létezik egyetlen x megoldása a (2.4) egyenletrendszernek a $(0, \infty)$ intervallumon, melyre $x_0(\theta) = \varphi(\theta)$ tetszőleges $\theta \in \mathbb{K}_\tau$ esetén.

Bizonyítás. A lépések módszeréből az állítás azonnal adódik. □

A $\varphi \in C(\mathbb{K}_\tau)$ függvényhez tartozó fenti megoldást jelöljük x^φ -vel.

Ebben a fejezetben a (2.4) egyenlet nemkonstans periodikus megoldásaival foglalkozunk. A 2.4. részben az $n = 0$ esetet vizsgáljuk. Ekkor az $f_\beta \in S$ esetre a dinamika teljesen ismert Krisztin, Walther és Wu [37] monográfiájának, valamint [8, 21, 32, 33, 36, 47, 48] cikkeknek köszönhetően. Speciálisan, ismertek a periodikus pályák létezésére és egyértelműségére vonatkozó szükséges és elegendő feltételek (α, β és τ függvényében), lásd 2.15. Tételt. A 2.4. részben ezen eredmények analogonjait bizonyítjuk az $f_\beta = \beta f_0$ típusú visszacsatolásra. Természetes gondolatként adódik, hogy $f_\beta = \beta f_0$ esetén próbálkozzunk a differenciálegyenlet-rendszerünk olyan approximálásával, amelyekben a visszacsatolás S (szigmoid) típusú, és az arra az esetre ismert eredményekből levonni következtetéseket. Mivel azonban a globális attraktor csak alulról félig folytonos, ezért ez a megközelítés nem alkalmas arra, hogy unicitási vagy nemlétezési eredményeket bizonyítsunk vele. További technikai nehézséget jelent, hogy f_0 nem mindenhol differenciálható és nem szigorúan monoton, így a megoldásoperátor nem sima és nem injektív.

Ennek folyományaként a Mallet-Paret- és Sell-féle Poincaré–Bendixson-típusú tétel sem alkalmazható közvetlenül.

Győri és Hartung [23] megmutatták, hogy ha $f_\beta = \beta f_0$ és $0 < \beta < \alpha$, akkor a triviális egyensúlyi helyzet globálisan attraktív, továbbá úgy sejtették, hogy $\alpha > 0$ és $\beta > 0$ tetszőleges megválasztása esetén a megoldások egyensúlyi helyzethez tartanak. Vas [66] dolgozatában megmutatta, hogy rögzített $\alpha > 0$ és $\tau > 0$ esetén létezik $\beta_0 = \beta_0(\alpha, \tau) > \alpha$, hogy $\beta \geq \beta_0$ értékekre létezik – ún. lassan oszcilláló – periodikus megoldása az egyenletnek. Nyitva maradt a kérdés, hogy $\alpha \leq \beta < \beta_0$ paraméterek esetén létezik-e periodikus megoldása az egyenletnek. A 2.4. rész 2.27. fő tételében teljes leírást adunk a periodikus megoldások számáról és típusáról a paraméterek függvényében, így speciálisan azt is belátjuk, hogy a fent említett esetben nincs az egyenletnek periodikus megoldása. Megjegyezzük, hogy ez nem elég Győri és Hartung sejtésének bizonyításához (ebben a paramétertartományban), hiszen ebben az esetben a Poincaré–Bendixson-típusú tétel nem áll rendelkezésre. Mindezek bizonyítása (vagy cáfolása) tehát továbbra is komoly kihívást jelent. A 2.4. részben vizsgáljuk még a lassan oszcilláló periodikus megoldások periódusát is a késleltetés (τ) függvényében (rögzített α és β mellett). A kapott eredmények fontos szerepet játszanak a 2.5. rész tételeinek bizonyításában.

A 2.5. részben a (2.4) késleltetett differenciálegyenlet-rendszer periodikus megoldásaival foglalkozunk az $n \geq 1$ esetben. A rész fő eredményei a 2.34. és a 2.35. Tételek, amelyekben szükséges és elegendő feltételeket adunk a relatíve gyorsabban oszcilláló periodikus megoldások létezésére és egyértelműségére vonatkozóan, valamint elegendő feltételeket fogalmazunk meg a lassabban oszcilláló periodikus megoldások létezésére, illetve nemlétezésére. Ezen tételek Yi, Chen és Wu [11,71] eredményeinek egy általánosítását adják.

2.3. Előkészületek

A következő lemma értelmében a továbbiakban kizárólag a $\beta > \alpha > 0$ esettel fogunk foglalkozni.

2.9. Lemma. *Tegyük fel, hogy $0 < \beta \leq \alpha$. Ekkor a (2.4) egyenletrendszernek nincsen nemkonstans periodikus megoldása.*

Bizonyítás. Ha $\beta < \alpha$, akkor a 2.4. Tétel értelmében az összes megoldás tart a zéró egyensúlyi helyzethez.

Tegyük fel tehát, hogy $\alpha = \beta$ és definiáljuk az alábbi függvényt, ahogy a fent említett tételben is tettük:

$$V(x)(t) = \left(\sum_{i=0}^n |x_i(t)| \right) + \beta \int_{t-\tau}^t |x^0(s)| \, ds.$$

Tegyük most fel, hogy x egy nemkonstans periodikus megoldása a (2.4) egyenletrendszernek. Vezessük be az $x^{n+1}(t) = x^0(t - \tau)$ jelölést. Ekkor a 2.4. Tételben látott gondolatmenettel adódik, hogy

$$D^+ V(x)(t) \leq \sum_{i=0}^n \left(-\alpha |x^i(t)| + \beta |x^{i+1}(t)| \right) + \beta (|x^0(t)| - |x^0(t - \tau)|) = 0,$$

fennáll bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén. Az x periodicitásából következik, hogy $V(x)(t)$ konstans, így szükségszerűen a fenti egyenlőtlenség mindenhol egyenlőségre írható. Ez az $f_\beta \in S$ esetben azzal ekvivalens, hogy $x^i(t) = 0$ bármely $t \in \mathbb{R}$ és $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén, ami ellentmondás. Az $f_\beta = \beta f_0$ esetben csak akkor kaphatunk mindenhol egyenlőséget, ha $f_\beta(x^i(t)) = \beta x^i(t)$ fennáll bármely $t \in \mathbb{R}$ és $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén. Ebből az következik, hogy x nemkonstans periodikus megoldása az $x^i(t) = -\beta x^i(t) + \beta x^{i+1}(t)$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ lineáris egyenletnek, ugyanakkor a karakterisztikus egyenlet vizsgálatával és a lineáris rendszerek általános elmélete segítségével (lásd például [24]) meg lehet mutatni, hogy ennek az egyenletnek nincs periodikus megoldása, így ismét ellentmondásra jutottunk. \square

Definiáljuk a fázistér következő projekcióit:

$$\pi^i \varphi = \begin{cases} (\varphi(i), \varphi(i+1)), & \text{ha } 0 \leq i \leq n-1, \\ (\varphi(n), \varphi(-\tau)), & \text{ha } i = n, \end{cases} \quad (2.6)$$

ahol $\varphi \in \mathbb{K}_\tau$.

Mallet-Paret és Sell [48] cikkét követve definiáljuk a következő diszkrét Ljapunov-függvényeket, melyek segítségével – többek között – kategorizálhatjuk a (2.4) rendszer periodikus megoldásait.

$$V_{\mathbb{K}_\tau}^+ : C(\mathbb{K}_\tau) \setminus \{0\} \rightarrow \{0, 2, 4, \dots, \infty\}, \quad V_{\mathbb{K}_\tau}^- : C(\mathbb{K}_\tau) \setminus \{0\} \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, \infty\},$$

$$V_{\mathbb{K}_\tau}^+(\varphi) = \begin{cases} \text{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau), & \text{ha } \text{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau) \text{ páros vagy végtelen,} \\ \text{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau) + 1, & \text{ha } \text{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau) \text{ páratlan,} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$V_{\mathbb{K}_\tau}^-(\varphi) = \begin{cases} \text{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau), & \text{ha } \text{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau) \text{ páratlan vagy végtelen,} \\ \text{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau) + 1, & \text{ha } \text{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau) \text{ páros,} \end{cases}$$

ahol $\text{sc}(\varphi, H)$ a φ függvény előjelváltásainak számát adja meg értelmezési tartományának H részhalmazán. Tehát $\varphi: \mathbb{R} \supseteq \text{dom} \varphi \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény és $H \subseteq \text{dom} \varphi$ esetén

$$\text{sc}(\varphi, H) = \sup \left\{ k \in \mathbb{N}, \text{ hogy } (s_i)_0^k \subset H \text{ szigorúan növekvő sorozat, melyre} \right. \\ \left. \varphi(s_{i-1})\varphi(s_i) < 0 \text{ bármely } i \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ esetén} \right\} \leq \infty.$$

Az üres halmaz szuprémuma legyen definíció szerint 0. Az alábbi tétel Mallet-Paret és Sell [48] 2.1., 2.2. és 2.4. Tételeinek speciális eseteként vagy azok közvetlen következményeként adódik és a dolgozatban számos alkalommal fogjuk használni.

2.10. Tétel. *Tegyük fel, hogy x megoldása a (2.4) egyenletrendszernek a (t_0, ∞) intervallumon. Legyen továbbá $V = V_{\mathbb{K}_\tau}^\pm$ attól függően, hogy a visszacsatolás pozitív vagy negatív. Ekkor fennállnak a következők:*

- (i) $t \mapsto V(x_t)$ függvény monoton nemnövekvő $t > t_0$ esetén, és amíg $x_t \in C(\mathbb{K}_\tau)$ nem az azonosan 0 függvény;
- (ii) ha $t_1 \geq t_0 + 3\tau$ olyan, hogy $0 \neq x_{t_1} \in C(\mathbb{K}_\tau)$ és $\pi^i(x) = (0, 0)$, akkor $V(x_{t_1}) < V(x_{t_0})$ vagy $V(x_{t_1}) = \infty$;
- (iii) ha $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ periodikus megoldása a (2.4) egyenletnek, akkor a $V(x_t)$ értéke véges és állandó bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén.

A (2.4) egyenletrendszer és az f_β szimmetriájából adódik az alábbi nagyon egyszerű észrevétel (lásd pl. [71, Proposition 2.2]).

2.11. Állítás. *Tegyük fel, hogy $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ megoldása a (2.4) egyenletnek. Ekkor az*

$$y = (y^0, \dots, y^n) : \mathbb{R} \ni t \mapsto (x^1(t), \dots, x^n(t), \delta x^0(t - \tau)) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

szintén megoldása a (2.4) egyenletnek.

A 2.13. Tételben a (2.4) egyenletrendszer periodikus megoldásainak legfontosabb tulajdonságait fogjuk összefoglalni, de előbb még szükségünk lesz az alábbi tételre.

2.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy x egy nemkonstans periodikus megoldása a (2.4) rendszernek. Ekkor bármely $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén x^j -nek van előjelváltása.*

Bizonyítás. Külön kezeljük a pozitív és a negatív visszacsatolású esetet. Negatív visszacsatolás esetén tegyük fel indirekten, hogy létezik $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, melyre $0 \leq x^j(t)$ teljesül bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén (a $0 \geq x^j(t)$ eset hasonlóan kezelhető). Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $j = 0$. A gondolatmenet elemi, és [71] pozitív visszacsatolásra alkalmazott ötletét követi. Mivel $\dot{x}^n(t) = -\alpha x^n(t) - f_\beta(x^0(t - \tau))$ teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, így

$$\dot{x}^n(t) \leq -\alpha x^n(t) \tag{2.8}$$

fennáll bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel x^n periodikus, így létezik $t^* \in \mathbb{R}$, amelyre $\dot{x}^n(t^*) = 0$. Ekkor a (2.8) egyenlőtlenségből adódik, hogy $x^n(t^*) \leq 0$, továbbá, hogy

$$x^n(t) \leq x^n(t^*)e^{\alpha(t^*-t)} \leq 0$$

bármely $t > t^*$ pillanatban. A periodicitásból nyerjük, hogy $x^n(t) \leq 0$ bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ezt a gondolatmenetet ismételve kapjuk, hogy $x^i(t) \leq 0$ tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ és bármely $i \in \{n-1, n-2, \dots, 0\}$ esetén. Így feltevésünkéből következik, hogy x^0 csakis

azonosan 0 lehet, ami ellentmondás. A $j \neq 0$ esetben teljesen analóg módon adódik az ellentmondás, ami igazolja az állításunkat.

Pozitív visszacsatolás és $f_\beta \in S$ esetén Yi, Chen és Wu [71, Proposition 3.1] a fenti gondolatmenettel analóg módon bebizonyították, hogy az alábbiak valamelyike teljesül

- a) $x^j(t) > 0$ minden $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén;
- b) $x^j(t) < 0$ minden $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén;
- c) bármely $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén x^j -nek van zéróhelye.

A bizonyításuk változtatás nélkül érvényes az $f_\beta = \beta f_0$ típusú visszacsatolásra is. A 2.9. Lemmából és x periodicitásából következik, hogy $\beta > \alpha$. Az előbb említett dolgozatban azt is belátták a sima visszacsatolású esetre, hogy ekkor az a) és b) esetek nem fordulhatnak elő, ugyanis az ilyen előjeltartó megoldások rendre a pozitív illetve negatív egyensúlyi helyzethez konvergálnak. Ugyanez az állítás belátható az $f_\beta = \beta f_0$ típusú visszacsatolás esetén is Vas [66, Theorem 3.2. (i)] gondolatmenetének egyszerű módosításával.

Tudjuk tehát, hogy bármely x^j -nek létezik t_j zéróhelye. Ha itt nem váltana előjelet, akkor szükségszerűen $\dot{x}^j(t_j) = 0$ lenne. Ezekből azonban következik, hogy $x^{j+1}(t_j) = 0$ is fennáll, amit összevetve a 2.10. Tétel (ii) és (iii) pontjaival ellentmondásra jutunk. Ezzel a tétel állítását maradéktalanul igazoltuk. \square

2.13. Tétel. Legyen $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ egy nemkonstans periodikus megoldása a (2.4) egyenletrendszernek. Jelölje $T_x > 0$ a minimális periódust, valamint definiáljuk a következő görbéket $c_x^i: [0, T_x] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \pi^i(x_t)$. Ekkor igazak a következő állítások.

- (i) Bármely $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén c_x^i egyszerű, zárt görbe.
- (ii) Ha $\tilde{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ szintén nemkonstans periodikus megoldása a (2.4) egyenletrendszernek, amelyre $\tilde{x}_s \neq x_t$ fennáll bármely $s, t \in \mathbb{R}$ esetén, akkor $|c_x^i| \cap |c_{\tilde{x}}^i| = \emptyset$ fennáll bármely $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén.
- (iii) Létezik $t_0 \in \mathbb{R}$ és $t_1 \in (t_0, t_0 + T_x)$, hogy $0 \leq \dot{x}^i(t)$ bármely $t \in (t_0, t_1)$ esetén, továbbá $x^i(\mathbb{R}) = [x^i(t_0), x^i(t_1)]$ és $\dot{x}^i(t) \leq 0$ bármely $t \in (t_1, t_0 + T_x)$ esetén.
- (iv) Bármely $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén $0 \in \text{int}(c_x^i)$, valamint $x(t + \frac{T_x}{2}) = -x(t)$ teljesül bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén.
- (v) Pozitív visszacsatolás esetén létezik $k \in \mathbb{N}$, hogy $V_{\mathbb{K}_\tau}^+(x_t) = 2k$ bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén. Negatív visszacsatolás esetén létezik $k \in \mathbb{N}$, hogy $V_{\mathbb{K}_\tau}^-(x_t) = 2k - 1$ bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén.

A (iv) tulajdonságra úgy fogunk hivatkozni, mint a nemkonstans periodikus megoldások speciális szimmetriája. A rövideg kedvéért a későbbiekben az utolsó állítást kihasználva periodikus megoldások esetén $V_{\mathbb{K}_\tau}^\pm(x_t)$ helyett egyszerűen $V_{\mathbb{K}_\tau}^\pm(x)$ -et írunk.

Bizonyítás. Az (v) állítás azonnal következik a 2.10. Tétel (iii) állításából és a 2.12. Tételből.

A sima esetben, vagyis $f_\beta \in S$ esetén az összes többi állítás következik Mallet-Paret és Sell [47, 48] általános eredményeiből. Lásd még [36, Proposition 3.1], valamint [71, Proposition 3.2] tételüket.

Az $f_\beta = \beta f_0$ esetben az (i) és (ii) állítások bizonyítása a [37] monográfia VI.2. Lemmájában használt ötlet alapján történik. Mivel a pozitív és a negatív visszacsatolású eset hasonlóan kezelhető, ezért most csak a pozitív visszacsatolású esettel fogunk foglalkozni. Az $n = 0$ eset bizonyítását lásd Krisztin és Vas [35, Proposition 2.4] tételében.

Legyen most $n \geq 1$, valamint x és \tilde{x} nemkonstans periodikus megoldásai a (2.4) egyenletrendszernek. Bevezetve a $z = x - \tilde{x}$ jelölést világos, hogy elegendő belátnunk, hogy tetszőleges $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén $\pi^i(z_t) = (0, 0)$ csak akkor fordulhat elő valamely $t \in \mathbb{R}$ értékre, ha $z_t = 0$ is fennáll.

Legyen $b(t) = (b^0(t), b^1(t), \dots, b^n(t))$ a következőképp definiálva:

$$b^i(t) = \begin{cases} \frac{f_\beta(x^i(t)) - f_\beta(\tilde{x}^i(t))}{x^i(t) - \tilde{x}^i(t)}, & \text{ha } x^i(t) \neq \tilde{x}^i(t), \\ D^+(f_\beta)(x^i(t)), & \text{ha } x^i(t) = \tilde{x}^i(t), \end{cases}$$

minden $i \in \{1, \dots, n+1\}$ esetén, ahol $x^{n+1}(t) = x^0(t - \tau)$ és D^+ a jobboldali deriváltat jelöli. Ekkor z eleget tesz a

$$\begin{aligned} \dot{z}^0(t) &= -\alpha z^0(t) + b^1(t)z^1(t), \\ &\vdots \\ \dot{z}^{n-1}(t) &= -\alpha z^{n-1}(t) + b^n(t)z^n(t), \\ \dot{z}^n(t) &= -\alpha z^n(t) + b^0(t)z^0(t - \tau) \end{aligned}$$

késleltetett differenciálegyenlet-rendszernek. Legyen most $y(t) = (y^0(t), \dots, y^n(t))$, ahol $y^i(t) = e^{\alpha t} z^i(t)$ bármely $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén. Ekkor $y(t)$ kielégíti a következő késleltetett differenciálegyenletet:

$$\begin{aligned} \dot{y}^0(t) &= e^\alpha b^1(t) y^1(t), \\ &\vdots \\ \dot{y}^{n-1}(t) &= e^\alpha b^n(t) y^n(t), \\ \dot{y}^n(t) &= e^\alpha b^0(t) y^0(t - \tau). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Vegyük észre, hogy $\text{sgn } y^i(t) \equiv \text{sgn } z^i(t)$ bármely $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén, ahol sgn a szokásos előjel függvényt jelöli, továbbá $z_t \in C(\mathbb{K}_\tau) \setminus \{0\}$ esetén $y_t \in C(\mathbb{K}_\tau) \setminus \{0\}$ is teljesül, valamint $\text{sc}(z_t) = \text{sc}(y_t)$ és $V_{\mathbb{K}_\tau}^+(z_t) = V_{\mathbb{K}_\tau}^+(y_t)$ fennáll bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén. Fontos észrevétel, hogy a b^i függvények sehol sem negatívak, így ha $y^i(t) \neq 0$, akkor $y^{i+1}(t) \neq 0$, és előjelük megegyezik. Alkalmazva Mallet-Paret és Sell [48, Theorem 2.4]

eredményét nyerjük, hogy $V_{\mathbb{K}_\tau}^+(z_t) = V_{\mathbb{K}_\tau}^+(y_t) < \infty$ bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ebből és a (2.9) egyenletrendszerből egyszerűen következik, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ és $i \in \{0, \dots, n\}$ esetén létezik $\delta = \delta(t, i) > 0$, hogy az $s \mapsto \operatorname{sgn} y^i(s)$ függvény állandó a $(t - \delta, t)$ illetve a $(t, t + \delta)$ intervallumokon. A bizonyítás további részében tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $\delta(t) > 0$ jelöljön egy olyan kis pozitív számot, amelyre

$$\begin{aligned} [t - \delta(t), t) \ni s \mapsto \operatorname{sgn}(y^i(s)) \quad \text{és} \quad (t, t + \delta(t)] \ni s \mapsto \operatorname{sgn}(y^i(s)) \\ \text{függvények állandók bármely } i \in \{0, 1, \dots, n + 1\} \text{ esetén.} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Speciálisan, ha $y^j(t_0) \neq 0$ valamely j index és $t_0 \in \mathbb{R}$ esetén, akkor $\operatorname{sgn}(y^j(t)) = \operatorname{sgn}(y^j(t_0))$ teljesül bármely $t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0)]$ esetén.

Krisztin és Vas [35, Theorem 2.4] tételének bizonyításában olvasható gondolatmenettel megmutatható, hogy

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto V_{\mathbb{K}_\tau}^+(z_t) = V_{\mathbb{K}_\tau}^+(y_t) \quad \text{konstans függvény.} \quad (2.11)$$

A tételünk (i) és (ii) állítását indirekt gondolatmenettel fogjuk igazolni. Tegyük fel tehát, hogy valamely $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ és $t_0 \in \mathbb{R}$ esetén fennáll $\pi^i(z_{t_0}) = (0, 0)$, de $z_{t_0} \neq 0$. Ekkor tehát $\pi^i(y_{t_0}) = (0, 0)$ és $y_{t_0} \neq 0$ is fennállnak. A 2.11. Állítás értelmében az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $j = 0$ és $t_0 = 0$, vagyis $y^0(0) = y^1(0) = 0$ és $y_0 \neq 0 \in C(\mathbb{K}_\tau)$ fennáll. Legyen

$$t_* = \inf \{ t \leq 0 : y^0(s) = 0 \text{ bármely } s \in [t, 0] \text{ esetén} \}. \quad (2.12)$$

Segédállítás: $t_* > -\infty$. Tegyük fel az ellenkezőjét. Ekkor $y^0(t) = 0$ fennáll bármely $t \leq 0$ esetén ahonnan $y^n(t) = e^{\alpha t}(x^n(t) - \tilde{x}^n(t)) = y^n(0) \neq 0$ konstans a $(-\infty, 0)$ intervallumon, ami lehetetlen, így t_* véges.

A bizonyítás során számos esetet különböztetünk meg. Külön kezeljük az $n = 1$ és $n > 1$ eseteket.

I. eset: $n = 1$. Ekkor $y_0 \neq 0 \in C(\mathbb{K}_\tau)$ miatt feltehető, hogy létezik $s \in [-\tau, 0)$, hogy $y^0(s) \neq 0$, azaz $t_* \in (-\tau, 0]$. Ekkor tehát létezik $\delta > 0$, hogy $t_* - \delta > -\tau$, valamint $y^0(s) \neq 0$ tetszőleges $s \in (t_* - \delta, t_*)$ intervallumon. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy y^0 pozitív ezen az intervallumon. Ezt úgy is fogjuk emlegetni, hogy „ y^0 a $[-\tau, 0]$ intervallum végén pozitív”. Hasonlóan definiálhatjuk precízen azt is, hogy mit értünk az alatt, hogy „ y^0 a $[-\tau, 0]$ intervallum elején pozitív (negatív)”.

Legyen most t_1 a következőképp definiálva:

$$t_1 = \inf \left\{ t \in [t_*, 0] : y^0(s) = 0 \text{ és } y^1(s) \geq 0 \text{ bármely } s \in [t, 0] \text{ esetén} \right\}. \quad (2.13)$$

Ekkor tehát $y^0(t_1) = 0$, $y^1(t_1) \geq 0$ fennáll, ugyanakkor $\delta > 0$ választható olyan kicsinek, hogy $\operatorname{sgn} y^0(s)$ és $\operatorname{sgn} y^1(s)$ állandóak legyenek $(t_1 - \delta, t_1)$ intervallumon. Két esetet különböztetünk meg.

I.1. eset: $y^1(s) < 0$ bármely $s \in (t_1 - \delta, t_1)$ esetén. Ekkor létezik $t_2 \in (t_1 - \delta, t_1)$, amelyre $y^1(t_2) > 0$, amiből következik $y^0(t_2 - \tau) > 0$ is. A t_1 és t_2 időpontok megválasztásából az is következik, hogy $\text{sc}(y^0, [t_2 - \tau, t_2]) \geq \text{sc}(y^0, [t_1 - \tau, t_1])$. Másrészt, mivel y^0 a $[t_1 - \tau, t_1]$ intervallum végén pozitív, $\text{sc}(y_{t_2}, \mathbb{K}_\tau) \geq \text{sc}(y_{t_1}, \mathbb{K}_\tau) + 1$ adódik. Ekkor, ha $\text{sc}(y_{t_1}, \mathbb{K}_\tau)$ páros, akkor $V_{\mathbb{K}_\tau}^+(y_{t_2}) \geq V_{\mathbb{K}_\tau}^+(y_{t_1}) + 2$ azonnal adódik, ami ellentmond a (2.11) tulajdonságnak. Ha $\text{sc}(y_{t_1}, \mathbb{K}_\tau)$ páratlan, az azt jelenti, hogy y^0 a $[t_1 - \tau, t_1]$ intervallum elején negatív, így pedig $y^0(t_2 - \tau) > 0$ miatt $\text{sc}(y_{t_2}, \mathbb{K}_\tau) \geq \text{sc}(y_{t_2}, \mathbb{K}_\tau) + 2$, ami ismét ellenmondáshoz vezet.

I.2. eset: $y^0(s) > 0$ bármely $s \in (t_1 - \delta, t_1)$ esetén. Ekkor létezik $t_2 \in (t_1 - \delta, t_1)$, hogy $y^0(t_2) > 0$ mellett $y^0(t_2) < 0$ is fennáll, amiből $y^1(t_2) < 0$ következik. Mivel $y^1(t_1) = 0$ és $t_2 < t_1$, így létezik $t_3 \in (t_2, t_1)$, hogy $y^1(t_3) < 0$ és $y^1(t_3) > 0$, ahonnan az I.1. esetben látott gondolatmenet szerint adódik, hogy $V_{\mathbb{K}_\tau}^+(y_{t_3}) \geq V_{\mathbb{K}_\tau}^+(y_{t_1}) + 2$, ami ellentmondás.

Más eset nem lehetséges, így ezzel a tétel (i) és (ii) állításait beláttuk az $n = 1$ esetre.

II. eset: ha $n \geq 2$. Ekkor, mivel $y_0 \in C(\mathbb{K}_\tau)$ nem az azonosan 0 függvény, így a 2.11. Állítás szerint feltehető, hogy $y^0(0) = y^1(0) = 0$ és $y^n(0) \neq 0$.

Legyen t_* a (2.12) által definiálva. Két újabb alesetet különböztetünk meg t_* értéke szerint.

II.1. eset: $t_* \in [-\tau, 0]$. Tegyük föl, hogy $y^0(t) > 0$, ha $t \in (t_* - \delta, t_*)$ (az $y^0(t) < 0$ eset ugyanúgy kezelhető). Az I. esethez hasonlóan legyen t_1 a (2.13) által definiált, valamint $\delta = \delta(t_1)$. Ekkor az I.2. esettel analóg módon adódik, hogy létezik $t_2 \in (t_1 - \delta, t_1)$, hogy $y^1(t_2) < 0$ és $y^2(t_2) > 0$. Másrészt t_1, t_2 és δ megválasztásából nyerjük, hogy

$$\text{sc}(y_{t_2}, [-\tau, 0]) = \text{sc}(y^0, [t_2 - \tau, t_2]) \geq \text{sc}(y^0, [t_1 - \tau, t_1]) = \text{sc}(y_{t_1}, [-\tau, 0]),$$

valamint, hogy $\text{sc}(y_{t_2}, \{0, 1, \dots, n\}) \geq \text{sc}(y_{t_1}, \{0, 1, \dots, n\}) + 2$, ahonnan rögtön következik, hogy $V_{\mathbb{K}_\tau}^+(y_{t_2}) \geq V_{\mathbb{K}_\tau}^+(y_{t_1}) + 2$ fennáll. Ez ellentmond a (2.11) tulajdonságnak.

II.2. eset: $t_* \in (-\infty, -\tau)$. Ekkor speciálisan $y^0(t) = 0$ fennáll minden $t \in [-\tau, 0]$ esetén. Emlékeztetünk rá, hogy $y^1(0) = 0$ és $y^n(0) \neq 0$ is teljesülnek. Feltehető, hogy $y^n(0) < 0$. Legyen most t_1 a következőképp definiálva:

$$t_1 = \inf \left\{ t \leq 0 : y^0(s) = 0, \forall s \in [t - \tau, 0], \text{ és } y^1(s) = 0, \forall s \in [t, 0] \right\}.$$

Ebből azonnal kapjuk, hogy $t_* + \tau \leq t_1$. Az $y^n(t) = e^{\alpha b^0(t)} y^0(t - \tau)$ egyenletből, b^0 nemnegativitásából, valamint t_* definíciójából egyszerű észrevételként adódik, hogy

$$y^n(t) < 0, \quad t \in [t_* + \tau, 0]. \quad (2.14)$$

Legyen $\delta_1 = \delta(t_1)$ elég kicsi, hogy a (2.10) feltételeknek eleget tegyen. További három alesetet különböztetünk meg.

II.2.1. eset: $\text{sgn}(y^1(t_1 - \delta_1)) = 1$. Ekkor $t_2 \in (t_1 - \delta_1, t_1)$ választható úgy (a korábban látott gondolatmenet szerint), hogy $y^1(t_2) > 0$ és $y^2(t_2) < 0$ teljesüljön. Ekkor t_1, t_2 és δ_1

megválasztásából adódik, hogy

$$\begin{aligned} \text{sc}(y_{t_2}, [-\tau, 0] \cup \{1\}) &\geq \text{sc}(y_{t_1}, [-\tau, 0] \cup \{1\}) = 0, \text{ és} \\ \text{sc}(y_{t_2}, \{1, \dots, n\}) &\geq \text{sc}(y_{t_1}, \{1, \dots, n\}) + 1. \end{aligned}$$

A (2.14) egyenlőtlenség szerint ebben az esetben következik, hogy $\text{sc}(y_{t_2}, \{1, \dots, n\})$ páratlan szám. Mindezt egybevetve azonnal adódik, hogy $V_{\mathbb{K}_\tau}^+(y_{t_2}) \geq V_{\mathbb{K}_\tau}^+(y_{t_1}) + 2$, ami ellentmondás.

II.2.2. eset: $\text{sgn}(y^0(t_1 - \tau - \delta_1)) \neq 0$. Ekkor visszavezettük a problémát a már megoldott II.1. esetre (a t_1 veszi át az ottani 0 szerepét).

II.2.3. eset: $\text{sgn}(y^0(t_1 - \tau - \delta_1)) = 0$ és $\text{sgn}(y^1(t_1 - \delta_1)) = -1$. Legyen most

$$t_2 = \inf \left\{ t : y^0(s) = 0, \forall s \in [t - \tau, t_1], \text{ és } y^1(s) < 0, \forall s \in [t, t_1] \right\}.$$

Vegyük észre, hogy $t_2 \in [t_* + \tau, t_1]$. Legyen $\delta_2 = \delta(t_2)$. További három alesetet megkülönböztetünk meg.

II.2.3.1. eset: $\text{sgn}(y^0(t_2 - \tau - \delta_2)) = 1$ és $\text{sgn}(y^1(t_2 - \delta_2)) = -1$. Most $t_3 \in (t_2 - \delta_2, t_2)$ esetén

$$\text{sc}(y_{t_3}, \mathbb{K}_\tau) \geq \text{sc}(y_{t_2}, \mathbb{K}_\tau) + 1$$

teljesül. Ugyanakkor a (2.14) összefüggésből kapjuk, hogy $\text{sc}(y_{t_3}, \mathbb{K}_\tau)$ páratlan szám, ahonnan $V_{\mathbb{K}_\tau}^+(y_{t_3}) \geq V_{\mathbb{K}_\tau}^+(y_{t_2}) + 2$ következik, ami ellentmondás.

II.2.3.2. eset: $\text{sgn}(y^0(t_2 - \tau - \delta_2)) = \text{sgn}(y^1(t_2 - \delta_2)) = -1$. Vegyük észre, hogy létezik $s_n \rightarrow t_2 - \tau$ sorozat, hogy $y^0(s_n) \geq 0$ teljesül bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén, így $y^0(t) = e^{\alpha} b^1(t) y^1(t)$ összefüggést felhasználva kapjuk, hogy $y^1(t_2 - \tau) \geq 0$, ahonnan következik, hogy

$$t_3 = \inf \left\{ t : y^1(s) < 0, \forall s \in [t, t_2] \right\}.$$

választás esetén $t_3 \geq t_2 - \tau$, és így $y^0(t_3) = 0$, de y^0 nem azonosan nulla a $[t_3 - \tau, t_3]$ intervallumon, valamint $y^1(t_3) = 0$ teljesül, ezzel ezt az esetet visszavezettük a már megoldott II.1. esetre.

Csupán egyetlen aleset maradt.

II.2.3.3. eset: $\text{sgn}(y^1(t_2 - \delta_2)) = 0$. Ekkor $y^0(t) = 0$ fennáll bármely $t \in [t_2, 0]$ esetén, továbbá t_2 és 0 az y^1 szeparált zéróhelyei (értsd: olyan zéróhelyei, hogy köztük az y^1 függvény nem azonosan nulla). A (2.11) összefüggésből következik, hogy az y^1 szeparált zéróhelyeinek távolságának létezik pozitív minimuma. Most a II. alapesetre vezettük vissza a problémát. Induktív módon alkalmazzuk a II. esetre leírt esetvizsgálatot. Az előző megjegyzés szerint ez az aleset $t_* > -\infty$ miatt csak véges sokszor következhet be. Mivel az összes többi esetet számba vettük, így előbb-utóbb azok valamelyike kell, hogy bekövetkezzen, de azok mindegyike ellentmondáshoz vezetett, így végül mindenképp ellentmondáshoz jutunk.

Minden lehetséges esetet sorra vettünk, így a tétel (i) és (ii) állításait maradéktalanul bebizonyítottuk.

A Tétel (iii) és (iv) állításainak bizonyítására a szakaszonként lineáris esetben Krisztin és Vas [35, Proposition 5.1–5.2], gondolatmenete gyakorlatilag szó szerint alkalmazható, azzal a megjegyzéssel, hogy a bizonyításban a fent igazolt (i) és (ii) állításokat ki kell használni. \square

2.4. Periodikus pályák száma és jellemzése egy egyenlet esetén

2.4.1. Előkészületek

Ebben a részben azzal az esettel foglalkozunk, amikor $n = 0$, vagyis egyetlen késleltetett differenciálegyenletünk van. Ez lehet egyetlen öngerjesztő (öngátló) sejtnek vagy szinkronizált idegsejtek egy csoportjának a modellje. A rész fő eredményei a 2.4.2. és a 2.4.3. szakaszokban kerülnek bizonyításra. A vizsgált egyenletünk tehát a következő:

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) \pm f_\beta(x(t - \tau)), \quad (2.15)$$

ahol $\alpha, \tau > 0$, és $f_\beta \in S$, $f'_\beta(0) = \beta$ vagy $f_\beta = \beta f_0$, ahol

$$f_0(x) = \frac{|x + 1| - |x - 1|}{2}.$$

Az $f_\beta \in S$ esetre a dinamika teljesen ismert Krisztin, Walther és Wu [37] monográfiájának, valamint a [8, 21, 32, 33, 36, 47, 48] cikkeknek köszönhetően. A következőkben a periodikus pályák létezéséről és egyértelműségéről szóló eredményeket és ehhez kapcsolódó definíciókat fogunk idézni. Az egyszerűség kedvéért bevezetjük a V_τ^\pm jelölést a $V_{\mathbb{K}_\tau}^\pm$ helyett (lásd a (2.7) definíciót). A későbbiekben szükségünk lesz a linearizált

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) \pm \beta x(t - \tau) \quad (2.16)$$

egyenlet periodikus megoldásainak jellemzéséről szóló következő tételre, melyet a karakterisztikus egyenlet vizsgálatával, valamint a lineáris funkcionál-differenciálegyenletek általános elméletéből nyerhetünk (lásd [24]). Vezessük be a következő jelölést:

$$v(\alpha, \beta, \tau) = \tau \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \arccos \frac{\alpha}{\beta}, \quad (2.17)$$

ahol $\alpha, \tau > 0$ és $\beta > \alpha$.

2.14. Tétel. *Legyen v a (2.17) egyenlet által definiált. Ekkor a következő állítások teljesülnek.*

- (i) *Tegyük fel, hogy a visszacsatolás pozitív. Ekkor a (2.16) egyenletnek $x(t)$ pontosan akkor nemkonstans periodikus megoldása, ha $\beta > \alpha$, valamint $v = 2k\pi$ teljesül valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén, és létezik $A, \Delta \in \mathbb{R}$, hogy $x(t) = A \cos(t \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \Delta)$. Ekkor következésképpen $V_\tau^+(x) = 2k$.*

- (ii) Tegyük fel, hogy a visszacsatolás negatív. Ekkor a (2.16) egyenletnek $x(t)$ pontosan akkor nemkonstans periodikus megoldása, ha $\beta > \alpha$, valamint $\nu = (2k - 1)\pi$ teljesül valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén, és létezik $A, \Delta \in \mathbb{R}$, hogy $x(t) = A \cos\left(t\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \Delta\right)$. Ekkor következésképpen $V_\tau^-(x) = 2k - 1$.

2.4.2. Periodikus pályák: szükséges feltétel létezésre, elegendő feltétel unicitásra

Ebben és a következő szakaszban teljes leírást adunk a (2.15) egyenlet periodikus megoldásainak számáról és azok $-V_\tau^\pm$ által kategorizált – frekvenciájáról. Eközben vizsgálni fogjuk a $V_\tau^+ = 2$ típusú periodikus megoldások periódusának τ -tól való függését is. A következő tétel átfogó képet ad a (2.15) egyenlet periodikus megoldásairól az $f_\beta \in S$ esetben.

2.15. Tétel. Legyen $k \in \mathbb{N}$ rögzített és $f_\beta \in S$, valamint legyen $\beta > \alpha$ és $\nu = \nu(\alpha, \beta, \tau)$ a (2.17) által definiált. Ekkor a következő két állítás teljesül.

- (i) Ha a visszacsatolás pozitív, akkor a (2.15) egyenletnek pontosan akkor létezik olyan periodikus megoldása, melyre $V_\tau^+ = 2k \geq 2$, ha $\nu > 2k\pi$ fennáll, továbbá ez a megoldás az időváltozó eltolásától eltekintve egyértelmű. $V_\tau^+ = 0$ típusú periodikus megoldások nincsenek.
- (ii) Negatív visszacsatolás esetén a (2.15) egyenletnek pontosan akkor létezik olyan periodikus megoldása, melyre $V_\tau^- = 2k - 1$, ha $\nu > (2k - 1)\pi$ fennáll, továbbá ez a megoldás az időváltozó eltolásától eltekintve egyértelmű.

A fenti tétel unicitási és nemlétezési részét pozitív visszacsatolás esetére Krisztin és Walther bizonyították [36] cikkükben. A bizonyítás könnyedén módosítható a negatív visszacsatolás esetére, lásd Cao [8] és Krisztin [32] cikkeit. A $V_\tau^+ = 2$ típusú periodikus megoldásokra vonatkozó létezési eredményekért lásd Krisztin, Walther és Wu [37] monográfiáját. A létezésre vonatkozó további eredményekről olvashatunk Krisztin [32, 33] dolgozataiban.

2.16. Megjegyzés. A fent említett cikkekben csak a $\beta > \alpha$ esettel foglalkoznak. Ez periodikus megoldások szempontjából tökéletesen elegendő, hiszen a 2.9. Lemma szerint $\beta \leq \alpha$ esetén nem létezik periodikus megoldás.

A 2.21., 2.22., valamint a 2.23. Tételekben a fenti tétel unicitási és nemlétezési tételeinek analogonját igazoljuk a szakaszonként lineáris visszacsatolású $f_\beta = \beta f_0$ esetre. Megjegyezzük, hogy Vas [66] cikkében igazolta a fenti tétel létezési részének $V_\tau^+ = 2$ esetre vonatkozó analogonját. A 2.27. Tételben bebizonyítjuk a létezésre vonatkozó analóg állítást, ami egyúttal egy alternatív bizonyítását is adja a 2.15. Tétel $V_\tau^+ = 2$ esettől különböző létezési részeinek.

Mindezek előtt azonban még néhány lépésre szükségünk van.

2.17. Állítás. Tegyük fel, hogy $f_\beta = \beta f_0$ és $x: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a (2.15) egyenlet megoldása, valamint $t_1 \in \mathbb{R}$, olyan, hogy $x(t_1) = 0$. Ekkor $x(t) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}\right)$ teljesül bármely $t \geq t_1$ esetén.

Bizonyítás. Egyszerű észrevétel, hogy

$$-\alpha x(t) - \beta \leq \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \beta f_0(x(t - \tau)) \leq -\alpha x(t) + \beta.$$

Jelölje $u_\pm(t)$ rendre a következő két kezdetiérték-probléma megoldásait:

$$\dot{y}(t) = -\alpha y(t) \pm \beta$$

$$y(t_1) = 0.$$

Ekkor $u_-(t) \leq x(t) \leq u_+(t)$ teljesül bármely $t \geq t_1$ esetén. Egyszerű számolással adódik, hogy a következő egyenlőtlenségek teljesülnek bármely $t > t_1$ esetén:

$$u_-(t) = \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha(t_1-t)} - \frac{\beta}{\alpha} > -\frac{\beta}{\alpha}$$

és

$$u_+(t) = -\frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha(t_1-t)} + \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk. □

2.18. Lemma. Tegyük fel, hogy $f_\beta = \beta f_0$ és $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a (2.15) egyenlet egy nemkonstans periodikus megoldása és $t_0 \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\dot{x}(t_0) = 0$. Ekkor $\ddot{x}(t_0)$ létezik, és $\ddot{x}(t_0) \neq 0$.

Bizonyítás. Mivel x nemkonstans periodikus megoldás, ezért a 2.16. Megjegyzésből következik, hogy $\beta > \alpha$ teljesül. A $0 = \dot{x}(t_0) = -\alpha x(t_0) + \beta f_0(x(t_0 - \tau))$ egyenletből, valamint a 2.12. Tételből és a 2.17. Állításból adódik, hogy

$$\frac{\beta}{\alpha} > x(t_0) = \frac{\beta}{\alpha} f_0(x(t_0 - \tau)) > -\frac{\beta}{\alpha},$$

fennállnak, amiből $|x(t_0 - \tau)| < 1$ következik. Innen kapjuk, hogy $x(t_0 - \tau) = \frac{\alpha}{\beta} x(t_0)$ fennáll. Az x folytonosságából következik, hogy létezik $\varepsilon > 0$, melyre

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \beta x(t - \tau)$$

teljesül minden $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ esetén. Így $\ddot{x}(t_0)$ létezik és

$$\ddot{x}(t_0) = -\alpha \dot{x}(t_0) + \beta \dot{x}(t_0 - \tau) = \beta \dot{x}(t_0 - \tau).$$

Indirekt módon tegyük fel, hogy $\ddot{x}(t_0) = 0$. Ekkor a fenti egyenletekből kapjuk, hogy $\dot{x}(t_0 - \tau) = 0$ és $x(t_0 - \tau) = \frac{\alpha}{\beta} x(t_0)$. Ha $x(t_0) = 0$ lenne, akkor $x(t_0 - \tau) = 0$ adódna, ami ellentmond a 2.10. Tétel (ii) és (iii) állításának, így feltehető, hogy $x(t_0) \neq 0$. Ekkor

$$|x(t_0 - \tau)| = \frac{\alpha}{\beta} |x(t_0)| < 1$$

adódik. Felhasználva az előzőeket, valamint a 2.13. Tétel (iii) állítását kapjuk, hogy x -nek nem lehet $(t_0 - \tau)$ -ban szigorú (helyi) szélsőértéke. Az $|x(t_0 - \tau)| < 1$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\ddot{x}(t_0 - \tau)$ létezik és így a fentiek szerint zéró kell, hogy legyen, hiszen máskülönben itt szélsőértéke lenne x -nek, ami ellentmondáshoz vezetne.

Ezek után indukcióval adódik, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $x(t_0 - n\tau) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n x(t_0)$ és $\dot{x}(t_0 - n\tau) = 0$ teljesül. Az x periodikus, így bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $t_n \in [0, T_x]$, hogy $x(t_n) = x(t_0 - n\tau)$. Legyen t_{n_j} egy konvergens részsorozat t^* határértékkel. Kihazsználva x és \dot{x} folytonosságát, kapjuk, hogy $x(t^*) = \lim_{j \rightarrow \infty} x(t_{n_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n_j} x(t_0) = 0$ és $\dot{x}(t^*) = 0$, amiből $x(t^* - \tau) = 0$ azonnal adódik. Ez ellentmond a 2.10. Tétel (ii) és (iii) állításainak. Ezzel az ellentmondással a lemmát beláttuk. \square

2.19. Definíció. Legyen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható, periodikus függvény, T_x minimális periódussal. Nevezzük az $X : [0, T_x] \ni t \mapsto (x(t), \dot{x}(t)) \in \mathbb{R}^2$ görbét az x függvény D-trajektóriájának.

A következő tételben a 2.13. Tétel állításait egészítjük ki a (2.15) egyenlet nemkonstans periodikus megoldásaira vonatkozó két fontos tulajdonsággal.

2.20. Tétel. Legyen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy nemkonstans periodikus megoldása a (2.15) vagy a (2.16) egyenlet valamelyikének. Jelölje $T_x > 0$ a minimális periódust, X pedig a megoldás D-trajektóriáját. Ekkor igazak a következő állítások:

- (i) $t \mapsto X(t)$ egyszerű, zárt görbe, továbbá $0 \in \text{int}(X)$;
- (ii) létezik $t_0 \in \mathbb{R}$ és $t_1 \in (t_0, t_0 + T_x)$, hogy $0 < \dot{x}(t)$ bármely $t \in (t_0, t_1)$ esetén, továbbá $x(\mathbb{R}) = [x(t_0), x(t_1)]$ és $\dot{x}(t) < 0$ bármely $t \in (t_1, t_0 + T_x)$ esetén.

Az utóbbi tulajdonságra úgy fogunk hivatkozni, mint a nemkonstans periodikus megoldások *monotonitási tulajdonsága*.

Bizonyítás. Három esetet különböztetünk meg. Ha a (2.16) egyenletről van szó, akkor mindkét állítás következik a 2.14. Tételből. Az $f_\beta \in S$ esetre a fentiek következnek Mallet-Paret és Sell [47] általános eredményeiből. A szakaszonként lineáris $f_\beta = \beta f_0$ visszacsatolás esetén a (ii) állítás következik a 2.13. Tétel (iii) állításából és a 2.18. Lemmából. Az (i) állítás a periodicitás, valamint a 2.12. Tétel és a (ii) állítás következménye. \square

Ahogy korábban már utaltunk rá, Györi és Hartung bebizonyították, hogy $f_\beta = \beta f_0$ és $\alpha > \beta > 0$ esetén a (2.15) egyenlet minden megoldása egyensúlyi helyzethez tart (lásd [23]). Ezek után Vas megmutatta [66] cikkében, hogy $\alpha = \beta > 0$ esetén ugyanez a helyzet, valamint, hogy ha $\beta_0 = \beta_0(\alpha, \tau)$ olyan, hogy $\tau \sqrt{\beta_0^2 - \alpha^2} + \arccos \frac{\alpha}{\beta_0} = 2\pi$ és $\beta \geq \beta_0$, akkor az egyenletnek létezik periodikus megoldása, melyre $V_\tau^+ = 2$. Nyitva

maradt a kérdés, hogy $\alpha \leq \beta < \beta_0$ esetén létezik-e – ilyen – periodikus megoldás. Az alábbi tételünkből következik, hogy ekkor nem létezik nemkonstans periodikus megoldás. Megjegyezzük, hogy az alábbi tétel bizonyítása minimális változtatásokkal végigvihető negatív visszacsatolás esetére is, így a lentivel analóg tételt kapunk. Ugyanígy csak a pozitív visszacsatolással foglalkozunk a 2.22. és a 2.23. Tételek esetében is. A rész eredményeit összefoglaló 2.27. Tételben kimondjuk a pontos állításokat mind a pozitív, mind a negatív visszacsatolású esetre.

2.21. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f_\beta = \beta f_0$, valamint, hogy $\alpha, \beta, \tau > 0$ és $k \in \mathbb{N}$ rögzítve vannak oly módon, hogy $v < 2k\pi$ fennáll, ahol v a (2.17) összefüggés által definiált. Ekkor a (2.15) egyenletnek nem létezik olyan periodikus x megoldása, melyre $V_\tau^+(x) = 2k$ teljesülne.*

Bizonyítás. A bizonyítás a Cao–Krisztin–Walther-féle technikával történik (lásd [8, 36]). A bizonyítás – ahogy az utóbbi cikkben is – két fő esetre bomlik. Az első eset taglalása szinte szó szerint megegyezik az ottani 3.4. Tétel bizonyításának első részével, de a teljesség kedvéért – és mert az első részben szerepel sok minden, amit aztán a másodikban is használni fogunk – a gondolatmenetet megismételjük. A technikai nehézségek főleg a második esetenél jelentkeznek és abból fakadnak, hogy f_β nem mindenütt differenciálható, nem szigorúan monoton növekvő, illetve hogy az S függvényosztály definíciójában szereplő konvexitási feltétel sem teljesül ebben az esetben.

A bizonyítás indirekt módon fog történni. Tegyük fel tehát, hogy $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy nemkonstans periodikus megoldása a (2.15) egyenletnek és $V_\tau^+(x) = 2k$. Jelölje X és T_x az x D-trajektóriáját, valamint minimális periódusát, továbbá legyen

$$r = \frac{2k\pi - \arccos \frac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} > \tau. \quad (2.18)$$

A 2.14. Tételből következik, hogy létezik $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodikus függvény, melyre

$$\dot{y}(t) = -\alpha y(t) + \beta y(t - r), \quad (2.19)$$

és $V_r^+(y) = 2k$ teljesül, továbbá bármely $A > 0$ esetén Ay is ugyanezen frekvenciatartományból való nemkonstans periodikus megoldása a (2.19) egyenletnek.

Ezek szerint létezik olyan $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nemkonstans periodikus megoldása a (2.19) egyenletnek, melyre

$$|Z| \subset |X| \cup \text{ext}(X) \quad \text{és} \quad |Z| \cap |X| \neq \emptyset,$$

ahol Z a z D-trajektóriáját jelöli. Jelöljük z minimális periódusát T_z -vel. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $X(0) = Z(0)$, azaz

$$x(0) = z(0) \quad \text{és} \quad \dot{x}(0) = \dot{z}(0).$$

Kihasználva x, z, \dot{x} és \dot{z} folytonosságát és a megoldások speciális szimmetriáját, feltehető, hogy $x(0)$ maximális abban az értelemben, hogy

$$x(0) = \max\{x(t) : t \in \mathbb{R}, X(t) \in |Z| \text{ és } \dot{x}(t) \geq 0\}. \quad (2.20)$$

1. eset: $\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$. Felhasználva, hogy x és z megoldások is rendelkeznek a szigorú monotonitási és speciális szimmetriatulajdonságokkal, ezért feltehető, hogy $x(0) = z(0) = d > 0$, továbbá adódnak a következők:

$$\begin{aligned} d &= \max_{t \in \mathbb{R}} x(t) = \max_{t \in \mathbb{R}} z(t), & -d &= \min_{t \in \mathbb{R}} x(t) = \min_{t \in \mathbb{R}} z(t), \\ \dot{x}(t) &> 0 \text{ bármely } -\frac{T_x}{2} < t < 0 \text{ esetén,} \\ \dot{z}(t) &> 0 \text{ bármely } -\frac{T_z}{2} < t < 0 \text{ esetén,} \\ x(-T_x/2) &= -d, \quad \dot{x}(-T_x/2) = 0, \quad z(-T_z/2) = -d, \quad \dot{z}(-T_z/2) = 0. \end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelölést: $T^* = \min\{T_x, T_z\}$.

Állítás: $z(s) \leq x(s)$ fennáll bármely $s \in [-T^*/2, 0]$ esetén. Az állítás bizonyítása: jelölje x^{-1} és z^{-1} rendre a $[-T_x/2, 0] \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ és $[-T_z/2, 0] \ni t \mapsto z(t) \in \mathbb{R}$ függvények inverzeit. Ekkor x^{-1} és z^{-1} értelmezési tartománya egyaránt $[-d, d]$. Definiáljuk a következő függvényeket:

$$\phi_x: [-d, d] \ni u \mapsto \dot{x}(x^{-1}(u)) \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \phi_z: [-d, d] \ni u \mapsto \dot{z}(z^{-1}(u)) \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

$$\Omega_x = \{X(t) : t \in [-T_x/2, 0]\} \quad \text{és} \quad \Omega_z = \{Z(t) : t \in [-T_z/2, 0]\},$$

ívek rendre egybeesnek a következő függvénygrafikonokkal:

$$\{(u, \phi_x(u)) : u \in [-d, d]\} \quad \text{és} \quad \{(u, \phi_z(u)) : u \in [-d, d]\}.$$

Felhasználva x és z speciális szimmetriáját nyerjük, hogy

$$|X| = \Omega_x \cup (-\Omega_x) \quad \text{és} \quad |Z| = \Omega_z \cup (-\Omega_z).$$

Így

$$\text{int}(X) = \{(u, v) : u \in (-d, d), -\phi_x(-u) < v < \phi_x(u)\}.$$

$|Z| \subset |X| \cup \text{ext}(X)$ összefüggésből nyerjük, hogy

$$\phi_x(u) \leq \phi_z(u) \quad \text{bármely } u \in [-d, d] \text{ esetén.}$$

Teljesülnek továbbá az alábbiak:

$$\dot{x}(t) = \phi_x(x(t)) \quad \text{bármely } t \in [-T_x/2, 0] \text{ esetén,}$$

és

$$\dot{z}(t) = \phi_z(z(t)) \quad \text{bármely } t \in [-T_z/2, 0] \text{ esetén.}$$

Felhasználva a fentieket, és hogy $\dot{z}(t) > 0$ teljesül bármely $t \in (-T_z/2, 0)$ esetén, kapjuk, hogy tetszőleges $-\frac{T_z}{2} < s_1 < s_2 < 0$ értékekre

$$\int_{z(s_1)}^{z(s_2)} \frac{du}{\phi_z(u)} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\dot{z}(t)}{\phi_z(z(t))} dt = s_2 - s_1$$

teljesül. Hasonlóan

$$\int_{x(s_1)}^{x(s_2)} \frac{du}{\phi_x(u)} = s_2 - s_1 \quad \text{bármely } -\frac{T_x}{2} < s_1 < s_2 < 0 \text{ esetén.}$$

Az x és z megoldások 0-ban való folytonosságából következik, hogy

$$\int_{z(s)}^d \frac{du}{\phi_z(u)} = -s \quad \text{bármely } s \in (-T_z/2, 0] \text{ esetén,}$$

és

$$\int_{x(s)}^d \frac{du}{\phi_x(u)} = -s \quad \text{bármely } s \in (-T_x/2, 0] \text{ esetén.}$$

Így $s \in (-T^*/2, 0]$ értékekre azonnal adódik, hogy

$$\int_{z(s)}^d \frac{du}{\phi_z(u)} = \int_{x(s)}^d \frac{du}{\phi_x(u)}.$$

Felhasználva, hogy $0 < \phi_x(u) \leq \phi_z(u)$ teljesül a $(-d, d)$ intervallumon, kapjuk, hogy $z(s) \leq x(s)$ bármely $s \in (-T^*/2, 0]$ esetén. Mivel x és z folytonosak, ezért az állításunkat bebizonyítottuk.

Ha $T_z > T_x$ lenne, akkor a fenti állításból és az $x(-T_x/2) = -d$ összefüggésből kapjuk, hogy $z(-T_x/2) \leq x(-T_x/2) = -d$, ami lehetetlen, hiszen ekkor $-T_z/2 < -T_x/2 < 0$, $z(-T_z/2) = -d$ és $\dot{z}(t) > 0$ bármely $t \in (-T_z/2, 0)$ esetén. Így

$$T_z \leq T_x.$$

A 2.13. és a 2.20. Tételből következik, hogy x és z zérushelyei egyszeresek, és fél periódusnyira vannak egymástól. Mivel $V_\tau^+(x) = V_r^+(z) = 2k$, így

$$(k - \frac{1}{2}) T_x \leq \tau \leq kT_x \quad \text{és} \quad (k - \frac{1}{2}) T_z \leq r \leq kT_z.$$

A 2.10. Tétel (ii) és (iii) állításait felhasználva kapjuk, hogy

$$(k - \frac{1}{2}) T_x < \tau < kT_x \quad \text{és} \quad (k - \frac{1}{2}) T_z < r < kT_z.$$

A fenti összefüggést, valamint a $\tau < r$ és $T_z \leq T_x$ egyenlőtlenségeket kihasználva nyerjük, hogy

$$(k - \frac{1}{2}) T_z \leq (k - \frac{1}{2}) T_x < \tau < r < kT_z \leq kT_x, \quad (2.21)$$

és így a

$$-kT_z < -r < -\tau < -\left(k - \frac{1}{2}\right) T_z \quad (2.22)$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Mivel $\dot{z}(t) > 0$ bármely $t \in (-T_z/2, 0)$ esetén, valamint z periodikus és rendelkezik a speciális szimmetriatulajdonsággal, így

$$\dot{z}(t) < 0 \quad \text{bármely } -kT_z < t < -\left(k - \frac{1}{2}\right) T_z \text{ esetén.}$$

Ebből és a (2.22) egyenlőtlenségből nyerjük, hogy

$$z(-r) > z(-\tau).$$

Felhasználva ismét z periodicitását és speciális szimmetriáját kapjuk, hogy

$$z(-\tau) = z(-\tau + kT_z) = -z\left(-\tau + \left(k - \frac{1}{2}\right) T_z\right).$$

Ismét (2.22)-ből nyerjük, hogy

$$-\frac{T_z}{2} < -\tau + \left(k - \frac{1}{2}\right) T_z < 0.$$

Ezek az egyenlőtlenségek, $T^* = T_z$, valamint a fentebb bizonyított állításunk következményeképp

$$z\left(-\tau + \left(k - \frac{1}{2}\right) T_z\right) \leq x\left(-\tau + \left(k - \frac{1}{2}\right) T_z\right)$$

adódik. A (2.21) egyenlőtlenség és $T_z \leq T_x$ következményeként kapjuk, hogy

$$-\frac{T_x}{2} \leq -\frac{T_z}{2} < -\tau + \left(k - \frac{1}{2}\right) T_z \leq -\tau + \left(k - \frac{1}{2}\right) T_x < 0.$$

Mivel x szigorúan monoton növekvő a $[-T_x/2, 0]$ intervallumon, ezért

$$x\left(-\tau + \left(k - \frac{1}{2}\right) T_z\right) \leq x\left(-\tau + \left(k - \frac{1}{2}\right) T_x\right).$$

Kihhasználva most x periodicitását és speciális szimmetriáját nyerjük az alábbi összefüggést:

$$x\left(-\tau + \left(k - \frac{1}{2}\right) T_x\right) = -x(-\tau + kT_x) = -x(-\tau).$$

Következésképp

$$\begin{aligned} z(-r) > z(-\tau) &= -z\left(-\tau + \left(k - \frac{1}{2}\right) T_z\right) \geq -x\left(-\tau + \left(k - \frac{1}{2}\right) T_z\right) \\ &\geq -x\left(-\tau + \left(k - \frac{1}{2}\right) T_x\right) = x(-\tau). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Használjuk ki, hogy x és z rendre a (2.15), valamint a (2.19) késleltetett differenciálegyenletek megoldásai, illetve hogy $\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$ és $x(0) = z(0) = d > 0$ teljesülnek. Így a

$$z(-r) > 0, \quad x(-\tau) > 0$$

és

$$\beta z(-r) = \beta f_0(x(-\tau)) \leq \beta x(-\tau)$$

egyenlőtlenségekhez jutunk, ami ellentmond (2.23)-nak.

2. eset: $\dot{x}(0) = \dot{z}(0) \neq 0$.

Legyen $c = x(0) = z(0)$. Ekkor a (2.20) összefüggésnek köszönhetően, ha $\varepsilon > 0$ elég kicsi, akkor $\dot{x}(t) > 0$ és $\dot{z}(t) > 0$ teljesül minden $|t| < \varepsilon$ esetén, és létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ hogy x^{-1} és z^{-1} inverzek értelmezve vannak a $(c - \delta, c + \delta)$ intervallumon és azt a $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumba képezik. Az 1. esethez hasonlóan, definiáljuk az alábbi függvényeket:

$$\begin{aligned} \eta_x: (c - \delta, c + \delta) \ni u &\mapsto \dot{x}(x^{-1}(u)) \in (0, \infty), \\ \eta_z: (c - \delta, c + \delta) \ni u &\mapsto \dot{z}(z^{-1}(u)) \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Mivel z a (2.19) egyenlet megoldása, így kétszer (akárhányszor) folytonosan differenciálható és

$$\eta'_z(u) = \ddot{z}(z^{-1}(u)) \frac{d}{du} z^{-1}(u) = \frac{\ddot{z}(z^{-1}(u))}{\dot{z}(z^{-1}(u))}$$

teljesül minden $u \in (c - \delta, c + \delta)$ esetén. Speciálisan

$$\eta'_z(c) = \frac{\ddot{z}(0)}{\dot{z}(0)}. \quad (2.24)$$

Megkülönböztetünk két további esetet $x(-\tau)$ értéke szerint.

2.1. eset: $|x(-\tau)| \neq 1$. Ha $x(-\tau) > 1$ vagy $x(-\tau) < -1$, akkor, mivel x folytonos, ezért ε alkalmas választásával elérhető, hogy $x(t - \tau) > 1$ vagy $x(t - \tau) < -1$ rendre teljesüljön $|t| < \varepsilon$ esetén. Hasonlóan, ha $|x(-\tau)| < 1$, akkor ε választható úgy, hogy $|x(t)| < 1$ fennálljon bármely $|t| < \varepsilon$ esetén. Így minden esetben $\ddot{x}(x^{-1}(u))$ létezik, és

$$\eta'_x(u) = \frac{\ddot{x}(x^{-1}(u))}{\dot{x}(x^{-1}(u))} \quad \text{teljesül bármely } u \in (c - \delta, c + \delta) \text{ esetén.}$$

Speciálisan

$$\eta'_x(c) = \frac{\ddot{x}(0)}{\dot{x}(0)}. \quad (2.25)$$

Az

$$\{(u, \eta_x(u)) : u \in (c - \delta, c + \delta)\}, \quad \text{és} \quad \{(u, \eta_z(u)) : u \in (c - \delta, c + \delta)\}$$

függvénygrafikonok rendre $|X|$ és $|Z|$ egy-egy darabját adják. Mivel $|Z| \subset |X| \cup \text{ext}(X)$ és $(c, \eta_x(c)) = (c, \eta_z(c))$, így

$$\eta'_x(c) = \eta'_z(c)$$

adódik, amit a $\dot{x}(0) = \dot{z}(0)$ összefüggéssel, valamint a (2.24) és (2.25) egyenletekkel összevetve kapjuk, hogy

$$\ddot{x}(0) = \ddot{z}(0).$$

A (2.15) és (2.19) egyenleteket egy tetszőleges $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ pontban differenciálva a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\alpha\dot{x}(t) + \beta f'_0(x(t-\tau))\dot{x}(t-\tau), \\ \dot{z}(t) &= -\alpha\dot{z}(t) + \beta\dot{z}(t-r).\end{aligned}\tag{2.26}$$

Az $\ddot{x}(0) = \ddot{z}(0)$ és $\dot{x}(0) = \dot{z}(0)$ összefüggéseket felhasználva kapjuk, hogy

$$\dot{z}(-r) = f'_0(x(-\tau))\dot{x}(-\tau).\tag{2.27}$$

Mivel x és z rendre a (2.15) és (2.19) egyenletek megoldásai, valamint $X(0) = Z(0)$, így

$$f_0(x(-\tau)) = z(-r).\tag{2.28}$$

Vegyük észre, hogy $|x(-\tau)| \leq 1$, hiszen ellenkező esetben (2.27) és (2.28) egyenletekből $\dot{z}(-r) = 0$ és $|z(-r)| = 1$ adódna, ugyanakkor z monotonitási, valamint x és z speciális szimmetriatulajdonságaiból kapjuk, hogy

$$\max_{t \in (0, T_z]} z(t) = |z(-r)| = 1 < |x(-\tau)| \leq \max_{t \in (0, T_x]} x(t),$$

ami ellentmond annak, hogy $|Z| \subset |X| \cup \text{ext}(X)$.

Tehát feltehető, hogy $|x(-\tau)| < 1$. Ekkor a (2.27) és a (2.28) egyenletekből a $\dot{z}(-r) = \dot{x}(-\tau)$ és a $z(-r) = x(-\tau)$ összefüggések adódnak, vagyis $X(-\tau) = Z(-r)$. Csakúgy, mint az 1. esetben, kapjuk, hogy

$$(k - \frac{1}{2}) T_x < \tau < k T_x \quad \text{és} \quad (k - \frac{1}{2}) T_z < r < k T_z.$$

Az x speciális szimmetriájából kapjuk, hogy

$$X(-\tau) \in \{(x(t), \dot{x}(t)) : t \in (0, T_x/2)\}.$$

Az $X(0) = Z(0)$ megválasztásából (maximalitási tulajdonság, lásd (2.20)) és a speciális szimmetriából következik, hogy $\dot{x}(-\tau) = \dot{z}(-r) < 0$ fennáll.

Azt állítjuk, hogy az $X(0) = Z(0)$, $x(-\tau) = z(-r)$, $\dot{x}(-\tau) = \dot{z}(-r) < 0$ és $|Z| \subset |X| \cup \text{ext}(X)$ összefüggések fennállásából következik, hogy létezik $t^* \in (0, \varepsilon)$, melyre

$$x(t^*) < z(t^*), \quad x(t^* - \tau) \geq z(t^* - r) \quad \text{és} \quad \dot{x}(t^*) < \dot{z}(t^*).$$

Az állítás bizonyítása: tetszőleges $\delta_0 \in (0, \delta)$ esetén legyen $t_x(\delta_0) = x^{-1}(c + \delta_0)$, valamint $t_z(\delta_0) = z^{-1}(c + \delta_0)$. Emlékeztetünk rá, hogy δ -t levezetésünkben fentebb definiáltuk, és az x^{-1} és z^{-1} inverz függvények $(c - \delta, c + \delta)$ intervallumon értelmezve vannak. Az 1. esetben bemutatott gondolatmenet segítségével a következőkre jutunk:

$$\int_c^{c+\delta_0} \frac{du}{\eta_x(u)} = t_x(\delta_0), \quad \text{valamint} \quad \int_c^{c+\delta_0} \frac{du}{\eta_z(u)} = t_z(\delta_0).$$

Az $X(0) = Z(0)$ metszéspont megválasztása miatt

$$\eta_x(u) < \eta_z(u)$$

következik bármely $u \in (c, c + \delta_0)$ választása esetén. Összevetve ezt a fenti egyenletekkel, arra jutunk, hogy $t_x(\delta_0) > t_z(\delta_0)$, és így a szigorú monotonitás miatt $x(t_z(\delta_0)) < x(t_x(\delta_0)) = \delta_0 = z(t_z(\delta_0))$ adódik. Legyen $t_0 = t_z(\delta/2)$. Mivel δ_0 tetszőleges volt és t_z folytonos, így $x(t) < z(t)$ teljesül bármely $t \in (0, t_0)$ esetén. Definiáljuk a következő két függvényt: $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(t) = -x(t - \tau)$ és $v(t) = -z(t - r)$. Ekkor f_β páratlanságából kapjuk, hogy u és v rendre (2.15) és (2.19) egyenletek periodikus megoldásai, valamint $u(0) = v(0)$ és $\dot{u}(0) = \dot{v}(0) > 0$. A fenti gondolatmenetet követve arra jutunk, hogy létezik $t_1 < t_0$, hogy $u(t) \leq v(t)$ bármely $t \in (0, t_1)$ esetén, vagyis $x(t - \tau) \geq z(t - r)$. Megjegyezzük, hogy itt nem tudunk szigorú egyenlőtlenséget állítani, mivel $u(0) = v(0)$ nem feltétlen rendelkezik a (2.20) összefüggéssel analóg maximalitási tulajdonsággal. Végezetül tegyük fel indirekten, hogy bármely $s \in (0, t_1)$ esetén $\dot{x}(s) \geq \dot{z}(s)$ teljesül. Ez azonban lehetetlen, hiszen ekkor bármely $t \in (0, t_1)$ -re $x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s) ds \geq z(0) + \int_0^t \dot{z}(s) ds = z(t)$, ami ellentmondás. Ezzel az állítást beláttuk.

Tehát feltehető, hogy $t^* \in (0, \varepsilon)$ olyan, hogy

$$x(t^*) < z(t^*), \quad x(t^* - \tau) \geq z(t^* - r) \quad \text{és} \quad \dot{x}(t^*) < \dot{z}(t^*)$$

teljesülnek. Másfelől, ha a (2.15) és (2.19) egyenleteket a $t = t^*$ helyen vizsgáljuk és felhasználjuk a fenti első két egyenlőtlenséget, akkor a következőkhöz jutunk:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t^*) &= -\alpha x(t^*) + \beta f_0(x(t^* - \tau)) \\ &= -\alpha x(t^*) + \beta x(t^* - \tau) \\ &> -\alpha z(t^*) + \beta z(t^* - r) \\ &= \dot{z}(t^*). \end{aligned}$$

Ez ellentmond $\dot{x}(t^*) < \dot{z}(t^*)$ egyenlőtlenségnek, tehát a 2.1. esetet kizárhatjuk.

2.2. eset: $|x(-\tau)| = 1$. Először is vegyük észre, hogy ebben az esetben a (2.15) és (2.19) egyenletekből, valamint $S(0) = Z(0)$ feltevésből következik, hogy

$$x(-\tau) = z(-r) = 1 \quad \text{vagy} \quad x(-\tau) = z(-r) = -1.$$

Vegyük észre, hogy a (2.18) egyenlőtlenségből, valamint a 2.14. Tételből következik, hogy az

$$\dot{y}(t) = -\alpha y(t) + \beta y(t - \tau) \tag{2.29}$$

egyenletnek nincs olyan periodikus megoldása, amelyre $V_\tau^+ = 2k$ lenne. Ebből következik, hogy ha x egy olyan periodikus megoldása a (2.15) egyenletnek, melyre $V_\tau^+(x) = 2k$,

akkor szükségképpen

$$\max_{t \in \mathbb{R}} x(t) > 1 \quad \text{és} \quad \min_{t \in \mathbb{R}} x(t) < -1, \quad (2.30)$$

hiszen máskülönben x periodikus megoldása lenne a (2.29) egyenletnek is, ami ellentmondáshoz vezetne.

Ebből és x szigorú monotonitási tulajdonságából következik, hogy a korábban definiált ε és δ választhatók úgy, hogy

$$\dot{x}(t - \tau) > 0 \quad \text{vagy} \quad \dot{x}(t - \tau) < 0 \quad (2.31)$$

teljesüljön bármely $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ esetén. Így $\eta'_x(u) = \ddot{x}(x^{-1}(u)) / \dot{x}(x^{-1}(u))$ létezik bármely $u \in (c - \delta, c + \delta) \setminus \{0\}$ esetén. Ezt összevetve (2.26) egyenlettel, kapjuk az alábbiakat:

$$\lim_{u \nearrow c} \frac{\ddot{x}(x^{-1}(u))}{\dot{x}(x^{-1}(u))} \quad \text{és} \quad \lim_{u \searrow c} \frac{\ddot{x}(x^{-1}(u))}{\dot{x}(x^{-1}(u))}$$

létezik, mi több

$$\lim_{u \nearrow c} \frac{\ddot{x}(x^{-1}(u))}{\dot{x}(x^{-1}(u))} = \lim_{t \nearrow 0} \frac{\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\lim_{t \nearrow 0} \ddot{x}(t)}{\dot{x}(0)}$$

és

$$\lim_{u \searrow c} \frac{\ddot{x}(x^{-1}(u))}{\dot{x}(x^{-1}(u))} = \lim_{t \searrow 0} \frac{\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\lim_{t \searrow 0} \ddot{x}(t)}{\dot{x}(0)}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\eta'_x(c_-) = \frac{\lim_{t \nearrow 0} \ddot{x}(t)}{\dot{x}(0)} \quad \text{és} \quad \eta'_x(c_+) = \frac{\lim_{t \searrow 0} \ddot{x}(t)}{\dot{x}(0)}.$$

Mivel $\eta_x(c) = \eta_z(c)$ és $|Z| \in |X| \cup \text{ext}(X)$, ezért

$$\eta'_x(c_-) \geq \eta'_z(c) \geq \eta'_x(c_+),$$

vagy ami ezzel ekvivalens,

$$\lim_{t \nearrow 0} \ddot{x}(t) \geq \ddot{z}(0) \geq \lim_{t \searrow 0} \ddot{x}(t).$$

Felhasználva (2.26) egyenletet, ezt írhatjuk a következőképp is:

$$\begin{aligned} \lim_{t \nearrow 0} [-\alpha \dot{x}(t) + \beta f'_0(x(t - \tau)) \dot{x}(-\tau)] &\geq -\alpha \dot{z}(0) + \beta \dot{z}(-r) \\ &\geq \lim_{t \searrow 0} [-\alpha \dot{x}(t) + \beta f'_0(x(t - \tau)) \dot{x}(-\tau)]. \end{aligned}$$

Mivel \dot{x} folytonos, így ez ekvivalens az alábbival:

$$\dot{x}(-\tau) \cdot \lim_{t \nearrow 0} f'_0(x(t - \tau)) \geq \dot{z}(-r) \geq \dot{x}(-\tau) \cdot \lim_{t \searrow 0} f'_0(x(t - \tau)),$$

ami a (2.31) állításnak köszönhetően valamelyik alábbi alakra hozható:

$$0 \geq \dot{z}(-r) \geq \dot{x}(-\tau) \quad \text{vagy} \quad 0 \leq \dot{z}(-r) \leq \dot{x}(-\tau).$$

Ezt összevetve a (2.23) egyenlőtlenséggel, valamint a $|Z| \subset |X| \cup \text{ext}(X)$ összefüggéssel, nyerhetjük, hogy

$$X(-\tau) = Z(-r).$$

$X(0)$ választásából adódóan $\dot{x}(-\tau)$ nem lehet pozitív vagy zéró, így feltehető, hogy $\dot{x}(-\tau) = \dot{z}(-\alpha) < 0$. Ekkor a 2.1. esethez hasonlóan adódik, hogy létezik $t^* \in (0, \varepsilon)$, melyre

$$x(t^*) < z(t^*), \quad x(t^* - \tau) \geq z(t^* - r) \quad \text{és} \quad \dot{x}(t^*) < \dot{z}(t^*)$$

fennállnak. Vegyük észre, hogy (2.31)-ből, valamint $\dot{x}(-\tau) < 0$ és $|x(-\tau)| = 1$ összefüggésekből következik, hogy $x(t^* - \tau) < 1$. Ebből speciálisan $\beta x(t^* - \tau) \leq \beta f_0(x(t^* - \tau))$ is adódik. Figyelembe véve t^* megválasztását, a következőket nyerjük:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t^*) &= -\alpha x(t^*) + \beta f_0(x(t^* - \tau)) \\ &\geq -\alpha x(t^*) + \beta x(t^* - \tau) \\ &> -\alpha z(t^*) + \beta z(t^* - r) \\ &= \dot{z}(t^*), \end{aligned}$$

ami ellentmond az $\dot{x}(t^*) < \dot{z}(t^*)$ egyenlőtlenségnek, így $|x(-\tau)|$ nem lehet egyenlő 1-gyel sem. Ezzel a bizonyításunk teljes. \square

2.22. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f_\beta = \beta f_0$, valamint, hogy $\alpha, \beta, \tau > 0$ rögzítettek oly módon, hogy $\tau \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \arccos \frac{\alpha}{\beta} \neq 2\ell\pi$ semmilyen $\ell \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor bármely $k \in \mathbb{N}$ számra a (2.15) egyenletnek legfeljebb egy olyan periodikus pályája létezhet, amelyre $V_\tau^+ = 2k$ teljesül.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy x_1 és x_2 is nemkonstans periodikus megoldásai a (2.15) egyenletnek T_1 illetve T_2 minimális periódusokkal, melyekre $V_\tau^+(x_1) = V_\tau^+(x_2) = 2k$ és $\{x_{1t} : t \in [0, T_1]\} \neq \{x_{2t} : t \in [0, T_2]\}$ fennáll. Azt állítjuk, hogy $|X_1| \neq |X_2|$. Indirekten tegyük fel, hogy $|X_1| = |X_2|$. Ekkor az előző tétel első részében folytatott érvelésből adódna $T_1 \leq T_2$ és ugyanúgy $T_2 \leq T_1$ is, ahonnan $T_1 = T_2$ következik, továbbá $x_1(s) \leq x_2(s)$ és $x_2(s) \leq x_1(s)$ is igaz lenne minden $s \in [-T_1/2, 0] = [-T_2/2, 0]$ esetén. Ezek után a speciális szimmetriatulajdonságból adódik az ellentmondás. Így felhasználva a 2.20. Tétel (i) állítását, feltehetjük, hogy $|X_2| \cap \text{int}(X_1) \neq \emptyset$, mi több, létezik $\gamma > 1$ konstans, melyre $\gamma|X_2| \subset \text{ext}(X_1) \cup |X_1|$ és $\gamma|X_2| \cap |X_1| \neq \emptyset$ teljesül. Legyen $x = x_1$ és $y = \gamma x_2$. Egyszerű számolással kapjuk, hogy y az alábbi késleltetett differenciálegyenlet $T_y = T_2$ periódusú megoldása:

$$\dot{y}(t) = -\alpha y(t) + \beta \gamma f_0(y(t - \tau) / \gamma). \quad (2.32)$$

Világos, hogy x a (2.15) egyenlet $T_x = T_1$ periódusú megoldása és hogy $V_\tau^+(x) = V_\tau^+(y) = 2k$. Innentől kezdve a bizonyítás csak néhány technikai részletben tér el az előző tételétől, így ezekre fogunk fókuszálni.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $X(0) = Y(0)$ és

$$x(0) = \max\{x(t) : t \in \mathbb{R}, X(t) \in |Y| \text{ és } \dot{x}(t) \geq 0\}, \quad (2.33)$$

ahol X és Y a megfelelő D-trajektóriákat jelöli. Ismét két esetet különböztetünk meg.

1. eset: $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$.

Az előző tétel bizonyításában bemutatott gondolatmenettel itt is megmutatható, hogy $T_y \leq T_x$ és $y(s) \leq x(s)$ bármely $s \in [-T_y/2, 0]$ esetén. Azt állítjuk, hogy ebben az esetben az első egyenlőtlenség szigorú, vagyis

$$T_y < T_x.$$

Tegyük fel, hogy ez nem teljesül, vagyis $T_y \geq T_x$, ami ebben az esetben ekvivalens azzal, hogy $T_x = T_y$. Így az is következik, hogy $y(s) \leq x(s)$ bármely $s \in [-T_x/2, 0]$ esetén. Felhasználva az előző bizonyítás érvelését és jelöléseit, kapjuk a következőt:

$$s - T_x/2 = \int_{-d}^{x(s)} \frac{1}{\phi_x(u)} du \geq \int_{-d}^{x(s)} \frac{1}{\phi_y(u)} du \geq \int_{-d}^{y(s)} \frac{1}{\phi_y(u)} du = s - T_y/2 = s - T_x/2,$$

bármely $s \in [-T_x/2, 0]$ esetén. A fenti sorban tehát az összes egyenlőtlenség egyenlőségre cserélhető, amiből – felhasználva a periodicitást és a speciális szimmetriát – adódik, hogy

$$x(s) = y(s) \text{ bármely } s \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

Ebből $\dot{x}(s) = \dot{y}(s)$ is következik minden $s \in \mathbb{R}$ értékre. Emlékeztetünk rá, hogy $\nexists \ell \in \mathbb{N} : \tau \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \arccos \frac{\alpha}{\beta} = 2\ell\pi$ feltevésünkéből, valamint a 2.14. Tételből következik, hogy x nem megoldása a linearizált

$$\dot{z}(t) = -\alpha z(t) + \beta z(t - \tau)$$

egyenletnek. Más szavakkal, létezik $s_0 \in \mathbb{R}$, melyre $x(s_0) > 1$. A folytonosságnak köszönhetően s_0 választható úgy, hogy $1 < x(s_0) < \gamma$ fennálljon. Mivel x és y rendre a (2.15) és a (2.32) egyenlet megoldásai, így a következőket kapjuk:

$$\dot{x}(s_0 + \tau) = -\alpha x(s_0 + \tau) + \beta f_0(x(s_0)) = -\alpha x(s_0 + \tau) + \beta,$$

valamint

$$\begin{aligned} \dot{y}(s_0 + \tau) &= -\alpha y(s_0 + \tau) + \gamma \beta f_0(y(s_0)/\gamma) = -\alpha x(s_0 + \tau) + \gamma \beta f_0(x(s_0)/\gamma) \\ &= -\alpha x(s_0 + \tau) + \beta x(s_0) > -\alpha x(s_0 + \tau) + \beta. \end{aligned}$$

Ez ellentmond az $\dot{x}(s_0 + \tau) = \dot{y}(s_0 + \tau)$ egyenletnek, ami igazolja, hogy $T_y < T_x$.

A 2.17. Állításból és a $t = 0$ helyen a (2.15) egyenletből adódik, hogy $|f_0(x(-\tau))| < 1$, amiből $|x(-\tau)| < 1$ következik. Ezek után, felhasználva, hogy $\dot{x}(0) = \dot{y}(0)$, valamint hogy x és y rendre kielégítik a (2.15) és a (2.32) egyenleteket, az alábbihoz jutunk:

$$\gamma \beta f_0(y(-\tau)/\gamma) = \beta f_0(x(-\tau)) = \beta x(-\tau).$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$-1 < \gamma f_0(y(-\tau)/\gamma) = x(-\tau) < 1,$$

amiből $x(-\tau) = y(-\tau)$ következik. Másfelől, ahogy az előző tétel bizonyításában, itt is belátható, hogy

$$-kT_x < -kT_y < -\tau < -(k - \frac{1}{2})T_x < -(k - \frac{1}{2})T_y.$$

Felhasználva most a monotonitási és a speciális szimmetriára vonatkozó tulajdonságokat, valamint a $T_y < T_x$ egyenlőtlenséget, az alábbiakat nyerjük:

$$y(-\tau) = -y(-\tau + T_y/2) \geq -x(-\tau + T_y/2) > -x(-\tau + T_x/2) = x(-\tau),$$

ami ellentmondás, így az $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ eset nem fordulhat elő.

2. eset: $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) \neq 0$. Legyen most is $c = x(0) = y(0)$. Ahogy az előző bizonyításban is, itt is feltehető, hogy $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ olyanok, hogy $\dot{x}(t), \dot{y}(t) > 0$ teljesül minden $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ esetén. Ekkor az x^{-1} és y^{-1} inverz függvények értelmezve vannak a $(c - \delta, c + \delta)$ intervallumon. Csakúgy, mint ott, ezúttal is definiáljuk a következő két függvényt:

$$\eta_x: (c - \delta, c + \delta) \ni u \mapsto \dot{x}(x^{-1}(u)) \in \mathbb{R},$$

$$\eta_y: (c - \delta, c + \delta) \ni u \mapsto \dot{y}(y^{-1}(u)) \in \mathbb{R}.$$

Vegyük észre, hogy az $X(0) = Y(0)$ összefüggésből, valamint a (2.15) és (2.32) egyenletekből következik, hogy

$$f_0(x(-\tau)) = \gamma f_0(y(-\tau)/\gamma).$$

Így $|f_0(y(-\tau)/\gamma)| \leq 1/\gamma < 1$ teljesül. Mivel y és f_0 folytonosak, így ε választható úgy, hogy $|f_0(y(-\tau)/\gamma)| < 1$ teljesüljön minden $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ esetén és így ezen az intervallumon a (2.32) egyenlet a következő formát ölti:

$$\dot{y}(t) = -\alpha y(t) + \beta y(t - \tau). \quad (2.34)$$

Ezek szerint y kétszer (akárhányszor) differenciálható a $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumon, ezért a korábbiakban már látott módon adódik, hogy

$$\eta'_y(\beta) = \frac{\dot{y}(0)}{\dot{y}(0)}.$$

A bizonyítás hátralevő része megegyezik az előző tételbeli levezetéssel, azzal a különbséggel, hogy z -t és r -et mindenhol rendre y -nal és τ -val kell helyettesítenünk. \square

2.23. Tétel. Tegyük fel, hogy $f_\beta = \beta f_0$, valamint, hogy $\alpha, \beta, \tau > 0$ rögzítettek és valamely $k \in \mathbb{N}$ egészre $\tau \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \arccos \frac{\alpha}{\beta} = 2k\pi$ fennáll. Ekkor nem létezik olyan periodikus x megoldása a (2.15) egyenletnek, melyre $\max_{t \in \mathbb{R}} x(t) > 1$ és $V_\tau^+(x) = 2k$ teljesülne.

Bizonyítás. A gondolatmenet ismét indirekt. Tegyük fel, hogy létezik x periodikus megoldás, melyre $V_\tau^+(x) = 2k$ teljesül és létezik s_0 , hogy $x(s_0) > 1$ fennáll. Ekkor csakúgy, mint a 2.21. Tétel bizonyításában, y választható a linearizált egyenlet olyan periodikus megoldásának, melyre $V_\tau^+(y) = 2k$ és a vonatkozó D-trajektóriák közt fennáll az $|Y| \subset |X| \cup \text{ext}(X)$ és az $|Y| \cap |X| \neq \emptyset$ összefüggés. A két esetet itt is pontosan úgy kell kezelni, mint az előző bizonyításokban. Az első esetben, a korábbi jelöléseinket megtartva adódik, hogy $T_y \leq T_x$. Az $x(s_0) > 1$ egyenlőtlenséget kihasználva az előző bizonyításban látottak szerint adódik, hogy $T_y < T_x$, ami ezúttal is ellentmondáshoz vezet.

A második eset kezeléséhez vegyük észre, hogy a 2.21. Tétel bizonyításának vonatkozó részében sehol sem használtuk ki az $r > \tau$ összefüggést, így az érvelés itt is megállja a helyét, vagyis ellentmondásra jutunk ebben az esetben is. \square

2.4.3. Periódusfüggvény, elegendő feltétel létezésre

Tegyük fel, hogy $\beta > \alpha > 0$ rögzítettek. Ekkor a 2.15. Tételnek, illetve a 2.14. Tételnek és a [66] dolgozatnak értelmében, ha

$$\tau > \tau^* = \frac{2\pi - \arccos \frac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}},$$

akkor a (2.15) egyenletnek – az időváltozó eltolásából fakadó különbségektől eltekintve – létezik egyetlen $V_\tau^+ = 2$ típusú periodikus megoldása. Az $f_\beta = \beta f_0$ esetben, ha $\tau = \tau^*$, akkor a periodikus megoldás konstans szorzótól (és eltolástól) eltekintve egyértelmű, így mind a sima, mind a szakaszonként lineáris visszacsatolású esetben értelmes a minimális periódusról mint a késleltetés függvényéről beszélni. Az értelmezési tartomány a sima esetben (τ^*, ∞) , míg $f_\beta = \beta f_0$ esetén $[\tau^*, \infty)$. Ezt a függvényt fogjuk *periódusfüggvényként* emlegetni és $T(\tau)$ -val jelölni.

Az alábbi, Krisztin és Walther [36] cikkéből idézett tételre szükségünk lesz a 2.25. Tétel bizonyításához. Ott csak a pozitív visszacsatolású esetre bizonyítják az állítást, de az könnyen átvihető a negatív esetre is.

2.24. Tétel. *Legyen $r \geq \tau > 0$, $\alpha > 0$, $\delta \in \{-1, 1\}$, $f \in S$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható, páratlan függvény, melyre teljesül, hogy*

$$g(\xi) > f(\xi) \quad \text{és} \quad \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} > \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \quad \text{bármely} \quad \xi > 0 \quad \text{esetén.}$$

Tegyük fel, hogy x és z nemkonstans periodikus megoldásai az $\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \delta f(x(t - \tau))$, illetve a $\dot{z} = -\alpha z(t) + \delta g(z(t - r))$ késleltetett differenciálegyenleteknek. Jelölje ε az δ előjelét, X és Z pedig a megfelelő D-trajektóriákat, és tegyük fel, hogy $V_\tau^\varepsilon(x) = V_r^\varepsilon(z) > 0$. Ekkor a következő eset nem fordulhat elő:

$$|Z| \subset |X| \cup \text{ext}(X), \quad |Z| \cap |X| \neq \emptyset \quad \text{és} \quad \gamma|Z| \subset \text{ext}(X) \quad \text{bármely} \quad \gamma > 1 \quad \text{esetén.}$$

Következő tételünk adja majd a periódusfüggvényre vonatkozó 2.26. Tétel bizonyításának lényegét és tulajdonképpen azt állítja, hogy egy periodikus megoldásnak annál nagyobb a D-trajektóriája, minél nagyobb a késleltetés az egyenletben.

2.25. Tétel. Legyen α, β, f_β , valamint τ_1, τ_2 rögzítettek és $0 < \tau_1 < \tau_2$. Legyenek továbbá x_1 és x_2 egyaránt a (2.15), $\tau = \tau_i$, $i \in \{1, 2\}$ késleltetésű egyenleteknek nemkonstans periodikus megoldásai, X_i pedig jelölje az x_i D-trajektóriáját. Jelölje továbbá ε a $+$ vagy $-$ szimbólum egyikét, aszerint, hogy a visszacsatolás pozitív vagy negatív. Ekkor, ha $V_{\tau_1}^\varepsilon(x_1) = V_{\tau_2}^\varepsilon(x_2)$, akkor

$$|X_2| \subset \text{ext}(X_1) \cup |X_1| \quad \text{és} \quad |X_2| \cap \text{ext}(X_1) \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a visszacsatolás pozitív. Negatív visszacsatolás esetén az állítás teljesen analóg módon igazolható.

Tegyük fel indirekten, hogy az állítás nem igaz. Ekkor a 2.22. Tétel bizonyításának legelején folytatott érvelésből adódik, hogy $|X_1| \neq |X_2|$ teljesül, így feltehetjük, hogy $|X_2| \cap \text{int}(X_1) \neq \emptyset$. Ekkor létezik $\gamma > 1$, melyre

$$\gamma|X_2| \subset \text{ext}(X_1) \cup |X_1| \quad \text{és} \quad \gamma|X_2| \cap |X_1| \neq \emptyset$$

teljesül. Ekkor legyen $y(t) = \gamma x_2(t)$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Így kapjuk, hogy y kielégíti az $\dot{y}(t) = -\alpha y(t) + g_1(y(t - \tau_2))$ késleltetett differenciálegyenletet, ahol $g_1(\xi) = \gamma f_\beta(\frac{\xi}{\gamma})$ által definiált minden $\xi \in \mathbb{R}$ esetén. Ha a szokott módon, Y -nal jelöljük a megoldás D-trajektóriáját, akkor fennállnak a következők:

$$|Y| \subset \text{ext}(X_1) \cup |X_1| \quad \text{és} \quad |Y| \cap |X_1| \neq \emptyset,$$

továbbá $g'_1(0) = \beta$ és $V_{\tau_1}^\varepsilon(x_1) = V_{\tau_2}^\varepsilon(y) > 0$. Innen kétfelé bontjuk a bizonyítást.

1. eset: A szakaszonként lineáris $f_\beta = \beta f_0$ visszacsatolás esetén ugyanaz a helyzet, mint amikor a 2.22. Tétel bizonyításában (2.32) adódott. Egyetlen dolog, amit itt nem tehetünk fel, hogy x nem megoldása a linearizált egyenletnek. Azonban az feltehető $\tau_2 > \tau_1$ miatt, hogy y nem megoldása annak, és ahogy ott is, úgy itt is ellentmondásra jutunk.

2. eset: A sima esetben a 2.24. Tétel értelmében elegendő belátnunk, hogy

$$g_1(\xi) > g(\xi) = f_\beta(\xi), \quad \text{valamint} \quad \frac{g'_1(\xi)}{g_1(\xi)} > \frac{f'_\beta(\xi)}{f_\beta(\xi)} \quad \text{minden} \quad \xi > 0 \quad \text{esetén.}$$

Ez egyszerű számolással ellenőrizhető. □

Az alábbi, periódusfüggvényről szóló tétel többek között alkalmas arra, hogy segítségével a következő részben létezési és egyértelműségi tételeket bizonyítsunk speciális késleltetett differenciálegyenlet-rendszerekre.

2.26. Tétel. Jelölje T a pozitív visszacsatolású (2.15) egyenlet periódusfüggvényét rögzített $\alpha > 0$ és $\beta > 0$ paraméterek mellett. Tegyük fel, hogy τ_1 és τ_2 a T értelmezési tartományából valók, valamint hogy $\tau_1 < \tau_2$. Ekkor

$$0 \leq T(\tau_2) - T(\tau_1) < 2(\tau_2 - \tau_1).$$

Bizonyítás. Legyen $i \in \{1, 2\}$ esetén x_i az adott egyenlet egyetlen $V_{\tau_i}^+ = 2$ típusú periodikus megoldása, továbbá jelöljük X_i -vel az x_i D-trajektóriáját. A 2.25. Tétel szerint fennállnak a következők:

$$|X_2| \subset |X_1| \cup \text{ext}(X_1) \quad \text{és} \quad |X_2| \cap \text{ext}(X_1) \neq \emptyset. \quad (2.35)$$

Az 1. részben megmutatjuk, hogy T monoton nemcsökkenő, azután a 2. részben megmutatjuk, hogy $T(\tau_2) - T(\tau_1) < 2(\tau_2 - \tau_1)$.

1. Tegyük fel indirekten, hogy $T(\tau_2) < T(\tau_1)$ teljesül. Ekkor létezik $\ell \in \mathbb{N}$, amelyre $\tau_2 + \ell T(\tau_2) < \tau_1 + \ell T(\tau_1)$. Ekkor

$$\dot{x}_i(t) = -\alpha x_i(t) + f_\beta(x_i(t - \tau_i)) = -\alpha x_i(t) + f_\beta(x_i(t - (\tau_i + \ell T(\tau_i))))$$

fennáll, így x_i periodikus megoldása az

$$\dot{x} = -\alpha x(t) + f_\beta(x(t - (\tau_i + \ell T(\tau_i))))$$

egyenletnek. A megoldások monotonitási és speciális szimmetriára vonatkozó tulajdonságait kihasználva kapjuk, hogy

$$V_{\tau_1 + \ell T(\tau_1)}^+(x_1) = V_{\tau_2 + \ell T(\tau_2)}^+(x_2) = 2(\ell + 1).$$

Innen a 2.25. Tételből következik, hogy

$$|X_1| \subset |X_2| \cup \text{ext}(X_2) \quad \text{és} \quad |X_1| \cap \text{ext}(X_2) \neq \emptyset,$$

ami ellentmond (2.35)-nek. Ez igazolja, hogy T monoton nemcsökkenő.

2. Most tegyük fel indirekten, hogy $T(\tau_2) - T(\tau_1) \geq 2(\tau_2 - \tau_1)$. Kihhasználva f_β páratlanságát, valamint a megoldások speciális szimmetriáját, a következőt vezethetjük le:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -\alpha x_i(t) + f_\beta(x_i(t - \tau_i)) = -\alpha x_i(t) + f_\beta(-x_i(t - (\tau_i - T(\tau_i)/2))) \\ &= -\alpha x_i(t) - f_\beta(x_i(t - (\tau_i - T(\tau_i)/2))). \end{aligned}$$

Eszerint x_i periodikus megoldása az alábbi késleltetett differenciálegyenletnek:

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) - f_\beta(x(t - (\tau_i - T(\tau_i)/2))).$$

Itt ismét a megoldások speciális szimmetriáját és monotonitási tulajdonságait kihasználva adódik, hogy $\tau_i - T(\tau_i)/2 > 0$, valamint

$$V_{\tau_1 - T(\tau_1)/2}^-(x_1) = V_{\tau_2 - T(\tau_2)/2}^-(x_2) = 1.$$

Ha $T(\tau_2) - T(\tau_1) > 2(\tau_2 - \tau_1)$, akkor $\tau_2 - \frac{T(\tau_2)}{2} < \tau_1 - \frac{T(\tau_1)}{2}$ fennáll, így a 2.25. Tételből következik, hogy

$$|X_1| \subset |X_2| \cup \text{ext}(X_2) \quad \text{és} \quad |X_1| \cap \text{ext}(X_2) \neq 0,$$

ami ellentmond (2.35)-nek, így $T(\tau_2) - T(\tau_1) > 2(\tau_2 - \tau_1)$ eset nem állhat fenn.

Ha $T(\tau_2) - T(\tau_1) = 2(\tau_2 - \tau_1)$, akkor x_1 és x_2 egyaránt az

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) - f_\beta(x(t - \tau)),$$

egyenlet periodikus megoldásai, ahol a késleltetés $\tau = \tau_1 - T(\tau_1)/2 = \tau_2 - T(\tau_2)/2$. Ekkor felhasználva a periodikus megoldások negatív visszacsatolású esetre vonatkozó unicitási tételét – lásd a 2.15. és a 2.27. Tételek vonatkozó részeit – kapjuk hogy $|X_1| = |X_2|$, ami ellentmond (2.35)-nek. Ezzel a tétel állítását bebizonyítottuk. \square

Vegyük észre, hogy az előző tételből speciálisan adódik, hogy a periódusfüggvény folytonos. A következő tételben összegezzük a 2.21–2.23. Tételeket és a 2.12. Tétel $n = 0$ esetre vonatkozó állítását, továbbá bizonyítjuk a még hiányzó létezési tételeket, és megfogalmazzuk a negatív visszacsatolásra vonatkozó analóg állításokat is.

2.27. Tétel. *Legyenek $\alpha, \beta, \tau > 0$, $f_\beta = \beta f_0$ és $k \in \mathbb{N}$ rögzítettek, valamint $\nu = \nu(\alpha, \beta, \tau)$ a (2.17) összefüggés által definiált. Ekkor a következő állítások igazak.*

(i) *Ha a visszacsatolás pozitív, akkor a (2.15) egyenletnek pontosan akkor létezik periodikus x megoldása, amelyre $V_\tau^+(x) = 2k$, ha $\beta > \alpha$ és $\nu \geq 2k\pi$ fennáll. $V_\tau^+ = 0$ típusú nemkonstans periodikus megoldások nem léteznek.*

a) *Ha $\nu > 2k\pi$, akkor – az időváltozó eltolásától eltekintve – egyetlen ilyen típusú megoldás létezik.*

b) *Ha $\nu = 2k\pi$, akkor pontosan az $x(t) = A \cos(t\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \Delta)$ alakú függvények lesznek a (2.15) egyenlet nemkonstans periodikus megoldásai, ahol $\Delta \in \mathbb{R}$ és $A \in (0, 1]$ tetszőlegesen választható. Ekkor $V_\tau^+(x) = 2k$ szükségszerűen teljesül.*

(ii) *Ha a visszacsatolás negatív, akkor a (2.15) egyenletnek pontosan akkor létezik periodikus x megoldása, amelyre $V_\tau^-(x) = 2k - 1$, ha $\beta > \alpha$ és $\nu \geq (2k - 1)\pi$ fennáll.*

a) *Ha $\nu > (2k - 1)\pi$, akkor – az időváltozó eltolásától eltekintve – egyetlen ilyen típusú megoldás létezik.*

b) *Ha $\nu = (2k - 1)\pi$, akkor pontosan az $x(t) = A \cos(t\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \Delta)$ alakú függvények lesznek a (2.15) egyenlet nemkonstans periodikus megoldásai, ahol $\Delta \in \mathbb{R}$ és $A \in (0, 1]$ tetszőlegesen választható. Ekkor $V_\tau^-(x) = 2k - 1$ szükségszerűen teljesül.*

Bizonyítás. A tételnek egyedül a létezését állító részei várnak még bizonyításra. Pontosabban a pozitív visszacsatolású, $V_\tau^+ = 2$ esetre Vas már bizonyította [66] dolgozatában a vonatkozó létezési tételt. Ezt és a 2.26. Tételt felhasználva fogjuk bizonyítani az állítást a gyorsabb oszcillációkra valamint a negatív visszacsatolású eset összes frekvenciatartományára.

Tegyük fel tehát, hogy $k \geq 2$, és

$$\tau \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \arccos \frac{\alpha}{\beta} \geq 2k\pi.$$

Bizonyítandó, hogy ekkor létezik x periodikus megoldás, melyre $V_\tau^+(x) = 2k$. Vizsgáljuk most az

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \beta f_0(x(t - \gamma\tau)) \quad (2.36)$$

késleltetett differenciálegyenlet és a $\omega(\gamma) = T(\gamma\tau)$ függvényt, ahol T a periódusfüggvény. A feltétel szerint, valamint a $V^+ = 2$ típusú periodikus megoldásokra vonatkozó szükséges és elegendő feltétel szerint ω értelmezési tartománya $[\gamma^*, \infty)$, ahol γ^* a

$$\gamma^* \tau \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \arccos \frac{\alpha}{\beta} = 2\pi \quad (2.37)$$

összefüggés által definiált. Tegyük most fel, hogy létezik $\gamma_0 \in [\gamma^*, \infty)$, melyre

$$\tau = \gamma_0\tau + (k-1)T(\gamma_0\tau)$$

teljesül. Ekkor ha y az egyetlen periodikus megoldása a (2.36) egyenletnek $\gamma = \gamma_0$ esetén, melyre $V_{\gamma_0\tau}^+(y) = 2$, akkor

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\alpha y(t) + \beta f_0(y(t - \gamma_0\tau)) = -\alpha y(t) + \beta f_0(y(t - (\gamma_0\tau + (k-1)T(\gamma_0\tau)))) \\ &= -\alpha y(t) + \beta f_0(y(t - \tau)) \end{aligned}$$

egyenletekből, valamint a megoldások speciális alakjából nyerjük, hogy

$$V_\tau^+(y) = 2k.$$

Ezek szerint elegendő belátnunk, hogy létezik ilyen γ_0 . Mivel a 2.26. Tételből adódóan ω folytonos a teljes értelmezési tartományán, így elegendő, ha találunk $\gamma_1, \gamma_2 \in [\gamma^*, \infty)$ értékeket, úgy, hogy a

$$\tau - \gamma_1\tau - (k-1)T(\gamma_1\tau) \quad \text{és} \quad \tau - \gamma_2\tau - (k-1)T(\gamma_2\tau)$$

kifejezések közül az egyik nem pozitív, a másik nem negatív. Ha $\gamma_1 \geq 1$, akkor a hozzá tartozó fenti kifejezés előjele triviálisan negatív. Vizsgáljuk a kifejezés előjelét γ^* -ban. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$T(\gamma^*\tau) = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}.$$

Ezt, valamint a (2.37) összefüggést felhasználva adódik, hogy

$$\tau - \gamma^* \tau - (k-1)T(\gamma^* \tau) \geq 0$$

ekvivalens azzal, hogy

$$\tau \geq \frac{2\pi - \arccos \frac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} + (k-1) \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}},$$

ami ekvivalens a feltevésünkkel, így $\gamma_2 = \gamma^*$ választás megfelelő, ezzel az állítást belátuk.

Negatív visszacsatolás esetén ismét létezik $\gamma^* > 0$ (és nem feltétlenül kisebb, mint 1), hogy bármely $\gamma \in [\gamma^*, \infty)$ esetén az

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \beta f_0(x(t - \gamma\tau)) \quad (2.38)$$

késleltetett (pozitív visszacsatolású) differenciálegyenletnek létezik $V_{\gamma\tau}^+ = 2$ típusú periodikus megoldása. Ha y ilyen, akkor kihasználva a periodicitást, f_0 páratlanságát, valamint a megoldások speciális szimmetriáját, a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\alpha y(t) + \beta f_0(y(t - \gamma\tau)) = -\alpha y(t) + \beta f_0(y(t - \gamma\tau - (k-1)T(\gamma\tau))) \\ &= -\alpha y(t) - \beta f_0(y(t - \gamma\tau - (k-3/2)T(\gamma\tau))). \end{aligned}$$

Felhasználva ismét a megoldások speciális szimmetriáját, azt kapjuk, hogy ha létezik $\gamma_0 \in [\gamma^*, \infty)$, amelyre

$$\tau = \gamma_0 \tau - (k-3/2)T(\gamma_0 \tau)$$

fennáll, akkor y a (2.15) negatív visszacsatolású késleltetett differenciálegyenlet periodikus megoldása, melyre $V_{\tau}^-(y) = 2k-1$, ami igazolná az állításunkat. Ha az előző esethez hasonlóan γ_1 -et kellően nagyoknak, γ_2 -t pedig γ^* -nak választjuk, az állításunk hasonlóképpen igazolást nyer. Ezzel a tételt maradéktalanul bebizonyítottuk. \square

2.28. Megjegyzés. A sima esetben a fenti bizonyítást annyiban kell módosítani, hogy ott ω értelmezési tartománya nyitott: (γ^*, ∞) , valamint ennek megfelelően a $\gamma_2 = \gamma^*$ helyett γ^* -ban vett határértékeket kell számolni, ami a folytonosságnak és a lokális Hopf-bifurkációs tételnek köszönhetően nem jelent problémát (lásd [17]).

2.5. Egy speciális gyűrűszerű rendszer periodikus megoldásai

Ebben a részben megmutatjuk, hogy a 2.26. Tétel hogyan használható a 2.15. és a 2.27. Tételekkel analóg, periodikus megoldások létezésére és egyértelműségére vonatkozó állítások bizonyítására az $n \geq 1$ esetben, vagyis az általános (2.4) egyenletre vonatkozóan. A 2.6. Megjegyzés szerint $\tau = 1$ az általánosság megszorítása nélkül feltehető, így a továbbiakban a következő egyenletet vizsgáljuk:

$$\begin{aligned} \dot{x}^0(t) &= -\alpha x^0(t) + f_\beta(x^1(t)), \\ &\vdots \\ \dot{x}^{n-1}(t) &= -\alpha x^{n-1}(t) + f_\beta(x^n(t)), \\ \dot{x}^n(t) &= -\alpha x^n(t) + \delta f_\beta(x^0(t-1)), \end{aligned} \tag{2.39}$$

ahol $\alpha, \beta > 0$, $\delta \in \{1, -1\}$, $n \geq 1$, továbbá $f_\beta \in S$ és $f'_\beta(0) = \beta$ vagy $f_\beta = \beta f_0$. A rövideg kedvéért vezessük be a $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1$ jelölést.

A sima visszacsatolás és $n = 1$ esetére az $n = 0$ esettel analóg, a periodikus pályákra és a globális dinamikára vonatkozó tételeket bizonyított Chen, Krisztin és Wu [10, 11].

Mallet-Paret és Sell [47, 48] eredményei mellett használni fogjuk Yi, Chen és Wu [71] dolgozatának ötleteit. A 2.34. Tételben, mely ennek a résznek a fő tétele, [71, Theorem 3.16] egy általánosítását adjuk.

2.29. Megjegyzés. Pozitív visszacsatolás esetén könnyen meg lehet konstruálni néhány periodikus megoldását a (2.39) egyenletrendszernek, ha helyette a vele ekvivalens (2.5) egyenlet szinkronizált periodikus megoldásait vizsgáljuk, ahol $\delta_i = 1$ és $\tau_i = 1/(n+1)$, bármely $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén. Legyen ugyanis y az $\dot{y}(t) = -\alpha y(t) + f_\beta(y(t - \frac{1}{n+1}))$ egy nemkonstans periodikus megoldása, $x = (x^0, \dots, x^n)$ pedig az $x^i(t) \equiv y(t)$ által definiált minden $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén. Világos, hogy ekkor x a (2.5) egyenlet egy szinkronizált, nemkonstans periodikus megoldása. Hasonlóan, ha y az $\dot{y}(t) = -\alpha y(t) + f_\beta(y(t - \tau))$ egy nemkonstans periodikus megoldása T minimális periódussal, és $\tau = \frac{1+mT}{n+1}$ fennáll valamely m egész esetén, akkor x -et a fenti módon definiálva ismét a (2.5) egy szinkronizált, nemkonstans periodikus megoldását kapjuk. Innen a korábban már látott egyszerű transzformációval (2.39) nemkonstans periodikus megoldásait nyerhetjük.

A fentebb említett [71, Theorem 3.16] eredmény lényegében azt állítja, hogy a sima esetben $n = 2$ és pozitív visszacsatolás esetén a (2.39) minden nemkonstans periodikus megoldása előáll a 2.29. Megjegyzésben látottak szerint. Ezt követően a különböző frekvenciájú periodikus megoldások létezésére és unicitásra vonatkozó állításokat bizonyít. Ennek a résznek a fő eredménye, hogy a 2.34. Tételben megmutatjuk, hogy analóg állítások igazak a szakaszonként lineáris, valamint a negatív visszacsatolású esetben is.

A következő tétel és annak egyszerű bizonyítása megtalálható Yi, Chen és Wu [71] dolgozatában a pozitív visszacsatolású, sima esetre. Gondolatmenetük változtatás nélkül alkalmazható a negatív visszacsatolású esetre és – a 2.13. Tétel ismeretében – az $f_\beta = \beta f_0$ esetre is.

2.30. Tétel. *Tegyük fel, hogy $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ nemkonstans periodikus megoldása a (2.39) egyenletrendszernek $T_x > 0$ minimális periódussal. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

(i) *Pozitív visszacsatolás esetén létezik $r_+ \in [0, T_x)$, melyre bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén*

$$(x^1(t), \dots, x^n(t), x^0(t-1)) = (x^0(t+r_+), \dots, x^n(t+r_+))$$

teljesül.

(ii) *Negatív visszacsatolás esetén létezik $r_- \in [0, T_x)$, melyre bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén*

$$(x^1(t), \dots, x^n(t), -x^0(t-1)) = (x^0(t+r_-), \dots, x^n(t+r_-))$$

teljesül.

A bizonyítás, mely megtalálható Yi, Chen és Wu [71] cikkében, azon múlik, hogy definiálva az $(\tilde{x}^0(t), \dots, \tilde{x}^{n-1}(t), \tilde{x}^n(t)) \equiv (x^1(t), \dots, x^n(t), \delta x^0(t-\tau))$ periodikus megoldást, a $c_{\tilde{x}}^i$ és c_x^i síkbeli zárt görbék diszjunktak vagy egybeesnek, és az origót a belsőjükben tartalmazzák. Ezt a 2.13. Tétel (i), (ii) és (iv) állításai garantálják az $f_\beta = \beta f_0$ esetre is, így az érvelésük megállja a helyét mind a pozitív, mind a negatív visszacsatolás, valamint mind a sima, mind pedig a szakaszonként lineáris esetben.

A következő tételt a [71] dolgozatban csak az $n = 2$ esetre bizonyították, valamint csak a sima és pozitív visszacsatolás esetére mondták ki.

2.31. Tétel. *Tegyük fel, hogy x egy nemkonstans periodikus megoldása a (2.39) egyenletrendszernek és minimális periódusa T_x , továbbá legyen r_+ és r_- a 2.30. Tétel által definiálva.*

(i) *Pozitív visszacsatolás esetén, ha $V_{\mathbb{K}}^+(x) = 2k$, akkor*

$$r_+ = \frac{kT_x - 1}{n + 1}.$$

(ii) *Negatív visszacsatolás esetén, ha $V_{\mathbb{K}}^-(x) = 2k - 1$, akkor*

$$r_- = \frac{(k - \frac{1}{2})T_x - 1}{n + 1}.$$

Bizonyítás. A két eset bizonyítása hasonló, így csak az első állítást bizonyítjuk. Tegyük fel tehát (kihasználva a 2.12. Tételt is), hogy x olyan nemkonstans periodikus megoldás, melyre $V_{\mathbb{K}}^+(x) = 2k \geq 2$. Első észrevételünk, hogy

$$x^0(t-1) = x^n(t+r_+) = x^{n-1}(t+2r_+) = \dots = x^0(t+(n+1)r_+)$$

teljesül tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén. Innen a 2.30. Tételből következik, hogy bármely $t \in \mathbb{R}$ és $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén $x^i(t) = x^i(t + 1 + (n + 1)r_+)$ fennáll. Így létezik $m \in \mathbb{N}_0$, hogy $mT_x = 1 + (n + 1)r_+$, vagy ami ezzel ekvivalens:

$$r_+ = \frac{mT_x - 1}{n + 1}$$

valamely alkalmas m esetén. Azt állítjuk, hogy $m = k + 1$. Vegyük észre a következőt:

$$\begin{aligned} \dot{x}^0(t) &= -\alpha x^0(t) + f_\beta(x^1(t)) = -\alpha x^0(t) + f_\beta(x^0(t + r_+)) \\ &= -\alpha x^0(t) + f_\beta(x^0(t - (T_x - r_+))). \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy $r_+ < T_x/2$. Ellenkező esetben ugyanis $(T_x - r_+) \in (0, T_x/2)$ és így a 2.13. Tétel szerint lenne olyan t_0 , melyre x^0 -nak nincs zéróhelye a $[t_0, t_0 + T_x - r_+]$ intervallumon. Innen a lépések módszerével kapjuk, hogy x^0 -nak nincs zéróhelye az egész számegyenesen, ami ellentmond a 2.12. Tételnek. A 2.20. Tételből következik, hogy x^0 nem lehet konstans semmilyen intervallumon, így t^* választható úgy, hogy

$$x_{t^*}(j) = x^j(t^*) = x^0(t^* + jr_+) \neq 0 \quad (2.40)$$

teljesüljön bármely $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén. Felhasználva a megoldások speciális szimmetriáját, szigorú monotonitási tulajdonságát, valamint a $V_{\mathbb{K}}^+(x) = 2k$ és $r_+ < T_x/2$ összefüggéseket, kapjuk a következőt:

$$\text{sc}(x_{t^*}, \mathbb{K}) = \text{sc}(x^0, [t^* - 1, t^* + nr_+]) \in \{2k - 1, 2k\}.$$

Ismét a speciális szimmetriát használva adódik, hogy

$$(k - \frac{1}{2})T_x < nr_+ + 1 \leq kT_x. \quad (2.41)$$

Ekkor az $r_+ = \frac{mT_x - 1}{n + 1}$ összefüggést használva nyerjük, hogy

$$(n + 1)(k - \frac{1}{2})T_x - 1 < nmT_x \leq (n + 1)kT_x - 1$$

fennáll. Ebből látható, hogy adott $n, k \in \mathbb{N}$ és $T_x > 0$ esetén egyetlen olyan $m \in \mathbb{N}$ lehet, amely ezeket az egyenlőtlenséget kielégíti. Átrendezés után a következő két egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\frac{(k - \frac{1}{2})T_x - 1}{n} < \frac{mT_x - 1}{n + 1} \quad (2.42)$$

és

$$\frac{mT_x - 1}{n + 1} \leq \frac{kT_x - 1}{n}. \quad (2.43)$$

Ezek szerint elegendő megmutatni, hogy $m = k$ esetén a (2.42) és (2.43) egyenlőtlenségek teljesülnek. Tegyük fel, hogy ez nincs így. A (2.41) egyenlőtlenség második feléből

azonnal következik, hogy $1 \leq kT_x$ fennáll, így a (2.43) egyenlőtlenség triviálisan teljesül az $m = k$ esetben, tehát csakis a (2.42) sérülhet, ami az jelenti, hogy

$$\frac{(k - \frac{1}{2})T_x - 1}{n} \geq \frac{kT_x - 1}{n + 1},$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$(k - \frac{n+1}{2}) T_x \geq 1.$$

Ekkor azonban, ha $x^0(t^*) = 0$, akkor

$$\text{sc}(x^0, [t^* - 1, t^*]) \leq 2k - n - 2$$

teljesül. Innen kapjuk, hogy

$$\text{sc}(x_{t^*}, \mathbb{K}) \leq \text{sc}(x^0, [t^* - 1, t^*]) + n = 2k - 2,$$

fennáll, amiből $V_{\mathbb{K}}^+(x_{t^*}) = 2k - 2$ következik, ez pedig ellentmondás. Ez az ellentmondás igazolja, hogy $m = k$, amivel a tétel állítását bebizonyítottuk. \square

Tegyük most fel, hogy a visszacsatolás pozitív, és hogy x egy nemkonstans periodikus megoldása a (2.39) egyenletrendszernek $T_x > 0$ minimális periódussal, valamint hogy $V_{\mathbb{K}}^+(x) = 2k \geq 2$. Ekkor a 2.30. és 2.31. Tételekből, valamint az $r_+ < T_x/2$ egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\begin{aligned} \dot{x}^0(t) &= -\alpha x^0(t) + f_{\beta}(x^1(t)) = -\alpha x^0(t) + f_{\beta}(x^0(t + r_+)) \\ &= -\alpha x^0(t) + f_{\beta}(x^0(t - (T_x - r_+))) = -\alpha x^0(t) + f_{\beta}(x^0(t - \tau_+)) \end{aligned}$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, ahol

$$\tau_+ = \frac{(n - k + 1)T_x + 1}{n + 1} \in (T_x/2, T_x].$$

Így x^0 egy nemkonstans periodikus megoldása az $\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + f_{\beta}(x(t - \tau_+))$ késleltetett differenciálegyenletnek, melyre $V_{\tau_+}^+(x^0) = 2$ teljesül, valamint a késleltetés és a periódus között fennáll a

$$\tau_+ = \frac{(n - k + 1)T(\tau_+) + 1}{n + 1}$$

összefüggés.

Analóg módon, negatív visszacsatolás esetén, ha x a (2.39) egyenlet egy nemkonstans periodikus megoldása T_x minimális periódussal, melyre $V_{\mathbb{K}}^-(x) = 2k - 1$, akkor x^0 az $\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + f_{\beta}(x(t - \tau_-))$ egyenlet $V_{\tau_-}^+(x^0) = 2$ típusú megoldása, melyre a késleltetés és a periódus közt fennáll a

$$\tau_- = \frac{(n - k + \frac{3}{2})T(\tau_-) + 1}{n + 1}$$

összefüggés.

Megfordítva, könnyű ellenőrizni, hogy ha $k \in \mathbb{N}$ és y a (2.15) pozitív visszacsatolású egyenlet periodikus megoldása, melyre $V_\tau^+(y) = 2$ és $\tau = \frac{(n-k+1)T(\tau)+1}{n+1}$ teljesül, akkor

$$\begin{aligned} x_+(t) &= (x_+^0(t), \dots, x_+^j(t), \dots, x_+^n(t)) \\ &= \left(y(t), \dots, y\left(t + j \cdot \frac{kT(\tau)-1}{n+1}\right), \dots, y\left(t + n \cdot \frac{kT(\tau)-1}{n+1}\right) \right) \end{aligned}$$

a (2.39) pozitív visszacsatolású egyenletrendszer nemkonstans periodikus megoldása.

A 2.31. Tétel bizonyításának elején látott érveléshez hasonló gondolatmenettel kapjuk hogy $V_{\mathbb{K}}^+(x_+) = 2k$. Analóg módon adódik, hogy

$$\begin{aligned} x_-(t) &= (x_-^0(t), \dots, x_-^j(t), \dots, x_-^n(t)) \\ &= \left(y(t), \dots, y\left(t + j \cdot \frac{(k-1/2)T(\tau)-1}{n+1}\right), \dots, y\left(t + n \cdot \frac{(k-1/2)T(\tau)-1}{n+1}\right) \right) \end{aligned}$$

a negatív visszacsatolású (2.39) egyenletrendszer nemkonstans periodikus megoldása, melyre $V_{\mathbb{K}}^-(x_-) = 2k - 1$ teljesül. A fenti okfejtés az alábbi tételhez vezet.

2.32. Tétel. Jelölje T a pozitív visszacsatolású (2.15) egyenlet periódusfüggvényét. Ekkor pozitív visszacsatolás esetén kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés adható a (2.39) egyenletrendszer $V_{\mathbb{K}}^+ = 2k \geq 2$ típusú periodikus megoldásai és az alábbi két görbe metszéspontjai között:

$$(\tau^*, \infty) \ni \tau \mapsto (\tau, T(\tau)), \quad \text{illetve} \quad \mathbb{R} \ni \zeta \mapsto \left(\frac{(n-k+1)\zeta+1}{n+1}, \zeta \right).$$

Analóg módon, negatív visszacsatolás esetén kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés adható a (2.39) egyenletrendszer $V_{\mathbb{K}}^- = 2k - 1$ típusú periodikus megoldásai és az alábbi két görbe metszéspontjai között:

$$(\tau^*, \infty) \ni \tau \mapsto (\tau, T(\tau)), \quad \text{illetve} \quad \mathbb{R} \ni \zeta \mapsto \left(\frac{(n-k+\frac{3}{2})\zeta+1}{n+1}, \zeta \right).$$

A fő eredményünk bizonyításához szükségünk van a következő lemmára.

2.33. Lemma. Jelölje T a pozitív visszacsatolású (2.15) periódusfüggvényét. Ekkor

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{T(\tau)}{\tau} = 1.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk rá, hogy ha x az egyetlen olyan periodikus megoldása az

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + f_\beta(x(t-\tau)),$$

egyenletnek, melyre $V_\tau^+(x) = 2$, akkor x szintén az egyetlen olyan periodikus megoldása az

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) - f_\beta(x(t - (\tau - T(\tau)/2))),$$

késleltetett differenciálegyenletnek, melyre $V_{\tau-T(\tau)/2}^-(x) = 1$ teljesül. Mallet-Paret és Nussbaum [46, Theorem 3.2] eredménye szerint negatív visszacsatolás esetén az analóg módon definiált periódusfüggvény és a késleltetés hányadosa 2-höz tart, amint a késleltetés tart a végtelenbe. Ezt összevetve a fentiekkel, kapjuk, hogy

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{T(\tau)}{\tau - T(\tau)/2} = 2,$$

ami igazolja az állításunkat. □

Most már készen vagyunk a 2.15. és 2.27. Tételekkel analóg tétel kimondására a rendszerünkre vonatkozóan. Az alábbi tétel Yi, Chen és Wu [71] dolgozatában csak pozitív, sima visszacsatolásra lett kimondva és csak az $n = 2$ esetre lett bizonyítva. Meglátásuk szerint a nehézséget az $n \geq 3$ esetben a 2.31. Tétel bizonyítása jelenti. Ezt mi a fentiekben tisztáztuk tetszőleges $n \geq 1$ és minden általunk megengedett visszacsatolás esetére. A tétel abban az értelemben nem teljes, hogy – mint látni fogjuk – a relatíve lassan oszcilláló periodikus megoldások esetén csak a létezésre tudunk elegendő feltételt adni.

Vezessük be a következő jelölést:

$$v_n(\alpha, \beta) = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + (n+1) \arccos \frac{\alpha}{\beta}.$$

2.34. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f_\beta \in S$ és $\delta = 1$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

- (i) $\mathbb{N} \ni k \geq \frac{n+1}{2}$ esetén a (2.39) egyenletrendszernek pontosan akkor létezik olyan periodikus x megoldása, amelyre $V_{\mathbb{K}}^+(x) = 2k$ teljesül, ha $v_n(\alpha, \beta) > 2k\pi$. Ekkor ez a megoldás – az időváltozó eltolásától eltekintve – egyértelmű.
- (ii) $\mathbb{N} \ni k < \frac{n+1}{2}$ esetén, ha $v_n(\alpha, \beta) > 2k\pi$ teljesül, akkor a (2.39) egyenletrendszernek létezik olyan periodikus x megoldása, amelyre $V_{\mathbb{K}}^+(x) = 2k$.
- (iii) $V_{\mathbb{K}}^+ = 0$ típusú nemkonstans periodikus megoldások nem léteznek.

Analóg módon, ha $f_\beta \in S$ és $\delta = -1$, akkor az alábbiak teljesülnek.

- (iv) $\mathbb{N} \ni k \geq \frac{n+2}{2}$ esetén a (2.39) egyenletrendszernek pontosan akkor létezik olyan periodikus x megoldása, amelyre $V_{\mathbb{K}}^-(x) = 2k - 1$ teljesül, ha $v_n(\alpha, \beta) > (2k - 1)\pi$. Ekkor ez a megoldás – az időváltozó eltolásától eltekintve – egyértelmű.
- (v) $\mathbb{N} \ni k < \frac{n+2}{2}$ esetén, ha $v_n(\alpha, \beta) > (2k - 1)\pi$ teljesül, akkor a (2.39) egyenletrendszernek létezik olyan periodikus x megoldása, amelyre $V_{\mathbb{K}}^-(x) = 2k - 1$.

Az $f_\beta = \beta f_0$ esetben a fenti feltételekben szereplő „ $>$ ” relációk „ \geq ” relációkra cserélendők. Ekkor egyenlőség esetén pedig a megoldások az időváltozó eltolásától és konstans szorzótól eltekintve egyértelműen meghatározottak.

Bizonyítás. A (iii) állítás a 2.12. Tételből következik. A többi állítás bizonyítása ugyanúgy megy mind a pozitív, mind a negatív esetben és mindkét típusú visszacsatolásra, ezért feltesszük, hogy $f_\beta \in S$ és csak az (i) és (ii) állításokat igazoljuk. Emlékeztetőül,

$$\tau^* = \frac{2\pi - \arccos \frac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}, \quad \text{és} \quad T(\tau^*+) = \lim_{\tau \searrow \tau^*} T(\tau) = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \quad (2.44)$$

teljesülnek.

(i) Ha $k > n + 1$, akkor a 2.26 és a 2.32. Tételekből következik, hogy

$$T(\tau^*+) < \frac{(n+1)\tau^* - 1}{n-k+1} \quad (2.45)$$

szükséges és elegendő feltételt jelent a (2.39) rendszer $V_{\mathbb{K}}^+ = 2k$ típusú periodikus megoldásának létezésére és egyértelműségére. Innen (2.44)-ből adódik az állítás.

Ha $k = n + 1$, akkor az imént használt tételekből adódik, hogy

$$\tau^* < \frac{1}{n+1} \quad (2.46)$$

szükséges és elegendő feltétel a szóban forgó típusú periodikus megoldás létezésére és egyértelműségére. Innen a τ^* -ra vonatkozó formulából azonnal adódik az állítás.

Ha $\frac{n+1}{2} \leq k < n + 1$, akkor az előzőekhez hasonlóan most

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} > \frac{(n+1)\tau^* - 1}{n-k+1} \quad (2.47)$$

adja a szükséges és elegendő feltételt, amit a (2.44) formulák segítségével átalakítva kapjuk az állítást.

(ii) A 2.26. és 2.32. Tételekből, valamint a 2.33. Lemmából következik az állítás. \square

Vegyük észre, hogy a fenti tétel $n = 0$ esetén a 2.15. és 2.27. Tételek állításait adja, valamint pozitív visszacsatolás és $n = 1$ esetén az összes típusú periodikus megoldás létezésére és egyértelműségére szükséges és elegendő feltételt ad.

A 2.26. Tétel és Nussbaum [57] eredményeinek az alábbi egyszerű következményével egészítjük ki az előző tétel állításait.

2.35. Tétel. *A következő állítások teljesülnek.*

(i) *Tegyük fel, hogy $\frac{n+1}{4} < k < \frac{n+1}{2}$, $\delta = 1$, valamint hogy $\tau^*(4k - n - 1) \geq 3$. Ekkor a (2.39) egyenletrendszernek nem létezik $V_{\mathbb{K}}^+ = 2k$ típusú periodikus megoldása.*

(ii) *Tegyük fel, hogy $\frac{n+3}{4} < k < \frac{n+2}{2}$, $\delta = -1$, valamint hogy $\tau^*(4k - n - 3) \geq 3$. Ekkor a (2.39) egyenletrendszernek nem létezik $V_{\mathbb{K}}^- = 2k - 1$ típusú periodikus megoldása.*

Bizonyítás. A két állítás bizonyítása hasonlóan történik, így csak az első állítás bizonyítását részletezzük. Nussbaum [57, Theorem 1.2] eredményének egyszerű következményeként adódik, hogy $T(\tau)/\tau \neq 4/3$ semmilyen $\tau \in \text{dom } T$ esetén. A (2.44) összefüggésekből nyerjük, hogy

$$\lim_{\tau \searrow \tau^*} \frac{T(\tau)}{\tau} = \frac{2\pi}{2\pi - \arccos \frac{\alpha}{\beta}} < \frac{4}{3},$$

így T folytonosságát kihasználva kapjuk, hogy $T(\tau)/\tau < \frac{4}{3}$ minden $\tau \in \text{dom } T$ esetén. Ezek után következik, hogy ha

$$\frac{\tau(n+1) - 1}{n - k + 1} \geq \frac{4\tau}{3} \quad (2.48)$$

fennáll bármely $\tau \in \text{dom } T$ esetén, akkor a 2.26. Tételben szereplő két görbének nem lehet metszéspontja, és így a tétel szerint a (2.39) egyenletrendszernek nem létezik $V_{\mathbb{K}}^+ = 2k$ típusú periodikus megoldása. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy jelen feltevéseink mellett (2.48) valóban fennáll. Ezzel az (i) állítást beláttuk. \square

Yi, Chen és Wu [71] dolgozatukban az általuk vizsgált – pozitív visszacsatolású, sima – esetre megfogalmaztak egy sejtést, miszerint a (2.34). Tétel (i) állítása igaz bármely $k \geq 1$ esetén. A 2.32. Tételből és a fenti bizonyításból világosan látszik, hogy ennek igazolásához – a pozitív és negatív visszacsatolású esetre és mindkét típusú visszacsatolásra egyaránt – elegendő lenne belátnunk a következő sejtésünket.

2.36. Sejtés. Jelölje T a pozitív visszacsatolású (2.15) egyenlet periódusfüggvényét. Ekkor a $\text{dom } T \ni \tau \mapsto T(\tau)/\tau$ függvény monoton nemnövekvő.

A 2.35. Tétel bizonyításában láttuk, hogy $T(\tau)/\tau < \frac{4}{3}$ teljesül minden $\tau \in \text{dom } T$ esetén. Így a 2.36. Sejtés alábbi (2.49) átfogalmazásából látszik, hogy az többet állít, mint amit a 2.26. Tételben bizonyítottunk.

$$\frac{T(\tau_2) - T(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \leq \frac{T(\tau_1)}{\tau_1} \quad \text{bármely } \tau_1, \tau_2 \in \text{dom } T, \tau_1 < \tau_2 \text{ esetén.} \quad (2.49)$$

2.37. Megjegyzés. Sejtésünk megerősítéseként megjegyezzük, hogy a szakaszonként lineáris visszacsatolás esetén igazolható, hogy létezik $\tau^{**} \in (\tau^*, \infty)$, hogy a (τ^{**}, ∞) intervallumon az állítás igaz. A bizonyítás meglehetősen technikai és terjedelmes, így itt nem térünk ki rá. Megemlítjük továbbá, hogy a fenti sejtésünket numerikus szimulációkkal is alá lehet támasztani.

3. fejezet

Másodrendű differenciaegyenletek globális stabilitásvizsgálata

Ebben a fejezetben paraméteres másodrendű differenciaegyenletek egyensúlyi helyzetének globális stabilitásával fogunk foglalkozni. A 3.1. részben egy diszkrét idejű neuronmodell triviális egyensúlyi helyzetének globális stabilitására adunk szükséges és elegendő feltételt a paraméterek függvényében, míg a 3.2. részben egy nagyon elterjedt, diszkrét idejű, Ricker-féle populációdinamikai modell pozitív egyensúlyi helyzetének globális stabilitásáról szóló sejtést fogunk igazolni.

A bizonyítás analitikus és számítógéppel segített megbízható számítások kombinálásából áll, és a két részben hasonló módon történik. Először megkonstruáljuk az egyensúlyi helyzet egy paramétertől független környezetét, amely az egyensúlyi helyzet vonzástartományához tartozik minden olyan paraméterérték esetén, amire a lokális stabilitás fennáll. Ezt a kritikus paraméterek közelében mindkét modell esetén a (rezonáns) Neimark–Sacker-normálforma segítségével adjuk meg. Tudomásunk szerint a Neimark–Sacker-bifurkáció normálformájának ilyen célú felhasználása újdonság az irodalomban. Ezután számítógéppel segített módszerekkel (intervallumaritmetika, gráfrepresentáció) megmutatjuk, hogy minden trajektória belép ebbe a kis környezetbe, ami igazolja a globális aszimptotikus stabilitást minden olyan esetben, amikor a lokális aszimptotikus stabilitás fennáll.

A „számítógéppel segített” itt azt jelenti, hogy a számításainkat, és egyes becsléseinket egy számítógépes program segítségével végezzük, amely megbízható eredményeket ad, azaz minden lehetséges numerikus hiba kontrollálva van. Ez lehetővé teszi, hogy a kapott kimenetek (eredmények) segítségével *matematikai tételeket bizonyítsunk*. Az érdeklődő olvasónak Moore [52], Alefeld [1], valamint Tucker [64, 65] és Nedialkov és szerzőtársainak [53] munkáit ajánljuk a számítógéppel segített bizonyítások és a megbízható számítások témaköréből. Szükségünk lesz a leképezésünknek egy gráfrepresentációjára is, melynek csúcsait a fázistér egy rács alapú particionálásából kapjuk. Ez a módszer

egyaránt használatos leképezések megbízható és nem megbízható számításokkal történő tanulmányozására (lásd [14,15,19,45]), valamint differenciaegyenletek attraktorának vizsgálatára is [67].

3.1. Egy diszkrét idejű neuronmodell

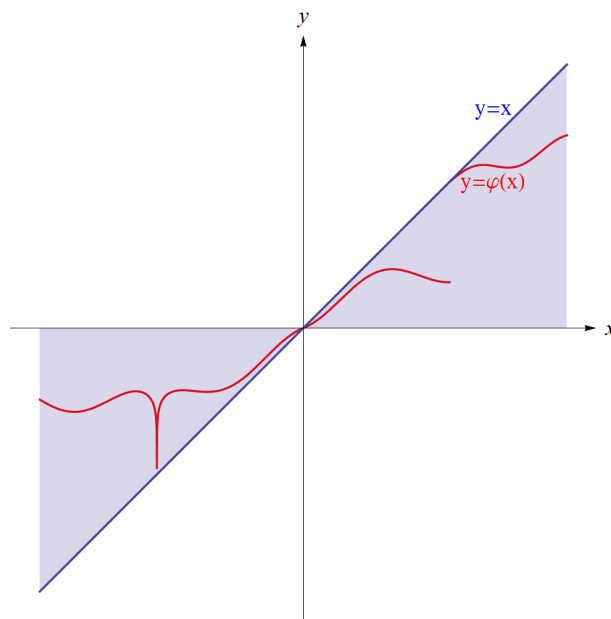
Vizsgálatunk tárgya ebben a részben a következő másodrendű differenciaegyenlet:

$$x_{n+1} = mx_n - \alpha\varphi(x_{n-1}), \quad (3.1)$$

ahol $(\alpha, m) \in \mathbb{R}^2$, valamint φ egy valós függvény, amely eleget tesz a diszkrét Yorke-feltételnek, vagyis

$$\min\{0, x\} \leq \varphi(x) \leq \max\{0, x\} \quad (3.2)$$

fennáll bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Vegyük észre, hogy a fenti feltételből következik, hogy φ folytonos a 0-ban, $\varphi(0) = 0$, valamint $0 \leq \liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \leq 1$ fennáll (lásd a 3.1. ábrát).



3.1. ábra. A $\varphi(x)$ függvény eleget tesz a diszkrét Yorke-feltételnek.

Megjegyezzük, hogy a (3.1) egyenlet egyfajta diszkrét idejű változata a 2.4. részben vizsgált (2.15) egyenletnek.

A (3.1) egyenlet helyett a továbbiakban az alábbi vele ekvivalens kétdimenziós leképezést vizsgáljuk:

$$F_{\alpha,m}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F_{\alpha,m}: (x, y) \mapsto (y, my - \alpha\varphi(x)). \quad (3.3)$$

Az egyszerűbb jelölés érdekében sokszor elhagyjuk a paramétereket az alsó indexből és a rövidebb $F = F_{\alpha,m}$ jelöléssel élünk. A rövideg kedvéért egy tetszőleges $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pont esetén legyen

$$(x_k, y_k) = F^k(x, y).$$

Speciálisan, (x_0, y_0) az (x, y) pontot jelöli. Ebben a részben az F triviális fixpontjának globális aszimptotikus stabilitását fogjuk vizsgálni. Amellett, hogy matematikai szempontból a fixpontok (egyensúlyi helyzetek) globális stabilitásvizsgálata az alapvető kérdések közé tartozik, a neuronhálózatok elméletében is kulcsfontosságú szerepe van optimalizálási és jeltovábbítási problémák modellezésében.

Számos dolgozatban található elegendő feltételt a fenti egyenletnél jóval összetettebb neuronhálózati modellek egyensúlyi helyzetének globális stabilitására (lásd például [9, 22, 51, 70, 72] cikkeket és a bennük lévő hivatkozásokat), valamint általánosabb differenciaegyenlet-rendszerek egyensúlyi helyzeteinek globális stabilitásáról (lásd [31, 43, 54–56] a teljesség igénye nélkül), de nincs tudomásunk olyan eredményről, amely az adott feltételek szükségességét is bizonyítaná.

Ennek a résznek a fő eredménye a 3.11. Tétel, amelyben szükséges és elegendő feltételt adunk az

$$x_{n+1} = mx_n - \alpha \tanh(x_{n-1}), \quad (3.4)$$

egyenlet triviális egyensúlyi helyzetének globális aszimptotikus stabilitására az $(\alpha, m) \in \mathbb{R}^2$ paraméterek függvényében. A visszacsatolási függvény konkretizálására azért van szükség, mert – mint azt hamarosan látni fogjuk – a bizonyításunknak mind az analitikus, mind az intervallumaritmetikával segített részében éles becsléseket kell adnunk a leképezéssel kapcsolatban, amit egy általánosabb függvényosztály nem tenné lehetővé, így azt rögzítettük a szigmoid típusú visszacsatolások között a leggyakrabban használatos tanh függvénynek (lásd pl. [26, 69]). Mindazonáltal úgy gondoljuk, hogy a bizonyításunkból jól látható, hogy más, hasonló típusú leképezés választása esetén egy hasonló okfejtés és számolás analóg eredmények bizonyítását tenné lehetővé.

Megjegyezzük, hogy az $m \in (0, 1)$ esetben a (3.4) egyenlet Clark-típusú [13]. Az ilyen egyenletekre vonatkozóan számos sejtést fogalmaztak meg. El-Morshedy és Liz [18] sejtése szerint, ha $f \in C^3([0, \infty), (0, \infty))$, $f'(0) < 0$ és f Schwarz-deriváltja negatív, azaz $(Sf)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 < 0$ fennáll minden $x > 0$ esetén, akkor az

$$x_{n+1} = mx_n + f(x_{n-k}), \quad m \in (0, 1), \quad k \in \mathbb{N}$$

egyenlet egyetlen egyensúlyi helyzetének lokális aszimptotikus stabilitása maga után vonja annak globális aszimptotikus stabilitását. Jiménez López és Parreño [28, 29] megmutatta, hogy a $k \geq 3$ esetben adható ellenpélda, de a kérdés továbbra is nyitott a $k = 1$ és $k = 2$ esetekben. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $f(x) \equiv -\alpha \tanh(x)$ függvény kielé-

gíti a fenti feltételeket (formálisan egy eltolás után), így a 3.11. Tétel igazolja a sejtés erre a speciális esetre vonatkozó állítását.

A bizonyítás analitikus és számítógéppel segített megbízható módszerek kombinációja, és a következő három fő lépésből áll:

- 1. lépés: A fázistér egy kompakt S részhalmazának megkonstruálása (elemi módszerekkel), amely független a paramétereiktől és tartalmaz egy pozitív invariáns részhalmazt, amelybe minden trajektória belép bármely (α, m) paraméterpár esetén (lásd a 3.1.1. szakaszban a 3.7. Állítást és a 3.8. Következményt).
- 2. lépés: A triviális egyensúlyi helyzet egy U környezetének megkonstruálása, mely az egyensúlyi helyzet vonzástartományába esik, és amely független az α és m paraméterek megválasztásától. Ezt linearizálással és a (rezonáns) Neimark–Sacker-bifurkáció normálformájának segítségével tesszük. A számításokat és becsléseket el lehetne végezni analitikusan, „kézzel” is, mindenesetre egyes számításokat és becsléseket a *Wolfram Mathematica* számítógép-algebrai rendszer szimbolikus számításainak és beépített intervallumaritmetikai eszközeinek segítségével végezzük. A részleteket lásd a 3.1.2. szakasz I. részében.
- 3. lépés: Annak bizonyítása, hogy az 1. lépésben megkonstruált kompakt S halmazból indított bármely trajektória belép a 2. lépésben megkonstruált kis U környezetbe. Ez intervallumaritmetikai eszközöket és számítógéppel segített gráfrepresentációs eljárásokat igényel (lásd a 3.1.2. szakasz II. részét).

Ez a rész az alábbi felépítést követi. A 3.1.1. szakaszban néhány elemi megfigyelés és korábbi eredmények ismertetése után megkonstruálunk két pozitív invariáns, attraktív részhalmazt a fázistérnek, melyek metszetének részhalmaza egy kompakt S halmaz minden $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ esetén. Ehhez a (3.1) egyenlettől a (3.2) feltételen kívül meg kell követelnünk az alábbi két tulajdonságot is:

(H1) φ korlátos, azaz létezik $M_\varphi > 0$, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $|\varphi(x)| < M_\varphi$ fennáll,

(H2) φ folytonos és $\min\{0, x\} < \varphi(x) < \max\{0, x\}$ fennáll bármely $x \neq 0$ esetén.

Vegyük észre, hogy a \tanh függvény kielégíti a fenti két feltételt. A 3.1.2. részben bizonyítjuk a rész fő eredményét, amelyben szükséges és elegendő feltételt adunk a (3.4) egyenlet triviális egyensúlyi helyzetének globális aszimptotikus stabilitására.

3.1.1. Előkészületek

Vegyük észre, hogy annak ellenére, hogy φ nem feltétlenül differenciálható a 0-ban, a $(0, 0)$ egyensúlyi helyzet lokális stabilitását leírhatjuk az F leképezés következő „általá-

nosított sajátértékeinek" segítségével:

$$\mu_{1,2}(\lambda) = \mu_{1,2}(\alpha, m; \lambda) = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4\lambda\alpha}}{2},$$

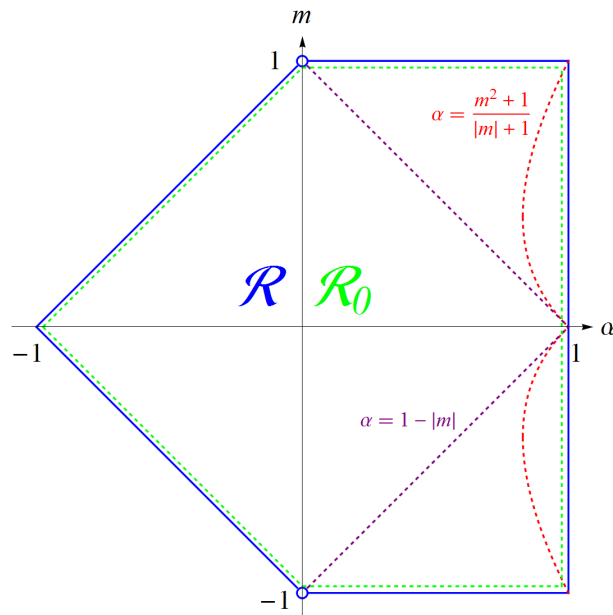
ahol $\lambda \in [\delta_{\inf}(\varphi; 0), \delta_{\sup}(\varphi; 0)]$, melyre létezik olyan $x_k \rightarrow 0$ sorozat, hogy $\frac{\varphi(x_k) - \varphi(0)}{x_k} = \frac{\varphi(x_k)}{x_k} \rightarrow \lambda$, amint $k \rightarrow \infty$. Emlékeztetünk, hogy a (3.2) tulajdonságból következik, hogy $\lambda \in [0, 1]$. Könnyű ellenőrizni, hogy $\max |\mu_{1,2}(\lambda)| \leq 1$ csak akkor állhat fenn, ha $m \in [-2, 2]$ és $\lambda\alpha \in [||m| - 1, 1]$ teljesül, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\lambda\alpha = 1$ vagy $\lambda\alpha = |m| - 1$. Következésképpen a $(0, 0)$ fixpont csak akkor lehet (globálisan) stabil, ha $|m| - 1 \leq \delta_{\inf}(\varphi; 0)\alpha \leq \delta_{\sup}(\varphi; 0)\alpha \leq 1$ is fennállnak. Defináljuk a következő paramétertartományt:

$$(\alpha, m) \in \mathcal{R}(m) := \text{cl}(\mathcal{R}_0(m)) \setminus \{(0, -1), (0, 1)\},$$

ahol

$$\mathcal{R}_0(m) := (|m| - 1, 1) \times (-1, 1).$$

A fenti paramétertartományokat a 3.2. ábra szemlélteti.



3.2. ábra. Folytonos kék vonallal $\mathcal{R}(m)$, szaggatott zöld vonallal az $\mathcal{R}_0(m)$ halmaz látható. A szaggatott piros és lila vonalak rendre az $\alpha = \frac{m^2 + 1}{|m| + 1}$, illetve az $\alpha = 1 - |m|$ görbéket szemléltetik.

3.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy φ eleget tesz a (H1) feltételnek. Ekkor ha $|m| > 1$, akkor a (3.3) leképezés $(0, 0)$ fixpontja nem globálisan aszimptotikusan stabil.*

Bizonyítás. Valóban, ha $|m| > 1$, akkor $\min\{|x_0|, |y_0|\} > \frac{M_\varphi|\alpha|}{|m|-1}$ választása esetén következik $\min\{|x_1|, |y_1|\} > \frac{M_\varphi|\alpha|}{|m|-1}$ is, így a $(0, 0)$ fixpont nem lehet globálisan stabil. \square

3.2. Lemma. A (3.3) leképezés $(0, 0)$ fixpontja globálisan aszimptotikusan stabil, ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

(a) $(\alpha, m) \in \mathcal{R}_0(m)$, ahol $\alpha < 1 - |m|$ vagy

(b) φ eleget tesz a (H2) feltételnek, valamint $(\alpha, m) \in \mathcal{R}(m)$, ahol $\alpha < 1 - |m|$.

A fenti paramétertartományokat a 3.2. ábra szemlélteti.

Bizonyítás. Linearizálással adódik az egyensúlyi helyzet lokális aszimptotikus stabilitása, így csak a globális attraktivitást kell bizonyítanunk. Először az (a) állítást bizonyítjuk. Bármely $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén $|y_1| \leq |m||y_0| + |\alpha||\varphi(x_0)|$ fennáll, így a $\max\{|x_1|, |y_1|\} \leq \max\{|x_0|, |y_0|\}$ és a $\max\{|x_2|, |y_2|\} \leq (|m| + |\alpha|) \max\{|x_0|, |y_0|\}$ egyenlőtlenségek teljesülnek. Mivel most $|m| + |\alpha| < 1$, így indukcióval kapjuk, hogy $\max\{|x_{2k+1}|, |y_{2k+1}|\} \leq \max\{|x_{2k}|, |y_{2k}|\}$ bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén, valamint $\lim_{k \rightarrow \infty} \max\{|x_{2k}|, |y_{2k}|\} = 0$, ami bizonyítja a globális aszimptotikus stabilitást.

A (b) esetben, ha $\alpha \in (|m| - 1, 1 - |m|)$, akkor a fenti érvelés ismét megállja a helyét. Legyen tehát $\alpha = |m| - 1 \in [-1, 0)$ és $m \in (-1, 1)$. Ekkor hasonló gondolatmenettel adódik, hogy $\max\{|x_{2k}|, |y_{2k}|\}$ monoton csökkenő, így $\max\{|x_{2k}|, |y_{2k}|\} \rightarrow c \geq 0$, amint $k \rightarrow \infty$. A $c = 0$ megmutatásához φ folytonossága miatt elegendő igazolni, hogy bármely (x_0, y_0) esetén, melyekre $\max\{|x_0|, |y_0|\} = c > 0$ teljesül,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \max\{|x_{2k}|, |y_{2k}|\} < c$$

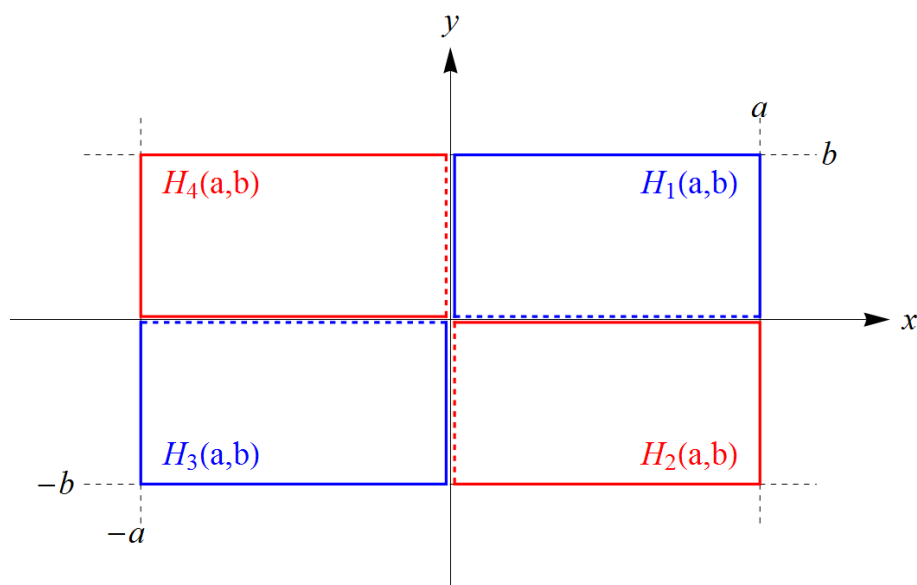
következik. Ez a φ -re vonatkozó feltételből és $m \in (-1, 1)$ összefüggésből könnyen belátható, hiszen ekkor bármely $(x, y) \neq (0, 0)$ esetén $|my - \alpha\varphi(x)| < \max\{|x|, |y|\}$ fennáll. \square

Noha a későbbiekben ennél erősebb tételt fogunk megadni, megjegyezzük, hogy a fentivel analóg módon igazolható a globális stabilitás az $(\alpha, m) \in \{1 - |m|\} \times (-1, 1)$ esetre is, amennyiben φ teljesíti a (H2) feltételt.

Definiáljuk tetszőleges $a, b \in (0, \infty]$ értékekre a következő halmazokat:

$$\begin{aligned} H_1(a, b) &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq a; 0 < y \leq b\}, \\ H_2(a, b) &= \{(x, y) : 0 < x \leq a; -b \leq y \leq 0\}, \\ H_3(a, b) &= \{(x, y) : -a \leq x \leq 0; -b \leq y < 0\}, \\ H_4(a, b) &= \{(x, y) : -a \leq x < 0; 0 \leq y \leq b\}, \end{aligned}$$

továbbá legyen $H_i = H_i(\infty, \infty)$ bármely $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén (lásd a 3.3. ábrát).

3.3. ábra. A $H_1(a, b)$, $H_2(a, b)$, $H_3(a, b)$ és $H_4(a, b)$ halmazok.

3.3. Állítás. Tegyük fel, hogy $m \in [0, 1]$ és $\alpha \in [0, 1]$. Ekkor a következők teljesülnek.

- (i) Ha $(x_0, y_0) \in H_1(a, b)$, akkor $(x_1, y_1) \in H_1(b, mb) \cup H_2(b, \alpha a)$.
- (ii) Ha $(x_0, y_0) \in H_2(a, b)$, akkor $(x_1, y_1) \in H_3(b, mb + \alpha a)$.
- (iii) Ha $(x_0, y_0) \in H_3(a, b)$, akkor $(x_1, y_1) \in H_3(b, mb) \cup H_4(b, \alpha a)$.
- (iv) Ha $(x_0, y_0) \in H_4(a, b)$, akkor $(x_1, y_1) \in H_1(b, mb + \alpha a)$.
- (v) Ha $m \in [0, 1)$ és $(x_k, y_k) \in H_1$ bármely $k \in \mathbb{N}_0$ esetén vagy $(x_k, y_k) \in H_3$ bármely $k \in \mathbb{N}_0$ esetén, akkor $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = (0, 0)$. Továbbá, ha (H2) is teljesül, akkor $m = 1$ esetén is fennáll az állítás.

Bizonyítás. A bizonyítás elemi. Vegyük észre, hogy $(x_0, y_0) \in H_1(a, b)$ esetén $0 < x_1 = y_0 \leq b$. Mivel $y_1 = my_0 - \alpha\varphi(x_0)$ és (3.2) fennállnak, így $(x_0, y_0) \in H_1(a, b)$ miatt $-\alpha a \leq y_1 \leq mb$, amiből $(x_1, y_1) \in H_1(b, mb) \cup H_2(b, \alpha a)$ következik. Ezzel az (i) állítást beláttuk. A (ii)–(iv) állítások hasonló gondolatmenettel igazolhatók.

Az (v) állítás bizonyításához tegyük fel, hogy $(x_k, y_k) \in H_1$ fennáll bármely $k \in \mathbb{N}_0$ esetén. Legyen $a = \max\{x_0, y_0\} > 0$. Ekkor az (i) állítás ismételt alkalmazásával nyerjük, hogy az

$$(x_{2k}, y_{2k}) \in H_1(m^k a, m^k a), \quad (x_{2k+1}, y_{2k+1}) \in H_1(m^k a, m^{k+1} a) \quad \text{és} \quad 0 < y_{2k+1} \leq y_{2k}$$

összefüggések fennállnak bármely $k \in \mathbb{N}_0$ esetén. Ebből következik, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max\{x_k, y_k\} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = c \geq 0,$$

valamint hogy $m \in [0, 1)$ esetén $c = 0$. Végül vegyük észre, hogy ha $m = 1$, akkor folytonos φ esetén elegendő megmutatnunk, hogy (c, c) semmilyen $c > 0$ esetén nem fixpont. Ez a $0 < \varphi(c)$ egyenlőtlenségből azonnal következik.

Az $(x_k, y_k) \in H_3$ esetre vonatkozó állítás a fentivel analóg módon igazolható. \square

3.4. Megjegyzés. A fentiekhez hasonló állítások fogalmazhatók meg az $m \in [-1, 0]$ esetben is. Mivel ezen állításokra a későbbiekben nem lesz szükségünk, így ezeket nem részletezzük.

3.5. Megjegyzés. A 3.3. Állítás – és a vele analóg, $m < 0$ esetre adható állítás – induktív alkalmazásával egyszerűen igazolható a $(0, 0)$ egyensúlyi helyzet globális aszimptotikus stabilitása, amennyiben $(\alpha, m) \in \mathcal{R}_0(m) \setminus \left[\frac{1}{1+|m|}, 1\right] \times (-1, 1)$. Mivel a 3.6. Tétel ennél többet állít, így ennek bizonyítását nem részletezzük.

A következő tétel a 3.2. Lemma, valamint Nanya és szerzőtársai [54–56] eredményeinek következménye. Ezen dolgozatokban a szerzők a miénknél általánosabb, nem-autonóm differenciaegyenleteket vizsgálnak a Yorke-feltétel, valamint az általánosított Yorke-feltétel teljesülése mellett.

3.6. Tétel. A (3.3) leképezés $(0, 0)$ fixpontja globálisan aszimptotikusan stabil, ha az alábbi feltételek egyike teljesül:

$$(a) \quad (\alpha, m) \in \mathcal{R}_0(m) \setminus \left[\frac{m^2+1}{|m|+1}, 1\right] \times (-1, 1);$$

$$(b) \quad \varphi \text{ eleget tesz a (H2) feltételnek és } (\alpha, m) \in \mathcal{R}(m) \setminus \left(\frac{m^2+1}{|m|+1}, 1\right] \times [-1, 1].$$

A fenti paramétertartományok szemléltetését lásd a 3.2. ábrán.

Bizonyítás. Először is megmutatjuk, hogy a fixpont lokálisan stabil, ha $(\alpha, m) \in \mathcal{R}(m)$ és $\alpha \neq 1$. A fixpont körüli linearizálással adódik a lokális aszimptotikus stabilitás, ha $(\alpha, m) \in \mathcal{R}_0(m)$ vagy $m = 1$ és $\alpha < 1$. Az $\alpha = |m| - 1$ esetben a $[-\varepsilon, \varepsilon]^2$ halmaz pozitív invariáns a (3.3) leképezésre nézve bármely $\varepsilon > 0$ esetén, ami garantálja a $(0, 0)$ fixpont lokális stabilitását.

Most rátérünk a globális attraktivitás bizonyítására. Legyen $m > 0$. Ekkor $\alpha > 0$ esetén az állítás az [55, Theorem 3], valamint az [54, Theorem 2] tételek speciális eseteként adódik. Ha $m = 0$ vagy $\alpha \leq 0$, akkor a 3.2. Lemma alkalmazható (ahogy az $\alpha \leq 1 - |m|$ esetben is).

Tegyük fel most, hogy $m < 0$. Ekkor az $y_n := (-1)^n x_n$ helyettesítés a (3.1) egyenletet az $y_{n+1} = (-m)y_n - \alpha(-1)^{n-1}\varphi((-1)^{n-1}y_{n-1})$ alakra hozza. Mivel a fentebb hivatkozott [54, 55] dolgozatok eredményei nemautonóm differenciaegyenletekre vonatkoznak, és mivel a $(-1)^{n-1}\varphi((-1)^{n-1}x)$ leképezés eleget tesz a (3.2) feltételnek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, így az állítás következik a fixpont $(\alpha, |m|)$ paraméterpár melletti globális aszimptotikus stabilitásából. \square

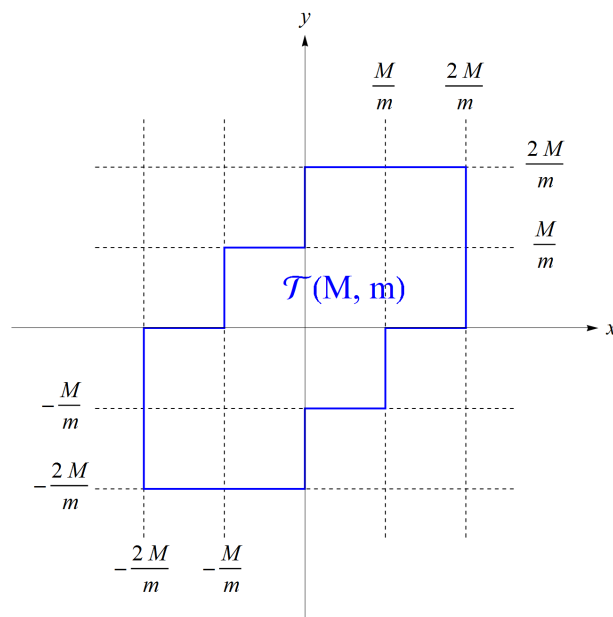
A továbbiakban feltesszük, hogy $m \in [0, 1]$, és hogy φ eleget tesz a (H1) és a (H2) feltételeknek. Legyen $M \geq 0$ és tekintsük az alábbiakban definiált $\mathcal{T}(M, m)$ és $\mathcal{S}(M, m)$ halmazokat:

$$\mathcal{T}(M, m) = \begin{cases} \mathbb{R}^2, & \text{ha } m = 0, \\ H_1\left(\frac{2M}{m}, \frac{2M}{m}\right) \cup H_2\left(\frac{M}{m}, \frac{M}{m}\right) \cup H_3\left(\frac{2M}{m}, \frac{2M}{m}\right) \cup H_4\left(\frac{M}{m}, \frac{M}{m}\right) \cup \underline{0}, & \text{ha } m \in (0, 1], \end{cases}$$

valamint

$$\mathcal{S}(M, m) = \begin{cases} \left[-\frac{2M}{1-m}, \frac{2M}{1-m}\right]^2, & \text{ha } m \in [0, 1), \\ \mathbb{R}^2, & \text{ha } m = 1. \end{cases}$$

A $\mathcal{T}(M, m)$ halmazt lásd a 3.4. ábrán az $m > 0$ esetben.



3.4. ábra. A $\mathcal{T}(M, m)$ halmaz $m > 0$ esetén.

Az alábbi állításnak és az azutáni következménynek kulcsfontosságú szerepe van a fő tételünk bizonyításában.

3.7. Állítás. Tegyük fel, hogy $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$, továbbá hogy φ eleget tesz a (H1) és a (H2) feltételeknek, valamint legyen $M = M_\varphi$. Ekkor a következő állítások teljesülnek.

- (i) Ha $(x_0, y_0) \in \mathcal{T}(M, m)$, akkor $(x_1, y_1) \in \mathcal{T}(M, m)$ is fennáll, továbbá tetszőleges $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén létezik $k \in \mathbb{N}_0$, melyre $(x_k, y_k) \in \mathcal{T}(M, m)$ teljesül.
- (ii) Ha $(x_0, y_0) \in \mathcal{S}(M, m)$, akkor $(x_1, y_1) \in \mathcal{S}(M, m)$ is fennáll, továbbá tetszőleges $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén létezik $k \in \mathbb{N}_0$, melyre $(x_k, y_k) \in \mathcal{S}(M, m)$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen m és M rögzített, és a rövidség kedvéért használjuk a $\mathcal{T} = \mathcal{T}(M, m)$ és $\mathcal{S} = \mathcal{S}(M, m)$ jelöléseket.

(i) Az $m = 0$ eset triviális, így feltehetjük, hogy $m \in (0, 1]$. Először az állítás második részét bizonyítjuk. Legyen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ egy tetszőleges pont. Ekkor a 3.3. Állítás szerint vagy létezik $k_0 \in \mathbb{N}_0$, hogy $(x_{k_0}, y_{k_0}) \in H_1$ teljesül vagy $(x_k, y_k) \rightarrow (0, 0)$, amint $k \rightarrow \infty$, ahonnan $(x_k, y_k) \in \mathcal{T}$ következik, ha k elég nagy. Tehát feltehetjük, hogy $(x_0, y_0) \in H_1$. Két esetet különböztetünk meg.

a) Ha $0 < y_0 \leq \frac{M}{m}$, akkor $(x_1, y_1) \in H_1(\frac{M}{m}, \frac{M}{m}) \cup H_2(\frac{M}{m}, \frac{M}{m}) \subset \mathcal{T}$ azonnal adódik.

b) Ha $y_0 > \frac{M}{m}$, akkor $0 < x_1 = y_0$ és $0 < y_1 = my_0 - \alpha\varphi(x_0) \leq my_0 \leq y_0$ összefüggéseket kapjuk. Ekkor, ha $y_1 \leq \frac{M}{m}$, akkor a problémát visszavezettük az a) esetre. Ellenkező esetben $y_1 > \frac{M}{m}$ és $(x_1, y_1) \in H_1$ adódik. Ezt a gondolatmenetet ismételve kapjuk, hogy vagy létezik $k_0 \in \mathbb{N}$, melyre $0 < y_{k_0} \leq \frac{M}{m}$ és $x_{k_0} > \frac{M}{m}$ teljesül (és ekkor az állítás következik az a) esetben látottakból) vagy $(x_k, y_k) \in H_1 \setminus H_1(\frac{M}{m}, \frac{M}{m})$ teljesül minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Az utóbbi eset azonban nem állhat fenn, hiszen ez ellentmond a 3.3. Állításnak. Ezzel az (i) állítás második részét beláttuk.

Az (i) állítás első részének bizonyításához vegyük észre, hogy a fenti gondolatmenet alapján $(x_0, y_0) \in H_1(\frac{2M}{m}, \frac{2M}{m})$ választása esetén $(x_1, y_1) \in \mathcal{T}$ következik. Ugyanakkor $(x_0, y_0) \in H_2(\frac{M}{m}, \frac{M}{m})$ esetén a 3.3. Állítás (ii) része szerint $(x_1, y_1) \in \mathcal{T}$ következik. Hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy $(x_0, y_0) \in H_3(\frac{2M}{m}, \frac{2M}{m}) \cup H_4(\frac{M}{m}, \frac{M}{m})$ esetén $(x_1, y_1) \in \mathcal{T}$ következik. Ezzel az (i) állítást maradéktalanul igazoltuk.

(ii) Az állítás triviális az $m = 1$ esetben, így feltehetjük, hogy $m \in [0, 1)$. Tegyük fel hogy $(x_0, y_0) \in \mathcal{S}$. Ekkor az $|x_1| = |y_0| \leq \frac{2M}{1-m}$, valamint az $|y_1| \leq m|y_0| + \alpha M \leq m\frac{2M}{1-m} + M < \frac{2M}{1-m}$ összefüggésekből következik, hogy $(x_1, y_1) \in \mathcal{S}$, ami igazolja az állítás első felét.

Az állítás második részének igazolása érdekében tegyük fel, hogy $(x_0, y_0) \notin \mathcal{S}$. Ismét két esetet különböztetünk meg.

a) Ha $|y_0| \geq \frac{2M}{1-m}$, akkor $|x_1| = |y_0| \geq \frac{2M}{1-m}$, valamint $|y_1| \leq m|y_0| + M \leq \frac{m+1}{2}|y_0| < |y_0|$ összefüggések adódnak. Ezt a gondolatmenetet ismételve kapjuk, hogy $|y_k|$ egy csökkenő mértani sorozat, így létezik $k_0 \in \mathbb{N}$, amelyre $|x_{k_0}| \geq \frac{2M}{1-m}$ és $|y_{k_0}| < \frac{2M}{1-m}$ fennáll. Ekkor $|x_{k_0+1}| = |y_{k_0}| < \frac{2M}{1-m}$ és $|y_{k_0+1}| \leq m|y_{k_0}| + M < m\frac{2M}{1-m} + M < \frac{2M}{1-m}$ következik, ahonnan $(x_{k_0+1}, y_{k_0+1}) \in \mathcal{S}$ adódik.

b) Ha $|y_0| < \frac{2M}{1-m}$, akkor $(x_0, y_0) \notin \mathcal{S}$ miatt $|x_0| > \frac{2M}{1-m}$ szükségszerűen teljesül, ahonnan az a) esetben látottak szerint következik az állítás. Ezzel a tételt maradéktalanul igazoltuk. \square

3.8. Következmény. Tegyük fel, hogy $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$, valamint, hogy φ eleget tesz a (H1) és (H2) feltételeknek. Legyen $M = M_\varphi$, valamint a $\mathcal{T}(M, m)$ és $\mathcal{S}(M, m)$ halmazok legyenek a fentiek szerint definiálva. Ekkor ezek $S = \mathcal{T}(M, m) \cap \mathcal{S}(M, m)$ metszete kompakt, és pozitív invariáns a (3.3) leképezésre nézve, valamint tetszőleges $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén létezik $k \in \mathbb{N}_0$,

hogy $(x_k, y_k) \in S$ teljesül. Ezenfelül fennáll az alábbi összefüggés:

$$S = \mathcal{T}(M, m) \cap \mathcal{S}(M, m) \subseteq \left[-\frac{2M}{\max\{m, 1-m\}}, \frac{2M}{\max\{m, 1-m\}} \right]^2 \subseteq [-4M, 4M]^2.$$

3.1.2. Fő eredmény: a globális stabilitás szükséges és elegendő feltétele

Ebben a szakaszban a (3.4) egyenlet vizsgálatára szorítkozunk. Az előző szakasz jelöléseivel összhangban használjuk az

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = F_{\alpha, m}(x, y) = (y, my - \alpha \tanh(x)) \quad (3.5)$$

jelölést.

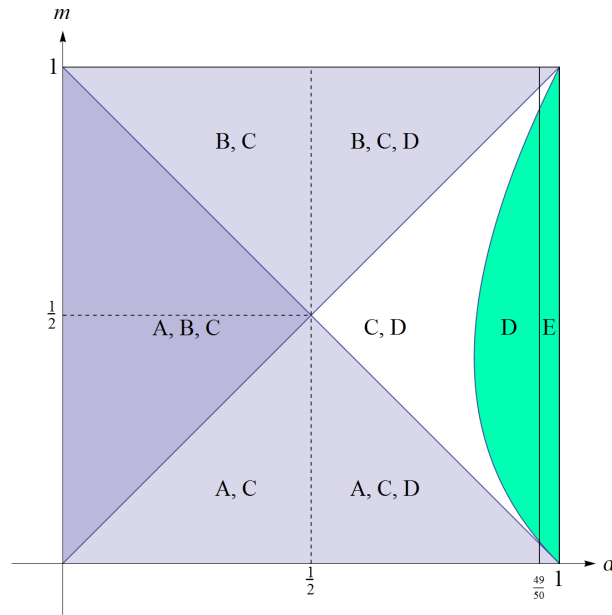
3.9. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a $\varphi \equiv \tanh$ függvény eleget tesz a (H1) és (H2) feltételeknek, továbbá $M_{\tanh} = 1$ és $\tanh'(0) = 1$. Ezeket egybevetve a 3.1.1. szakasz eredményeivel adódik, hogy a triviális egyensúlyi helyzet globális aszimptotikus stabilitásának szükséges feltétele:

$$(\alpha, m) \in \mathcal{R}(m) = [|m| - 1, 1] \times [-1, 1] \setminus \{(0, -1), (0, 1)\}.$$

Vegyük észre, hogy a $(0, 0)$ egyensúlyi helyzet lokálisan aszimptotikusan stabil, ha $(\alpha, m) \in (|m| - 1, 1) \times (-2, 2)$, de nem lehet globálisan aszimptotikusan stabil, ha $|m| > 1$. Ez jól mutatja az $m \in (0, 1)$ feltétel fontosságát a Clark-típusú egyenletekben és az azokra vonatkozó sejtésekben. Mindamellet ez a megszorítás természetes módon is adódik, ha figyelembe vesszük az m paraméter biológiai jelentését: a Clark-típusú egyenleteknél halálozási rátát, neuronhálózati modellek esetén a nyugalmi potenciálhoz való visszatérés sebességét fejezi ki.

3.10. Megjegyzés. A 3.6. Tétel szerint $(\alpha, m) \in \mathcal{R}(m) \setminus \left(\frac{m^2+1}{|m|+1}, 1 \right] \times [-1, 1]$ esetén a triviális egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabil. A \tanh függvény páratlansága miatt az $y_n := (-1)^n x_n$ transzformációt használva adódik, hogy a triviális egyensúlyi helyzet pontosan akkor globálisan aszimptotikusan stabil $(\alpha, m) \in \mathcal{R}(m)$ esetén, ha az $(\alpha, -m)$ esetén is. Tehát a továbbiakban elegendő az $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ paramétertartományra koncentrálnunk.

A 3.5. ábrán a (3.5) leképezés $\underline{0}$ fixpontjának globális aszimptotikus stabilitására vonatkozó legfontosabb eredményeket foglaljuk össze. Az A -val jelölt háromszögben elemi úton igazolható a globális stabilitás (lásd a 3.2. Lemmát), de következik például [22] eredményeiből is. A B -vel jelölt háromszögben Kocić és Ladas [31] monográfiájának 2.1.1. tétele, míg a C -vel jelölt tartományokban Nemya és szerzőtársainak [54, 55] eredményei garantálják a globális stabilitást. A szakasz fő eredménye, hogy a D és E jelű tartományokon is igazoljuk a $\underline{0}$ fixpont globális aszimptotikus stabilitását (lásd a 3.11.



3.5. ábra. Az $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ paramétertartomány.

Tételt). Mint azt már korábban említettük, ebben megbízható számítógépes módszerek is a segítségünkre lesznek.

Vegyük észre, hogy az $\alpha = 1$ értéknél Neimark–Sacker-bifurkáció megy végbe, míg az $(\alpha, m) = (1, 0)$ paraméterpár esetén erős 1:4 rezonancia lép fel. Ennek a résznek a fő eredménye a következő tétel, amelyben megmutatjuk, hogy az $(\alpha, m) \in \mathcal{R}(m)$ feltétel nemcsak szükséges, de elegendő feltétele is az origó globális aszimptotikus stabilitásának.

3.11. Tétel. A (3.5) leképezés $(0, 0)$ fixpontja pontosan akkor globálisan aszimptotikusan stabil, ha $(\alpha, m) \in \mathcal{R}(m)$.

Ahogy azt már kifejtettük, elegendő az $(\alpha, m) \in \left[\frac{m^2+1}{m+1}, 1\right] \times [0, 1]$ tartományra szorítkoznunk. Mivel ez semmilyen nehézséget nem okoz a további analízisben, mi az egyszerűbb $(\alpha, m) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0, 1]$ feltételezéssel fogunk élni. A bizonyítás két fő részből áll. Az I. részben minden (α, m) párra megadjuk az origó egy kompakt – m -től független – $U(\alpha)$ környezetét, amely az origó vonzástartományába tartozik, és amelyre bármely

$$[\alpha] \times [m] \subseteq \left[\frac{m^2+1}{m+1}, 1\right] \times [0, 1]$$

paraméterintervallum esetén az $U([\alpha]) := \bigcap_{\alpha \in [\alpha]} U(\alpha)$ halmaz magába foglal egy origó középpontú zárt körlapot. Ennek megkonstruálásához a linearizált egyenletet valamint az 1:4 rezonáns Neimark–Sacker-bifurkáció normálformáját fogjuk analizálni. A bizonyítás II. részében egy megbízható, számítógéppel segített bizonyítást adunk arra, hogy $(\alpha, m) \in [\alpha] \times [m]$ esetén a 3.1.1. szakaszban megkonstruált

$$S = \mathcal{T}(M_{\tanh}, m) \cap \mathcal{S}(M_{\tanh}, m)$$

pozitív invariáns, kompakt halmazból induló bármely trajektória belép a fent definiált $U([\alpha]) \subseteq U(\alpha)$ környezetbe.

I. rész: Az $U(\alpha)$ környezet meghatározása

Tekintsük az F leképezés $(0, 0)$ fixpont körüli linearizáltját:

$$(x, y) \mapsto F(x, y) = A(\alpha, m)(x, y)^T + f_{\alpha, m}(x, y), \quad (3.6)$$

ahol

$$A(\alpha, m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & m \end{pmatrix},$$

és a maradéktag

$$f_{\alpha}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha x - \alpha \tanh(x) \end{pmatrix}.$$

Emlékezzünk vissza, hogy $A(\alpha, m)$ sajátértékei a $\mu_{1,2}(\alpha, m) = \frac{m \pm i\sqrt{4\alpha - m^2}}{2}$ komplex számok. Legyen $\mu = \mu_1(\alpha, m)$ és legyen $q = q(\alpha, m) = \left(\frac{m - i\sqrt{-m^2 + 4\alpha}}{2\alpha}, 1 \right)^T \in \mathbb{C}^2$ hozzá tartozó sajátvektor. Jelölje $p = p(\alpha, m) \in \mathbb{C}^2$ az $A(\alpha, m)^T$ mátrix $\bar{\mu}$ sajátértékéhez tartozó sajátvektorát, melyre $\langle p, q \rangle = 1$. Ekkor

$$p = \left(-\frac{i\alpha}{\sqrt{4\alpha - m^2}}, \frac{1}{2} + \frac{im}{2\sqrt{4\alpha - m^2}} \right). \quad (3.7)$$

Vezessük be a következő komplex változót:

$$z = z(x, y, \alpha, m) = \langle p, (x, y) \rangle = \frac{\alpha(mx - 2y - ix\sqrt{4\alpha - m^2})}{m^2 - 4\alpha - im\sqrt{4\alpha - m^2}}. \quad (3.8)$$

A transzformáció inverze az alábbi alakban adható:

$$(x, y) = zq + \bar{z}\bar{q} = \left(\frac{1}{\alpha} \left(-iz\sqrt{4\alpha - m^2} + \left(m + i\sqrt{4\alpha - m^2} \right) \operatorname{Re} z \right), 2 \operatorname{Re} z \right). \quad (3.9)$$

A (3.5) leképezést ezzel az alábbi komplex leképezéssé transzformáltuk:

$$\begin{aligned} z \mapsto G(z) = G(z, \bar{z}, \alpha, m) &= \langle p, A(\alpha, m)(zq + \bar{z}\bar{q}) + f_{\alpha, m}(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\ &= \mu z + g(z, \bar{z}, \alpha, m), \end{aligned} \quad (3.10)$$

ahol g a z, \bar{z}, α és m komplex értékű sima függvénye, és

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}, \alpha, m) &= 2\alpha \left(m \operatorname{Re} z + \sqrt{4\alpha - m^2} \operatorname{Im} z - \alpha \tanh \left(\frac{m \operatorname{Re} z + \sqrt{4\alpha - m^2} \operatorname{Im} z}{\alpha} \right) \right) \\ &\cdot \left(4\alpha - m^2 + im\sqrt{4\alpha - m^2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Világos, hogy rögzített α és m esetén, g a z és \bar{z} változók analitikus függvénye. A g függvényt a 0 körül z és \bar{z} szerint sorba fejtvé azt kapjuk, hogy csak a harmad- és magasabb rendű tagjai nem zérók (köszönhetően annak, hogy $\tanh''(0) = 0$), vagyis

$$g(z, \bar{z}, \alpha, m) = \sum_{k+l=3} \frac{g_{kl}}{k!l!} z^k \bar{z}^l + R_1(z), \quad k, l \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (3.12)$$

ahol $g_{kl} = g_{kl}(\alpha, m) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} g(z, \bar{z}, \alpha, m) \Big|_{z=0}$ és $k+l = 3$; $k, l \in \{0, 1, 2, 3\}$, valamint $R_1(z) = R_1(z, \bar{z}, \alpha, m) = O(|z|^4)$ bármely rögzített (α, m) esetén.

3.12. Tétel. Legyen $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ és $m \in [0, 1]$. Ekkor, ha

$$\varepsilon(\alpha) = \sqrt[4]{\frac{27}{800}} \sqrt{1 - \sqrt{\alpha}},$$

akkor $(x_0, y_0) \in U(\alpha) = K_{\varepsilon(\alpha)}$ esetén $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = (0, 0)$ teljesül.

Bizonyítás. Vizsgáljuk a (3.10) transzformált egyenletet. Legyen $(x, y) \in K_{\varepsilon(\alpha)} \setminus \{(0, 0)\}$ tetszőleges és $z = z(x, y, \alpha, m)$ a (3.8) által definiált. Meg fogjuk mutatni, hogy

$$|G(z, \bar{z}, \alpha, m)| < |z|, \quad \text{ha } z \neq 0.$$

Kihasználva a (3.8) és a (3.9) összefüggéseket könnyen megmutatható, hogy bármely $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ és $m \in [0, 1]$ esetén a

$$\max\{|x|, |y|\} \leq \frac{2|z|}{\sqrt{\alpha}} \leq 2\sqrt{2}|z|, \quad (3.13)$$

$$|z| \leq \sqrt{\frac{\alpha(1+\alpha+m)}{4\alpha-m^2}} \max\{|x|, |y|\} \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \max\{|x|, |y|\} \quad (3.14)$$

egyenlőtlenségek fennállnak, ahol $z = z(x, y, \alpha, m)$. A \tanh függvény sorfejtéséből, az $\varepsilon(\alpha) < 1$ egyenlőtlenségből, valamint a $\max_{|x| \leq 1} \left\{ \left| \frac{d^3}{dx^3} \tanh(x) \right| \right\} = 2$ összefüggésből nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} |g(z, \bar{z}, \alpha, m)| &= \left| \left\langle p(\alpha, m), f_{\alpha, m} \left(zq(\alpha, m) + \overline{zq(\alpha, m)} \right) \right\rangle \right| \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{4\alpha-m^2}} \alpha^2 |x - \tanh(x)| \\ &\leq \sqrt{\frac{\alpha}{4\alpha-m^2}} \frac{\alpha^2}{6} \max_{|x| \leq \varepsilon(\alpha)} \left\{ \left| \frac{d^3}{dx^3} \tanh(x) \right| \right\} |x|^3 \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{4\alpha-m^2}} \frac{\alpha^2}{3} |x|^3. \end{aligned}$$

A (3.13) egyenlőtlenségből és a $|\mu| = \sqrt{\alpha}$ azonosságból következik, hogy

$$\begin{aligned} |G(z, \bar{z}, \alpha, m)| &\leq \sqrt{\alpha}|z| + \sqrt{\frac{\alpha}{4\alpha-m^2}} \frac{\alpha^2}{3} (2\sqrt{2})^3 |z|^3 \\ &= |z| \cdot \left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\frac{\alpha}{4\alpha-m^2}} \frac{\alpha^2}{3} 16\sqrt{2} |z|^2 \right). \end{aligned}$$

Mivel $\sqrt{\frac{\alpha}{4\alpha-m^2}} \frac{\alpha^2}{3} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$ teljesül bármely $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ és $m \in [0, 1]$ esetén, így ha $0 \neq |z| < \varepsilon_0(\alpha) = \sqrt[4]{\frac{27}{512}} \sqrt{1 - \sqrt{\alpha}}$ fennáll, akkor $|G(z)| < |z|$ teljesül. A (3.14) egyenlőtlenségből következik, hogy $(x, y) \in K_{\varepsilon(\alpha)}$ esetén $|z| = |z(x, y, \alpha, m)| < \varepsilon_0(\alpha)$ fennáll, így ekkor $|G(z)| < |z|$ következik, ha $z \neq 0$. Ebből G folytonosságát is kihasználva következik, hogy $G^k(z) \rightarrow 0$, amint $k \rightarrow \infty$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy az eredeti F leképezés $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ fixpontja aszimptotikusan stabil az $U(\alpha) = K_{\varepsilon(\alpha)}$ környezetben. \square

3.13. Tétel. Legyen $\alpha \in [0,98, 1]$ és $m \in [0, 1]$. Ekkor, ha

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{1}{6},$$

akkor $(x_0, y_0) \in U(\alpha) = K_{\varepsilon(\alpha)}$ esetén $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = (0, 0)$ teljesül.

Ahogy azt korábban már említettük az $\alpha = 1$ kritikus értéknél Neimark–Sacker-bifurkáció megy végbe ($|\mu_{1,2}| = 1$) és az $(\alpha, m) = (1, 0)$ értéknél erős 1:4 rezonancia lép fel ($\mu_{1,2} = \pm i$). A tétel bizonyítása során a leképezésünket az 1:4 rezonáns normálformájába fogjuk transzformálni (Kuznetsov [38] könyve alapján), mivel a nemrezonáns normálforma az $(\alpha, m) = (1, 0)$ paraméterpárhoz közeli értékek esetén nem alkalmazható a tétel állításának bizonyítására. Ennek az az oka, hogy szükségünk lesz – többek között – a transzformációra vonatkozó, a paraméterekben egyenletes becslésekre, ami a kritikus $(1, 0)$ paraméterpárhoz közeledve lehetetlenné válik. Ugyanakkor a rezonáns normálforma alkalmazható a teljes $(\alpha, m) \in [0,98, 1] \times [0, 1]$ paramétertartományban. A következő bizonyítás egyes lépéseinél igénybe vesszük a *Wolfram Mathematica* számítógép-algebrai rendszer szimbolikus számításai adta lehetőségeket, és felhasználunk beépített intervalumaritmetikai függvényeket (a részleteket lásd [73, Basin_of_attraction]).

A 3.13. Tétel bizonyítása. A bizonyításban számos becslést fogunk adni. Ezek a becslések (ha külön nem is hangsúlyozzuk) mindig egyenletesek abban az értelemben, hogy fennállnak bármely $\alpha \in [0,98, 1]$ és $m \in [0, 1]$ értékek esetén.

1. lépés: Transzformálás az 1:4 rezonáns normálformára

Mindenek előtt transzformáljuk a leképezésünket a (3.10) alakra. Ezek után egy olyan komplex, invertálható, sima $h = h_{\alpha, m}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt keresünk, amely definiált és invertálható a $0 \in \mathbb{C}$ egy környezetében és amely a (3.10) leképezésünket a $w \mapsto G_{1:4}(w) = G_{1:4}(w, \bar{w}, \alpha, m)$ alakra hozza, ahol

$$G_{1:4}(w) = h^{-1} \left(G \left(h(w), \overline{h(w)}, \alpha, m \right) \right) = \mu w + c(\alpha, m) w^2 \bar{w} + d(\alpha, m) \bar{w}^3 + R_2(w), \quad (3.15)$$

és $R_2(w) = R_2(w, \bar{w}, \alpha, m) = O(|w|^4)$ bármely rögzített (α, m) esetén. Ha a h függvényt egy speciális alakban, nevezetesen w és \bar{w} (legfeljebb) harmadfokú polinomjaként keressük, az alábbiakat kapjuk:

$$h(w) = h(w, \bar{w}, \alpha, m) = w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2, \quad (3.16)$$

valamint

$$h^{-1}(z) = h^{-1}(z, \bar{z}, \alpha, m) = z - \frac{h_{30}}{6} z^3 - \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 + R_3(z), \quad (3.17)$$

ahol

$$h_{30} = h_{30}(\alpha, m) = \frac{g_{30}}{\mu(\mu^2 - 1)}, \quad h_{12} = h_{12}(\alpha, m) = \frac{g_{12}}{2\mu(\mu^2 - 1)},$$

és $R_3(z) = R_3(z, \bar{z}, \alpha, m) = O(|z|^4)$ bármely rögzített (α, m) esetén. A h és h^{-1} függvények értelmezési tartományát a későbbiekben fogjuk megadni.

A célunk egy olyan $\varepsilon_0 > 0$ megadása, hogy bármely $(x, y) \in [-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]^2$ esetén $|w| < \varepsilon_0$ fennálljon, és hogy $0 \neq |w| < \varepsilon_0$ esetén a következő egyenlőtlenség teljesüljön:

$$|G_{1:4}(w)| = |\mu w + c(\alpha, m)w^2\bar{w} + d(\alpha, m)\bar{w}^3 + R_2(w, \bar{w}, \alpha, m)| < |w|. \quad (3.18)$$

Ehhez egyenletes becsléseket kell adnunk a magasabb rendű R_1 , R_2 és R_3 maradéktagokra, a h és az $(x, y) \mapsto z$ transzformációkra és inverzeikre, valamint a g , c és d függvényekre egyaránt.

2. lépés: Becslések

A g és R_1 függvények becslése

A (3.8) és a (3.9) összefüggésekből könnyen belátható, hogy a

$$\max\{|x|, |y|\} \leq \frac{2|z|}{\sqrt{\alpha}} \leq 2,03|z| \quad \text{és a} \quad (3.19)$$

$$|z| \leq \sqrt{\frac{\alpha(1+\alpha+m)}{4\alpha-m^2}} \max\{|x|, |y|\} \leq 1,01 \cdot \max\{|x|, |y|\} \quad (3.20)$$

egyenlőtlenségek fennállnak bármely $\alpha \in [0,98, 1]$ és $m \in [0, 1]$ esetén. A (3.6), (3.7) és (3.9) összefüggésekből, valamint a \tanh függvény Taylor-sorfejtéséből következik, hogy az

$$|R_1(z)| \leq \left| \frac{1}{2} + \frac{im}{2\sqrt{4\alpha-m^2}} \right| \cdot \frac{\alpha}{120} \cdot \max_{|x| \leq \frac{1}{6}} \left\{ \left| \frac{d^5}{dx^5} \tanh(x) \right| \right\} \cdot |x|^5 = \sqrt{\frac{\alpha}{4\alpha-m^2}} \frac{2\alpha^2}{15} \cdot |x|^5$$

egyenlőtlenségek fennállnak, ha $z = z(x, y, \alpha, m)$. Ezek után, felhasználva a (3.19) és az $|x| \leq \frac{1}{6}$ összefüggéseket, a következő megbízható numerikus becsléshez juthatunk:

$$|R_1(z)| \leq 0,22|z|^4. \quad (3.21)$$

A g függvény harmadrendű tagjaira a következő explicit formulák adódnak:

$$g_{30} = \frac{2i\alpha - m \left(im + \sqrt{4\alpha - m^2} \right)}{\alpha \sqrt{4\alpha - m^2}}, \quad g_{21} = -\frac{2i}{\sqrt{4\alpha - m^2}}, \quad (3.22)$$

$$g_{12} = \frac{2 \left(m + i\sqrt{4\alpha - m^2} \right)}{4\alpha - m^2 + im\sqrt{4\alpha - m^2}}, \quad g_{03} = \frac{\left(m + i\sqrt{4\alpha - m^2} \right)^3}{2\alpha \left(4\alpha - m^2 + im\sqrt{4\alpha - m^2} \right)}. \quad (3.23)$$

Innen szimbolikus számítások és megbízható becslések segítségével kapjuk, hogy

$$\sum_{k+l=3} \frac{|g_{kl}|}{k!l!} = \frac{8}{3\sqrt{4\alpha - m^2}} < 1,57, \quad \text{ahol } k, l \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (3.24)$$

A (3.21) és (3.24) egyenlőtlenségekből, valamint a (3.10) és (3.12) összefüggésekből speciálisan következik, hogy

$$|G(z)| \leq |z| + 1,57|z|^3 + 0,22|z|^4. \quad (3.25)$$

A h transzformáció értelmezése és becslése

Meg fogjuk mutatni, hogy a (3.16) által definiált h függvény injektív a $\overline{B_{1/2}} \subset \mathbb{C}$ halmazon, illetve hogy a h^{-1} inverze definiált a $\overline{B_{1/3}}$ halmazon, és ott a (3.17) alakba írható.

Könnyen belátható, hogy a következő egyenlőségek és az alábbi felső becslés teljesülnek:

$$|h_{30}| = |h_{12}| = \frac{2}{\sqrt{\alpha(4\alpha - m^2)((1 + \alpha)^2 - m^2)}} < 0,7. \quad (3.26)$$

Legyen α és m rögzített és

$$H_z = H_{\alpha, m, z} : \mathbb{C} \ni w \mapsto w + z - h(w) \in \mathbb{C}.$$

Ezzel a jelöléssel élve $H_z(w) = w$ pontosan akkor teljesül, ha $h(w) = z$ fennáll. Egyszerű észrevétel, hogy

$$\begin{aligned} |H_z(w_1) - H_z(w_2)| &= |w_1 - h(w_1) - w_2 + h(w_2)| \\ &\leq \frac{|h_{30}|}{6} |w_1^3 - w_2^3| + \frac{|h_{12}|}{2} |\overline{w_1}|w_1|^2 - \overline{w_2}|w_2|^2|. \end{aligned}$$

Ugyanakkor a

$$\begin{aligned} |\overline{w_1}|w_1|^2 - \overline{w_2}|w_2|^2| &\leq |\overline{w_1}|w_1|^2 - \overline{w_1}|w_2|^2| + |\overline{w_1}|w_2|^2 - \overline{w_2}|w_2|^2| \\ &= |w_1| (|w_1|^2 - |w_2|^2) + |w_2|^2 |\overline{w_1} - \overline{w_2}| \\ &\leq |w_1| (|w_1| - |w_2|) (|w_1| + |w_2|) + |w_2|^2 |w_1 - w_2| \\ &\leq |w_1 - w_2| (|w_1|^2 + |w_1||w_2| + |w_2|^2). \end{aligned}$$

egyenlőtlenségek teljesülnek. Ha most $w_1, w_2 \in B_{1/2}$ tetszőlegesen és $z \in B_{1/3}$ rögzített, akkor a következő egyenlőtlenségekhez jutunk:

$$\begin{aligned} |H_z(w_1) - H_z(w_2)| &\leq |w_1 - w_2| \cdot \left(\frac{|h_{30}|}{6} + \frac{|h_{12}|}{2} \right) (|w_1|^2 + |w_1||w_2| + |w_2|^2) \\ &\leq 0,47|w_1 - w_2| \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \leq |w_1 - w_2|, \end{aligned}$$

valamint

$$|H_z(w)| \leq |z| + |w - h(w)| \leq |z| + \left(\frac{|h_{30}|}{6} + \frac{|h_{12}|}{2} \right) |w|^3 \leq \frac{1}{3} + 0,47 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} < \frac{1}{2}.$$

Tehát $H_{\alpha, m, z} : \overline{B_{1/2}} \rightarrow \overline{B_{1/2}}$ kontrakció, így bármely rögzített $z \in \overline{B_{1/3}}$ esetén létezik egyetlen $w = w(z) \in \overline{B_{1/2}}$, amelyre $H_z(w(z)) = w(z)$, azaz $h(w(z)) = z$. Ezek szerint a h^{-1} inverz definiálható a $\overline{B_{1/3}}$ környezetben.

A (3.16) formula és a (3.26) egyenlőtlenség alapján kapjuk az alábbi becslést:

$$|w| - 0,47|w|^3 \leq |h(w)| \leq |w| + 0,47|w|^3. \quad (3.27)$$

A h^{-1} inverz függvény becslése

A $w \in B_{1/5}$, $z = h(w)$ feltevésekkel élve és kihasználva a (3.27) egyenlőtlenségeket könnyedén adódik a következő becslés:

$$|w| \leq 1,02|h^{-1}(z)|. \quad (3.28)$$

Ahhoz, hogy egy hasonló felső becslést tudjunk adni a $h^{-1}(z)$ inverzre is, meg kell becsülnünk az R_3 maradéktagot. Tegyük fel, hogy $z \in B_{1/3}$. Mivel h^{-1} definiálva van a $B_{1/3}$ környezetben, így létezik egyetlen $w \in B_{1/2}$ komplex szám, amelyre $z = h(w)$. Ekkor

$$R_3(z) = R_3(h(w)) = h^{-1}(h(w)) - h(w) + \frac{h_{30}}{6}(h(w))^3 + \frac{h_{12}}{2}h(w) \left(\overline{h(w)}\right)^2,$$

a w és \bar{w} változók egy kizárólag 4–9. rendű tagokat tartalmazó polinomja. Feltéve most, hogy $w \in B_{1/5}$ és kihasználva a (3.26) és (3.28) egyenlőtlenségeket nyerjük, hogy

$$R_3(z) \leq 0,14|w|^4 < 0,16|z|^4$$

teljesül, ha $z = h(w)$. Ebből, valamint a (3.17) és (3.26) egyenlőtlenségekből következik, hogy $w \in B_{1/5}$ és $z = h(w)$ esetén

$$\left| h^{-1}(z) \right| \leq |z| + 0,47|z|^3 + 0,16|z|^4 \quad (3.29)$$

egyenlőtlenség fennáll.

Az R_2 maradéktag becslése

Most már készen állunk az R_2 hibtag becslésére. Definiáljuk a következő három polinomot:

$$\begin{aligned} h^{-1;\max}(s) &= s + 0,47s^3 + 0,16s^4, \\ G^{\max}(s) &= s + 1,57s^3 + 0,22s^4, \\ h^{\max}(s) &= s + 0,47s^3. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Legyen továbbá $Q(s) = \sum_{k=1}^{48} q_k s^k = h^{-1;\max} \circ G^{\max} \circ h^{\max}(s)$. Az eddigi becslésekből világosan látszik, hogy $0 \neq w \in B_{1/5}$ esetén $|R_2(w)| < \sum_{k=4}^{48} q_k |w|^4 \left(\frac{1}{5}\right)^{k-4}$ fennáll, amiből

$$|R_2(w)| < 1,59|w|^4 \quad (3.31)$$

következik.

3. lépés: Alsó becslés a (3.15) leképezés 0 fixpontjának vonzástartományára

A (3.15), (3.16), (3.17), valamint (3.22) és (3.23). összefüggésekből adódnak a következő formulák:

$$c = c(\alpha, m) = -\frac{i}{\sqrt{4\alpha - m^2}}, \quad d = d(\alpha, m) = \frac{(m + i\sqrt{4\alpha - m^2})^3}{12\alpha(4\alpha - m^2 + im\sqrt{4\alpha - m^2})}. \quad (3.32)$$

Legyen

$$\beta = \beta(\alpha, m) = \frac{|\mu(\alpha, m)|}{\mu(\alpha, m)} c(\alpha, m) = \frac{-im - \sqrt{4\alpha - m^2}}{2\sqrt{\alpha}\sqrt{4\alpha - m^2}},$$

és jelölje $\gamma = \gamma(\alpha)$ a β valós részét. Ekkor $\gamma = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$. Ezekkel a jelölésekkel élve, valamint felhasználva a (3.31) becslést nyerjük, hogy bármely $0 \neq w \in B_{1/5}$ esetén

$$\begin{aligned} |G_{1.4}(w)| &= |\mu w + c(\alpha, m)w^2\bar{w} + d(\alpha, m)\bar{w}^3 + R_2(w)| \\ &\leq |w| (|\mu + c|w|^2| + |d||w|^2) + |R_2(w)| \\ &= |w| (|\mu| + \beta|w|^2 + |d||w|^2) + |R_2(w, \bar{w}, \alpha)| \\ &< |w| (|\sqrt{\alpha} + \beta|w|^2 + |d||w|^2 + 1,59|w|^3) \\ &\leq |w| (|\sqrt{\alpha} + \gamma|w|^2) \\ &\quad + |w| (||\sqrt{\alpha} + \beta|w|^2| - (\sqrt{\alpha} + \gamma|w|^2)| + |d||w|^2 + 1,59|w|^3). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Vegyük észre továbbá, hogy $-1 < -\frac{5}{7\sqrt{2}} \leq \gamma \leq -\frac{1}{2}$. Így $0 \neq w \in B_{1/5}$ esetén a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} ||\sqrt{\alpha} + \beta|w|^2| - (\sqrt{\alpha} + \gamma|w|^2)| &= \left| \sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha}\gamma|w|^2 + |\beta|^2|w|^4} - (\sqrt{\alpha} + \gamma|w|^2) \right| \\ &= \left| \frac{(|\beta|^2 - \gamma^2)|w|^4}{\sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha}\gamma|w|^2 + |\beta|^2|w|^4} + \sqrt{\alpha} + \gamma|w|^2} \right| \\ &\leq \frac{(|\beta|^2 - \gamma^2)|w|^4}{\sqrt{25\alpha}|w|^2 + 2\sqrt{\alpha}\gamma|w|^2 + 5\sqrt{\alpha}|w| + \gamma|w|} \\ &\leq \frac{(|\beta|^2 - \gamma^2)}{\sqrt{25\alpha - 2 + 5\alpha - 1}} |w|^3. \end{aligned}$$

Felhasználva most a β , γ és d függvényekre kapott formulákat kapjuk, hogy az

$$\left| |\sqrt{\alpha} + \beta|w|^2| - (\sqrt{\alpha} + \gamma|w|^2) \right| < 0,02|w|^3 \quad (3.34)$$

és

$$|d| \leq \frac{5}{3\sqrt{73}} < \frac{1}{5} \quad (3.35)$$

egyenlőtlenségek teljesülnek. Ezek után a (3.33), (3.34) és (3.35) egyenlőtlenségeket kihasználva nyerjük, hogy $0 \neq w \in B_{1/5}$ esetén

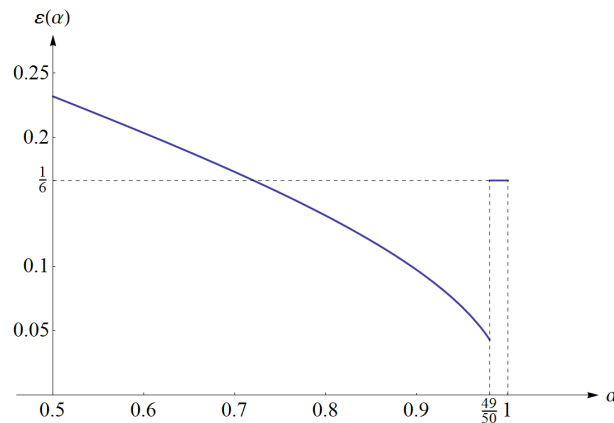
$$\begin{aligned} |G_{1.4}(w)| &< |w| (1 - 0,5|w|^2 + 0,2|w|^2 + 1,61|w|^3) \\ &= |w| (1 - |w|^2(0,3 - 1,61|w|)) < |w| \end{aligned} \quad (3.36)$$

fennáll, ha $|w| < \varepsilon_0 = \frac{0,3}{1,61}$. Ez bizonyítja, hogy a B_{ε_0} környezet a (3.15) leképezés 0 fixpontjának vonzástartományában van.

4. lépés: A $K_{\frac{1}{6}}$ környezet a (3.5) leképezés 0 fixpontjának vonzástartományában van

A (3.20) és (3.28) egyenlőtlenségekből következik, hogy bármely $(x, y) \in [-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]^2$ esetén $w \in B_{\varepsilon_0}$ teljesül. Innen nyerjük, hogy tetszőleges $(x_0, y_0) \in U(\alpha) = [-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]^2$ esetén $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = (0, 0)$. Ezzel a tételt maradéktalanul bebizonyítottuk. \square

A 3.6. ábrán a $2\varepsilon(\alpha)$ oldalhosszúságú $(0, 0)$ középpontú $U(\alpha)$ környezet méretének változása látható az α paraméter függvényében, amelyet az $\alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{49}{50}]$ paraméterértékekre a 3.12. Tételből, az $\alpha \in [\frac{49}{50}, 1]$ értékekre pedig a 3.13. Tételből kapunk.



3.6. ábra. A $\varepsilon(\alpha)$ függvény.

3.14. Következmény. A (3.5) leképezés $(0, 0)$ fixpontja lokálisan stabil, ha $(\alpha, m) \in \mathcal{R}(m)$.

Bizonyítás. Szimmetriai megfontolásokból elegendő az $m \geq 0$ esettel foglalkozni. Az $\alpha \neq 1$ esetben a lokális stabilitást megmutattuk a 3.6. Tétel bizonyításának elején. Az $\alpha = 1$ esetben a fenti bizonyításban látott (3.15) normálformára kell hozni a leképezést, majd a (3.36) összefüggésből adódik a lokális aszimptotikus stabilitás. \square

II. Rész: megbízható számítások

Tekintsünk most egy $(\alpha, m) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1]$ paraméterpárt. Tetszőlegesen adott (x_0, y_0) kezdőpont esetén, az $((x_k, y_k))_{k=0}^{\infty}$ trajektóriának torlódási pontjai az $F_{\alpha, m}$ nemvándorló

pontjai. A $(0,0)$ egyensúlyi helyzet globális attraktivitásának bizonyításához elegendő tehát megmutatnunk, hogy ő az $F_{\alpha,m}$ leképezés egyetlen nemvándorló pontja. A 3.8. Következményből tudjuk, hogy a nemvándorló pontok halmaza része az $S = [-4,4]^2$ halmaznak. Meg fogjuk mutatni, hogy S a $(0,0)$ fixpont vonzástartományában van, vagy ami ezzel ekvivalens, az S pozitív invariáns halmaz egyetlen nemvándorló pontja a $(0,0)$ fixpont.

A bizonyítás további részére vonatkozóan kihangsúlyozzuk, hogy $[\alpha]$, $[m]$, $[S]$ és $[U]$ olyan mennyiségek, amelyeket a számítógépen egy – esetleg többdimenziós – intervallummal reprezentálunk, míg $F_{[\alpha],[m]}$ a megfelelő intervallumértékű függvényt jelöli. Annak ellenére, hogy a fenti halmazok numerikus közelítések, azok garantáltan tartalmazzák a zárójelben lévő számot vagy halmazt. Bármely $(\alpha, m) \in [\alpha] \times [m]$ és bármely $(x, y) \in [S]$ esetén fennáll tehát, hogy $F_{\alpha,m}(x, y) \in F_{[\alpha],[m]}(x, y)$. Mindezt a megbízható számításokra kifejlesztett CAPD függvénykönyvtár [74] használatával tudjuk garantálni.

A 3.11. Tétel bizonyításának érdekében először vegyük a paramétertér egy δ átmérőjű partícióját: legfeljebb δ élhosszúságú $[\alpha] \times [m]$ téglalapokra osztjuk azt. Ezután lefuttatjuk az alábbi Globális_Stabilitás_Tanh programot. Az algoritmus függvények gráf-reprezentációit és intervallumaritmetikai eszközöket használ. Ezekről és az algoritmus helyességéről az érdeklődő olvasó a [7] dolgozatban talál részletes leírást, útmutatást.

```

1: procedure GLOBÁLIS_STABILITÁS_TANH( $[\alpha]$ ,  $[m]$ ,  $\delta$ )
2:    $[S] \leftarrow [-4,4]^2$ 
3:    $[U] \leftarrow \bigcap_{\alpha \in [\alpha]} U(\alpha)$  ▷ a 3.12. és 3.13. Tételekből
4:    $\mathcal{V} \leftarrow \text{Particionál}([S], \delta)$  ▷  $\mathcal{V}$  az  $[S]$  egy partíciója,  $\text{diam}(\mathcal{V}) \leq \delta$ 
5:   repeat
6:      $\mathcal{E} \leftarrow \text{Átmenetek}(\mathcal{V}, F_{[\alpha],[m]})$  ▷ a  $\mathcal{V}$  csúcsok közti átmenetek  $F_{[\alpha],[m]}$  mellett
7:      $\mathcal{G} \leftarrow \text{Gráf}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  ▷  $\mathcal{G}$  az  $F_{[\alpha],[m]}$  egy gráf-reprezentációja
8:      $T \leftarrow \{v : v \text{ egy irányított körön van} \}$ 
9:     for all  $v \in \mathcal{V}$  do
10:       if  $v \notin T$  or  $v \subseteq [U]$  or  $F_{[\alpha],[m]}(v) \subseteq [U]$  then
11:          $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} - v$  ▷ A  $v$  csúcsot elhagyjuk  $\mathcal{G}$ -ből
12:       end if
13:     end for
14:      $\delta \leftarrow \delta/2$ 
15:      $\mathcal{V} \leftarrow \text{Particionál}(|\mathcal{V}|, \delta)$ 
16:   until  $|\mathcal{V}| = \emptyset$ 
17: end procedure

```

Röviden összefoglalva a fenti algoritmust: az $F_{[\alpha],[m]}$ függvény gráf-reprezentációit vizsgálja egymásba ágyazott kompakt halmazok (a csúcsok halmaza) és egyre csökkenő partícióátmérő mellett. A rákövetkező (szűkebb) kompakt halmazt az algoritmus

11. sorában történő elhagyások útján kapjuk. Egy v csúcsát akkor hagyjuk el, ha sikerül megmutatnunk, hogy az nem tartalmazhat egyetlen nemvándorló pontot sem, vagy hogy az teljes egészében a origó vonzástartományában van.

Ha a program lefut véges időn belül, azaz, ha elérjük, hogy egy ponton a $|\mathcal{V}|$ csúcshalmaz kiürüljön, azzal bebizonyítottuk, hogy az origó az egyetlen nemvándorló pont $[S]$ -ben, amiből az következik, hogy globálisan attraktív minden $(\alpha, m) \in [\alpha] \times [m]$ paraméterpár esetén.

A fenti algoritmus C++ nyelven lett megvalósítva [73, Program]. A megbízható számítások és a gráfrepresentációs eljárások rendre a CAPD [74] és a Boost Graph [27] függvénykönyvtárak segítségével történtek. Az irányított körök megtalálására a Tarjan-algoritmust használtuk [62]. A paraméterteret különböző méretű téglalapokra osztottuk a probléma nehézségétől függően (a kritikus értékekhez közeledve egyre kisebbekre). A számításokat a Szegedi Tudományegyetem NIIF HPC központjának klaszterén futtattuk több szálon. Az $(\alpha, m) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1]$ tartomány lefedéséhez 6964 részre (szeletre) osztottuk a paramétertartományt. Ezek mérete $0,01 \times 0,01$ és $0,001 \times 0,001$ között mozgott. Az iterációk száma (vagyis a végrehajtott ciklusok száma a Globális_Stabilitás_Tanh programban) 10 és 25 között változott. A számítások 67 percet és 54 másodpercet vettek igénybe, ami – a több szálon történő futás miatt – összesen 11 óra, 47 perc és 3 másodpercnyi CPU-időnek felel meg.

A 3.11. Tétel bizonyítása. A Globális_Stabilitás_Tanh program sikeresen lefutott a paramétertartomány minden szeletére (az kimeneteket lásd [73, Program]). Ezt összevetve a 3.8. Következménnyel, valamint a 3.12. és 3.13. Tételekkel kapjuk, hogy a (3.5) leképezés $(0, 0)$ fixpontja globálisan attraktív bármely $(\alpha, m) \in (\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1]$ esetén. Ezek után a 3.6. Tételből, valamint a 3.9. és 3.10. Megjegyzésekből és a 3.14. Következményből adódik, hogy a (3.5) leképezés $(0, 0)$ fixpontja pontosan akkor globálisan aszimptotikusan stabil, ha $(\alpha, m) \in \mathcal{R}(m)$, és ezzel a bizonyításunk teljes. \square

3.2. Egy Ricker-féle populációdinamikai modell

Tekintsük a következő differenciaegyenletet:

$$x_{n+1} = x_n e^{\alpha - x_n}, \quad (3.37)$$

ahol α pozitív paraméter, x_n pedig egy adott területen élő populáció méretét jelöli a diszkrét $n \in \mathbb{N}$ időpillanatban. Az egyenletet bálnapopulációk dinamikájának modellezésére vezette be Ricker [59] 1954-ben. Legyen az egydimenziós Ricker-leképezés az $R_1: \mathbb{R} \ni x \mapsto x e^{\alpha - x} \in \mathbb{R}$ által definiálva. Ennek két fixpontja van: 0 és α . Nem nehéz belátni, hogy az $x = \alpha$ fixpont pontosan akkor lokálisan stabil, ha $0 < \alpha \leq 2$, és ekkor

a teljes $(0, \infty)$ pozitív félegyenes a vonzástartományához tartozik. Másként fogalmazva, a (3.37) egyenlet pozitív egyensúlyi helyzetének lokális stabilitása maga után vonja annak globális aszimptotikus stabilitását.

Levin és May [41] azt az esetet vizsgálták, amikor a fenti önszabályozó rendszerben explicit késleltetés mutatható ki – például az ivarérettség eléréséhez szükséges idő figyelembevételével. Az ő nevükhöz fűződik az alábbi $(d + 1)$ -edrendű (késleltetett) differenciaegyenlet:

$$x_{n+1} = x_n e^{\alpha - x_{n-d}}, \quad (3.38)$$

ahol d pozitív egész, és $\alpha > 0$ paraméter.

Legyen a $(d + 1)$ -dimenziós Ricker-leképezés az alábbiak szerint definiált:

$$R_{d+1}(\alpha): \mathbb{R}^{d+1} \ni (x_0, \dots, x_d) \mapsto (x_1, \dots, x_d, x_d e^{\alpha - x_0}) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

Ennek a leképezésnek szintén két fixpontja van \mathbb{R}^{d+1} -ben: $\underline{0}$ és $\underline{\alpha}$. Levin és May [41] 1976-os dolgozatukban megfogalmaztak egy sejtést, miszerint az $\underline{\alpha}$ fixpont lokális stabilitása ebben az esetben is maga után vonja annak globális aszimptotikus stabilitását abban az értelemben, hogy $\mathbb{R}_+^{d+1} := (0, \infty)^{d+1}$ a vonzástartományában van. A továbbiakban ebben az értelemben fogjuk használni a globálisan attraktív kifejezést. Tudomásunk szerint a sejtés ezidáig megoldatlan $d \geq 1$ esetén.

Levin és May sejtése és számos analitikus és numerikus eredmény is alátámasztja az általános megfigyelést, mely szerint ha egy egyetlen faj populációját modellező egyenletnek pontosan egy pozitív egyensúlyi helyzete van, akkor ennek lokális stabilitása maga után vonja a globális stabilitást. Jiménez López és Parreño [28, 29] ezzel szemben megmutatta, hogy ha a modell Clark-típusú [8] és $d \geq 3$, akkor ez nem feltétlenül igaz. Ladas is megfogalmazott hasonló sejtéseket késleltetett differenciaegyenletek globális stabilitását illetően [39]. Ezek egyikét nemrég bizonyította Merino [50].

Levin és May sejtését illetően Liz, Tkachenko és Trofimchuk [44] bebizonyították, hogy

$$0 < \alpha < \frac{3}{2(d+1)} \quad (3.39)$$

esetén az $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^{d+1}$ az $R_{d+1}(\alpha)$ globálisan attraktív fixpontja. Emellett útmutatást adtak a

$$0 < \alpha < \frac{3}{2(d+1)} + \frac{1}{2(d+1)^2} \quad (3.40)$$

feltétel elegendőségének bizonyítása felé. Tkachenko és Trofimchuk [63] dolgozatukban bizonyították ezt egy a Levin és May sejtésénél általánosabb függvényosztályra. Az érdeklődő olvasó további részleteket találhat a témáról Liz [42, 43] dolgozataiban.

Az $R_2(\alpha)$ leképezés (α, α) fixpontban történő linearizálásával könnyen megmutatható, hogy a fixpont lokálisan aszimptotikusan stabil, ha $0 < \alpha < 1$, és instabil, ha $\alpha > 1$. Levin és May sejtése tehát ebben az esetben azt állítja, hogy ha $0 < \alpha < 1$, akkor az $R_2(\alpha)$

leképezés (α, α) fixpontjának vonzástartományába tartozik a teljes $\mathbb{R}_+^2 = (0, \infty) \times (0, \infty)$ pozitív síknegyed. Tudomásunk szerint erre vonatkozóan az eddigi legerősebb tételt Tkachenko és Trofimchuk (3.40) feltétele adja, amely szerint az $\underline{\alpha}$ fixpont globálisan attraktív, ha $\alpha \in (0, 0,875)$.

A továbbiakban a kétdimenziós Ricker-leképezést fogjuk vizsgálni. Az egyszerűség kedvéért vezessük be az $F_\alpha = R_2(\alpha)$ jelölést. Ennek a résznek a fő eredménye az alábbi tétel.

3.15. Tétel. *Ha $0 < \alpha \leq 1$, akkor az F_α leképezés (α, α) fixpontja lokálisan aszimptotikusan stabil és $F_\alpha^n(x, y) \rightarrow (\alpha, \alpha)$ bármely $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, amint $n \rightarrow \infty$.*

A tétel abban az értelemben nem javítható, hogy $\alpha > 1$ esetén az (α, α) fixpont instabil. Hangsúlyozzuk, hogy a fixpont az $\alpha = 1$ kritikus érték esetén is globálisan aszimptotikusan stabil. Röviden összefoglaljuk a bizonyítás fő lépéseit. A bizonyítás az előző részben látottakhoz hasonlóan történik:

- 1. lépés: Minden paraméterre megkonstruáljuk a fázistér egy kompakt S részhalmazát, amely tartalmaz egy pozitív invariáns részhalmazt, amelybe a pozitív síknegyedből indított bármely trajektória belép tetszőleges $0 < \alpha \leq 1$ paraméter esetén (lásd a 3.2.1. szakaszt).
- 2. lépés: Az $\underline{\alpha}$ fixpont egy U környezetének megkonstruálása, mely a fixpont vonzástartományába esik és amely független az $\alpha \in (0, 1]$ paraméter megválasztásától. Ezt linearizálással és a Neimark–Sacker-bifurkáció normálformájának segítségével fogjuk megadni. Ehhez éles becsléseket kell adnunk a normálforma magasabb rendű hibatarjaira, amit megbízható számítógépes módszerekkel fogunk megtenni (lásd a 3.2.2. szakaszt).
- 3. lépés: Annak bizonyítása, hogy az 1. lépésben megkonstruált kompakt halmazból indított bármely trajektória belép a 2. lépésben megkonstruált kis környezetbe. Ez intervallumaritmetikai eszközöket és számítógéppel segített gráfrepresentációs eljárásokat igényel (lásd a 3.2.3. szakaszt).

3.2.1. A kompakt pozitív invariáns halmaz megkonstruálása

Definiáljuk a következő függvényt:

$$\tau_\alpha: \mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha e^{2(\alpha-t)} \in \mathbb{R}.$$

Legyen továbbá az $(s_n^{(\alpha)})_{n=1}^\infty$ sorozat az alábbiak szerint definiálva:

$$s_0^{(\alpha)} = 0, \quad s_{n+1}^{(\alpha)} = \tau_\alpha(s_n^{(\alpha)}), \quad \text{ha } n \in \mathbb{N}_0.$$

Ekkor belátható, hogy bármely $\alpha > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} 0 = s_0^{(\alpha)} &< s_2^{(\alpha)} < \cdots < s_{2n-2}^{(\alpha)} < s_{2n}^{(\alpha)} \\ &< \alpha < s_{2n+1}^{(\alpha)} < s_{2n-1}^{(\alpha)} < \cdots < s_3^{(\alpha)} < s_1^{(\alpha)} = \alpha e^{2\alpha} \end{aligned}$$

fennáll. Legyen $I^{(\alpha)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}^{(\alpha)}$, és $L^{(\alpha)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1}^{(\alpha)}$, valamint vezessük be a következő jelölést:

$$S^{(\alpha)} = [I^{(\alpha)}, \alpha] \times [I^{(\alpha)}, \alpha e^{\alpha - I^{(\alpha)}}] \cup [\alpha, L^{(\alpha)}] \times [\alpha e^{\alpha - L^{(\alpha)}}, L^{(\alpha)}]. \quad (3.41)$$

Ekkor elemi módszerekkel bizonyítható a következő tétel (részleteket lásd a [7] dolgozatban).

3.16. Tétel. *Az $S^{(\alpha)}$ kompakt halmaz pozitív invariáns F_α -ra nézve és bármely $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén létezik $n \in \mathbb{N}_0$, hogy $F_\alpha^n(x, y) \in S^{(\alpha)}$.*

3.17. Megjegyzés. A fenti tétel igazolása során mellékesen adódik egy elemi bizonyítása annak, hogy bármely $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén $F_\alpha^n(x, y) \rightarrow (\alpha, \alpha)$, amint $n \rightarrow \infty$ és $0 < \alpha \leq 1/2$. Mivel ennél erősebb tételek is ismertek az irodalomban, így ezt nem ismertetjük (részleteket lásd a [7] dolgozatban).

3.2.2. A fixpont vonzástartományához tartozó környezet konstruálása

A környezet megadása a 3.1.2. szakaszban látottakhoz hasonlóan megy és a Neimark–Sacker-bifurkáció (nemrezonáns) normálformájának vizsgálatával történik (lásd [38]). Ebben a szakaszban szükségünk lesz a normálforma magasabb rendű tagjainak pontos képletére, és azok abszolútértékeinek minél élesebb felső becsléseire. Ezekhez a becslésekhez – ahogy a 3.1.2. szakaszban is – most is számítógépes segítséget veszünk igénybe. A formulák kiszámításához a *Wolfram Mathematica* számítógép-algebrai rendszer szimbolikus számításait használtuk, míg azok becslésére a program beépített intervallumaritmetikai parancsai voltak segítségünkre. Mindkét eszköz megbízható számítási módszernek tekinthető. Megjegyezzük, hogy a becslendő (legfontosabb) formulákat a dolgozat végén található függelékben soroljuk föl; a levezetés során ezekre fogunk hivatkozni.

Először vezessük be az $u = x - \alpha$, $v = y - \alpha$ változókat. Ezzel a nemtriviális fixpontot az origóba toltuk. Vizsgáljuk tehát az így kapott leképezést:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto A(\alpha) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + f_\alpha(u, v), \quad (3.42)$$

ahol

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix},$$

a maradéktag pedig

$$f_\alpha(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ v(e^{-u} - 1) + \alpha(e^{-u} - 1 + u) \end{pmatrix}.$$

Ekkor $\alpha > \frac{1}{4}$ esetén az $A(\alpha)$ mátrix sajátértékei a $\mu_{1,2}(\alpha) = \frac{1 \pm i\sqrt{4\alpha-1}}{2}$ komplex számok. Jelölje rendre

$$q_{1,2}(\alpha) = \left(\frac{1 \mp \sqrt{1-4\alpha}}{2\alpha}, 1 \right)^T = \left(\frac{1 \mp i\sqrt{4\alpha-1}}{2\alpha}, 1 \right)^T \in \mathbb{C}^2$$

a hozzájuk tartozó sajátvektorokat. Legyen $q(\alpha) = q_1(\alpha)$ és $\mu(\alpha) = \mu_1(\alpha)$. Legyen továbbá $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ az $A(\alpha)^T$ mátrix $\overline{\mu(\alpha)}$ sajátértékéhez tartozó sajátvektora, amelyre $\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1$. Ekkor

$$p(\alpha) = \left(-\frac{i\alpha}{\sqrt{4\alpha-1}}, \frac{\sqrt{4\alpha-1} + i}{2\sqrt{4\alpha-1}} \right).$$

Vezessük be a következő komplex változót:

$$z = z(u, v, \alpha) = \langle p(\alpha), (u, v) \rangle = \frac{1}{2} \left(v - \frac{i(v - 2u\alpha)}{\sqrt{-1 + 4\alpha}} \right). \quad (3.43)$$

A transzformáció inverze ekkor az alábbi alakban adható:

$$(u, v)^T = zq(\alpha) + \overline{zq(\alpha)} = \left(\frac{\operatorname{Re} z + \sqrt{4\alpha-1} \operatorname{Im} z}{\alpha}, 2 \operatorname{Re} z \right)^T. \quad (3.44)$$

A (3.42) leképezést ezzel az alábbi komplex leképezéssé transzformáltuk:

$$\begin{aligned} z \mapsto G(z, \bar{z}, \alpha) &= \left\langle p(\alpha), A(\alpha)(zq(\alpha) + \overline{zq(\alpha)}) + f_\alpha(zq(\alpha) + \overline{zq(\alpha)}) \right\rangle \\ &= \mu(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha), \end{aligned} \quad (3.45)$$

ahol g a z , \bar{z} és α változóknak a függelék (A.1) formulája által definiált komplex értékű sima függvénye. Vegyük észre továbbá, hogy rögzített α esetén a g függvény a z és \bar{z} változóknak analitikus, és hogy a Taylor-féle sorfejtésében csak másod- és magasabb rendű tagokat tartalmaz, vagyis

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{2 \leq k+l} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l, \quad k, l \in \mathbb{N}_0$$

ahol $g_{kl}(\alpha) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} g(z, \bar{z}, \alpha) \Big|_{z=0}$ bármely $k+l \geq 2$, $k, l \in \mathbb{N}_0$ esetén.

Ennek a résznek a fő eredménye az alábbi két tétel, amelyeknek jelentős szerep jut a fixpont globális aszimptotikus stabilitásának bizonyításában. A két tétel bizonyításának gondolatmenete szóról szóra megegyezik, a különbségek kizárólag a konkrét becslésekben jelentkeznek, ezért csak a 3.19. Tételt fogjuk bizonyítani. A becsléseket mindkét esetben egy megbízható számítógépes eljárásokat használó *Wolfram Mathematica* program

segítségével végeztük (lásd [75, Basin_of_attraction]). Jogosan adódik a kérdés, hogy miért nem elég a 3.18. Tételt bizonyítanunk. Ennek az az oka, hogy a kritikus $\alpha = 1$ paraméternél és annak közelében már nagyon lassú a konvergencia, így ha azt akarnánk megmutatni, hogy a trajektóriák belépnek a fixpont $K(\alpha; 1/37)$ környezetébe, akkor a számítógéppel segített résznél a fázisteret már olyan kis részekre kellene bontani, hogy a gráfrepresentáció tárolására a számítógépklaszter 128 GB memóriája sem lenne elegendő.

3.18. Tétel. Az

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - \alpha| < \frac{1}{37}, |y - \alpha| < \frac{1}{37} \right\}$$

halmaz az F_α leképezés (α, α) fixpontjának vonzástartományában van bármely rögzített $\alpha \in [0,875, 1]$ paraméter esetén.

3.19. Tétel. Az

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - \alpha| < \frac{1}{22}, |y - \alpha| < \frac{1}{22} \right\}$$

halmaz az F_α leképezés (α, α) fixpontjának vonzástartományában van bármely rögzített $\alpha \in [0,999, 1]$ paraméter esetén.

Bizonyítás. A bizonyítás – mint már említettük – a 3.13. Tételnél látott módszer szerint történik, ám a becslések itt több oknál fogva összetettebbek lesznek. Egyrészt a transzformációkban a másodrendű tagok nemzérók lesznek, másrészt – ahogy azt fentebb kifejtettük – komoly kihívást jelent, hogy minél pontosabb becsléseket adjunk, ezért sok helyen a negyedrendű tagokat is kiszámítjuk, majd egyenként becsüljük, és csak az annál magasabb rendűeket kezeljük és becsüljük együtt.

A célunk, hogy a (3.45) leképezést – Kuznetsov [38] gondolatmenetét követve – az alábbi normálformájára transzformáljuk:

$$w \mapsto \mu(\alpha)w + c(\alpha)w^2\bar{w} + R_2(w, \bar{w}, \alpha), \quad (3.46)$$

ahol $R_2(w) = R_2(w, \bar{w}, \alpha) = O(|w|^4)$ bármely rögzített $\alpha \in [0,999, 1]$ esetén. Meg fogjuk mutatni, hogy létezik $\varepsilon_0 > 0$, hogy bármely $0 < |w| < \varepsilon_0$ esetén

$$|\mu(\alpha)w + c(\alpha)w^2\bar{w} + R_2(w, \bar{w}, \alpha)| < |w|$$

teljesül, ahonnan következik, hogy B_{ε_0} a (3.46) leképezés 0 fixpontjának vonzástartományában van. Ebből már könnyen le tudjuk majd vezetni, hogy a $K(\alpha; 1/22)$ környezet az F_α leképezés (α, α) fixpontjának vonzástartományában van. A bizonyítás során számos becslést fogunk adni. Ezek a becslések mindig uniformak lesznek abban az értelemben, hogy minden $\alpha \in [0,999, 1]$ esetén fennállnak, ha ezt külön nem is hangsúlyozzuk.

1. lépés: Transzformálás a normálformára

A normálformára alakítás érdekében egy olyan komplex, invertálható, sima $h_\alpha: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt keresünk, amely definiált és invertálható a $0 \in \mathbb{C}$ egy környezetében, és amely a (3.45) leképezést a

$$w \mapsto h_\alpha^{-1} \left(G \left(h_\alpha(w), \overline{h_\alpha(w)}, \alpha \right) \right) = \mu(\alpha)w + c(\alpha)w^2\bar{w} + R_2(w, \bar{w}, \alpha) \quad (3.47)$$

alakra hozza, ahol $R_2(w) = R_2(w, \bar{w}, \alpha) = O(|w|^4)$ bármely rögzített $\alpha \in [0,999, 1]$ esetén. A 3.1.2. szakaszban látottakhoz hasonlóan, [38] szerint itt is található ilyen h_α függvény, amely w és \bar{w} változók (legfeljebb) harmadfokú polinomja, azaz

$$h_\alpha(w) = w + \frac{h_{20}(\alpha)}{2}w^2 + h_{11}(\alpha)w\bar{w} + \frac{h_{02}(\alpha)}{2}\bar{w}^2 + \frac{h_{30}(\alpha)}{6}w^3 + \frac{h_{12}(\alpha)}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}(\alpha)}{6}\bar{w}^3. \quad (3.48)$$

Világos, hogy h_α invertálható a 0 egy kis környezetében és ott h_α^{-1} a következő alakba írható:

$$h_\alpha^{-1}(z) = h_{\text{inv},\alpha}(z) + R_3(z, \alpha),$$

ahol

$$h_{\text{inv},\alpha}(z) = z + \sum_{2 \leq k+l \leq 4} a_{kl}(\alpha)z^k\bar{z}^l,$$

és $R_3(z, \alpha) = O(|z|^5)$ rögzített α esetén. Ezek értelmezési tartományát a későbbiekben fogjuk meghatározni. Az együtthatókat úgy kaphatjuk meg, ha a $z = h_\alpha(w)$ formulába behelyettesítjük a $w = h_\alpha^{-1}(z)$ összefüggést, majd a negyedrendű tagokig egyenlővé tesszük a megfelelő tagokat. A $h_{\text{inv},\alpha}$ függvényre kapott összefüggés megtalálható a függelék (A.14) formulájában a $h_{20}(\alpha), \dots, h_{03}(\alpha)$ együtthatók függvényében. A $h_{20}(\alpha), \dots, h_{03}(\alpha)$ együtthatókat a $h_\alpha^{-1}(G(h_\alpha(w), \overline{h_\alpha(w)}, \alpha))$ kifejezés vizsgálatából határozhatjuk meg. Az együtthatóknak olyanoknak kell lenniük, hogy a kifejezés sorfejtésében a $|w|$ -ben legfeljebb harmadrendű tagjainak összege $\mu(\alpha) + c(\alpha)w^2\bar{w}$ alakú legyen, vagyis a transzformáció „kinullázza” a másodrendű és egy kivételtől eltekintve a harmadrendű tagokat. Ez lehetséges a kritikus 1 értékhez közeli α értékekre, hiszen rezonancia nem lép fel:

$$\left(\frac{\mu(1)}{|\mu(1)|} \right)^k \neq 1, \quad k \in \{1, 2, 3, 4\},$$

ugyanis $\mu(1) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Az (A.15)–(A.20) formulák tartalmazzák a kapott eredményeket.

2. lépés: A h_α transzformáció értelmezése és becslése

Megmutatjuk, hogy h_α injektív a $\overline{B_{1/3}} \subset \mathbb{C}$ halmazon, valamint, hogy h_α^{-1} definiálva van a $\overline{B_{1/5}}$ halmazon. Tegyük fel, hogy $z \in \mathbb{C}$ rögzített és hogy $h_{20}(\alpha), \dots, h_{03}(\alpha)$ adottak egy

rögzített $\alpha \in [0,999, 1]$ esetén. Legyen

$$H_{\alpha,z}: \mathbb{C} \ni w \mapsto w + z - h_\alpha(w) \in \mathbb{C}.$$

Ezzel a jelöléssel élve $H_{\alpha,z}(w) = w$ pontosan akkor teljesül, ha $h_\alpha(w) = z$. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} |H_{\alpha,z}(w_1) - H_{\alpha,z}(w_2)| &= |w_1 - h_\alpha(w_1) - w_2 + h_\alpha(w_2)| \\ &\leq |w_1 - w_2| \cdot \left(\left(\frac{|h_{20}(\alpha)|}{2} + |h_{11}(\alpha)| + \frac{|h_{02}(\alpha)|}{2} \right) (|w_1| + |w_2|) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{|h_{30}(\alpha)|}{6} + \frac{|h_{12}(\alpha)|}{2} + \frac{|h_{03}(\alpha)|}{6} \right) (|w_1|^2 + |w_1||w_2| + |w_2|^2) \right). \end{aligned}$$

Ha a $|h_{20}(\alpha)|/2 + |h_{11}(\alpha)| + |h_{02}(\alpha)|/2 < \delta_1$, $|h_{30}(\alpha)|/6 + |h_{12}(\alpha)|/2 + |h_{03}(\alpha)|/6 < \delta_2$, $|w| \leq \delta_3$ és $|z| \leq \delta_4$ egyenlőtlenségek fennállnak, akkor

$$|H_{\alpha,z}(w_1) - H_{\alpha,z}(w_2)| \leq |w_1 - w_2|(2\delta_1\delta_3 + 3\delta_2\delta_3^2),$$

valamint (3.48) miatt

$$|H_{\alpha,z}(w)| \leq \delta_4 + \delta_1\delta_3^2 + \delta_2\delta_3^3$$

teljesül. Be lehet látni, hogy az első két egyenlőtlenség fennáll, ha $\delta_1 = 0,76$ és $\delta_2 = 0,52$. A $\delta_3 = \frac{1}{3}$ és $\delta_4 = \frac{1}{5}$ választással nyerjük, hogy $H_{\alpha,z}: \overline{B_{1/3}} \rightarrow \overline{B_{1/3}}$ kontrakció, tehát bármely rögzített $z \in \overline{B_{1/5}}$ esetén létezik egyetlen $w = w(z) \in \overline{B_{1/3}}$, amelyre teljesül $H_{\alpha,z}(w(z)) = w(z)$, vagyis $h_\alpha(w(z)) = z$. Innen következik, hogy h_α^{-1} értelmezve van a $\overline{B_{1/5}}$ környezetben. A h_α -ra vonatkozó

$$\begin{aligned} \frac{|h_{20}(\alpha)|}{2} + |h_{11}(\alpha)| + \frac{|h_{02}(\alpha)|}{2} &< 0,76, \\ \frac{|h_{30}(\alpha)|}{6} + \frac{|h_{12}(\alpha)|}{2} + \frac{|h_{03}(\alpha)|}{6} &< 0,52 \end{aligned}$$

becsléseket a továbbiakban is alkalmazni fogjuk. A fentiekből speciálisan adódik, hogy

$$|w| - 0,76|w|^2 - 0,52|w|^3 < |h_\alpha(w)| < |w| + 0,76|w|^2 + 0,52|w|^3 \quad (3.49)$$

fennáll bármely $\alpha \in [0,999, 1]$ esetén. Legyen

$$H = \{(\alpha, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} : \alpha \in [0,999, 1], w \neq 0 \text{ és } |w| < 1/20\}.$$

A továbbiakban mindig feltesszük, hogy $(\alpha, w) \in H$. Ebből és a (3.49) egyenlőtlenségből nyerjük, hogy $|w| < 1,05|h_\alpha(w)|$ teljesül, ahonnan speciálisan $|z| = |h_\alpha(w)| < 1/19$ is következik.

3. lépés: Alsó becslés a (3.47) leképezés 0 fixpontjának vonzástartományára

Célunk egy olyan $-\alpha$ paramétertől független $-\varepsilon_0 \in (0, 1/20]$ megadása, melyre bármely $\alpha \in [0,999, 1]$ esetén, ha $0 < |w| < \varepsilon_0$, akkor $\left| h_\alpha^{-1} \left(G \left(h_\alpha(w), \overline{h_\alpha(w)}, \alpha \right) \right) \right| < |w|$ teljesül, ami garantálja, hogy a B_{ε_0} környezet a (3.47) leképezés 0 fixpontjának vonzástartományában van. Ehhez becsléseket kell adnunk a (3.47) normálformában szereplő c és R_2 függvényekre. Ezt azonban még számos más becsléssel kell előkészítenünk.

3.1. lépés: A g függvény becslése

Tekintsük ismét a (3.45) leképezést és a

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l=2,3} \frac{g_{kl}(\alpha)}{k!l!} z^k \bar{z}^l + R_1(z, \bar{z}, \alpha)$$

formulát. A $g_{20}(\alpha), \dots, g_{03}(\alpha)$ együtthatókra vonatkozó pontos képleteket lásd a függelék (A.2)–(A.8) formuláiban. Megmutatható, hogy bármely $\alpha \in [0,999, 1]$ esetén

$$\frac{|g_{20}(\alpha)|}{2} + |g_{11}(\alpha)| + \frac{|g_{02}(\alpha)|}{2} = \frac{1 - \alpha + \sqrt{\alpha(2 + \alpha)}}{\sqrt{\alpha(-1 + 4\alpha)}} < 1,01 \quad (3.50)$$

és

$$\sum_{k+l=3} \frac{|g_{kl}(\alpha)|}{k!l!} = \sqrt{\frac{(6 + \alpha)}{9\alpha(4\alpha - 1)}} + \sqrt{\frac{2 + (\alpha - 2)\alpha}{\alpha^2(4\alpha - 1)}} < 1,09 \quad (3.51)$$

egyenlőtlenségek fennállnak. Ugyanakkor $R_1(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l=4} \frac{g_{kl}(\alpha)}{k!l!} z^k \bar{z}^l + \tilde{R}_1(z, \bar{z}, \alpha)$, ahol $\tilde{R}_1(z, \bar{z}, \alpha) = O(|z|^5)$ rögzített α esetén. A negyedrendű tagokra vonatkozó explicit képleteket lásd a függelék (A.9)–(A.13) formuláiban. A (3.42), (3.44) és (3.45) összefüggésekből következik, hogy

$$\tilde{R}_1(z, \bar{z}, \alpha) = \frac{\sqrt{4\alpha - 1} - i}{2\sqrt{4\alpha - 1}} \left(v \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-u)^k}{k!} + \alpha \sum_{k=5}^{\infty} \frac{(-u)^k}{k!} \right),$$

ahol az u és v változók a (3.44) összefüggés által definiáltak, amiből az

$$|u| \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha}} |z| \quad \text{és} \quad |v| \leq 2|z| \quad (3.52)$$

becslések könnyen igazolhatók. Ebből és a $|z| < 1/19$ feltételből nyerjük, hogy $|u| < 1/8$ és $|v| < 1/8$ fennállnak. Ezt összevetve a fenti \tilde{R}_1 -ra adott összefüggéssel a következő becsléseket kapjuk:

$$\begin{aligned} |\tilde{R}_1(z, \bar{z}, \alpha)| &\leq \sqrt{\frac{\alpha}{4\alpha - 1}} \left(|v| \frac{e^{1/8}}{4!} |u|^4 + \alpha \frac{e^{1/8}}{5!} |u|^5 \right) \\ &< \sqrt{\frac{\alpha}{4\alpha - 1}} \frac{8}{7} \left(2|z| \frac{16}{24\alpha^2} + \frac{32}{\alpha^{3/2} 120} |z| \right) |z|^4 \\ &\leq \sqrt{\frac{\alpha}{4\alpha - 1}} \frac{8}{7} \left(\frac{4}{57\alpha^2} + \frac{4}{285\alpha^2} \right) |z|^4 = \frac{64}{665} \sqrt{\frac{1}{(4\alpha - 1)\alpha^3}} |z|^4. \end{aligned}$$

Ekkor bármely $(\alpha, w) \in H$ esetén a $z = h_\alpha(w)$ jelölés mellett adódik, hogy

$$\begin{aligned} |R_1(z, \bar{z}, \alpha)| &\leq \sum_{k+l=4} \left| \frac{g^{kl}(\alpha)}{k!l!} z^k \bar{z}^l \right| + |\tilde{R}_1(z, \bar{z}, \alpha)| \\ &= \frac{6 - 3\alpha + \sqrt{\alpha(12 + \alpha)} + 4\sqrt{3 + \alpha^2}}{12\sqrt{\alpha^3(-1 + 4\alpha)}} + |\tilde{R}_1(z, \bar{z}, \alpha)| \\ &< \frac{4758 - 1995\alpha + 665\sqrt{\alpha(12 + \alpha)} + 2660\sqrt{3 + \alpha^2}}{7980\sqrt{\alpha^3(-1 + 4\alpha)}}. \end{aligned}$$

Megmutatható, hogy bármely $\alpha \in [0,999, 1]$ esetén az

$$|R_1(z, \bar{z}, \alpha)| < 0,76|z|^4 \quad (3.53)$$

egyenlőtlenség fennáll.

3.2. lépés: $h_\alpha^{-1}(z)$ becslése

Használjuk továbbra is a $z = h_\alpha(w)$ jelölést. Ekkor

$$w = h_\alpha^{-1}(z) = h_{\text{inv},\alpha}(z) + R_3(z, \alpha),$$

ahol $h_{\text{inv},\alpha}(z)$ az (A.14)–(A.20) formulák által definiált negyedfokú polinomja z -nek és \bar{z} -nak. Jelölje a $z^k \bar{z}^l$ együtthatóját $h_{\text{inv}}^{kl}(\alpha)$. Ezekkel a jelölésekkel élve a következő becsléseket kapjuk:

$$\sum_{k+l=2} |h_{\text{inv}}^{kl}| < 0,76, \quad \sum_{k+l=3} |h_{\text{inv}}^{kl}| < 1,06 \quad \text{és} \quad \sum_{k+l=4} |h_{\text{inv}}^{kl}| < 1,39 \quad (3.54)$$

bármely $\alpha \in [0,999, 1]$ esetén (lásd még az (A.21)–(A.27) formulákat a becslésekhez). Emlékeztetünk, hogy bármely $(\alpha, w) \in H$ esetén $|w| < 1,05|h_\alpha(w)|$ teljesül. Ezt kihasználva az R_3 ötöd- és magasabb rendű tagjaira először egy $|R_3(h_\alpha(w), \alpha)| < K_3|w|^4$ típusú felső becslést adunk, majd innen az előbbieket nyerve, hogy $|R_3(z, \alpha)| < K_3 \cdot 1,05^4|z|^4$, hiszen $z = h_\alpha(w)$.

A $h_{\text{inv},\alpha}$ definíciójából következik, hogy $R_3(h_\alpha(w), \alpha) = w - h_{\text{inv},\alpha}(h_\alpha(w))$ a w és \bar{w} egy polinomja, mely kizárólag ötöd- és magasabb fokú tagokat tartalmaz. Jelölje $r_3^{kl}(\alpha)$ az $w^k \bar{w}^l$ együtthatóját a fenti polinomban. Az $|R_3(h_\alpha(w), \alpha)| = \left| \sum_{5 \leq k+l} r_3^{k+l}(\alpha) w^k \bar{w}^l \right|$ kifejezés felső becslésére egy elég durva közelítést alkalmazunk. Először az alábbi becsléseket tesszük:

$$\begin{aligned} |h_{20}(\alpha)| < 1,01, \quad |h_{11}(\alpha)| < 0,001, \quad |h_{02}(\alpha)| < 0,51, \\ |h_{30}(\alpha)| < 0,89, \quad |h_{12}(\alpha)| < 0,45, \quad |h_{03}(\alpha)| < 0,89, \end{aligned}$$

majd az $R_3(h_\alpha(w), \alpha)$ kifejezésben w és \bar{w} helyére $|w|$ -et, $h_{nm}(\alpha)$ helyére pedig a fenti felső becsléseket írjuk minden $2 \leq n + m \leq 3$, $(n, m) \neq (2, 1)$ esetén, valamint minden

– jelet + jelre cserélünk. Az így kapott polinomot jelölje $\hat{R}_3(|w|)$, annak a $|w|^k$ taghoz tartozó $-\alpha$ paramétertől független, nemnegatív – együtthatóit pedig jelölje rendre \hat{r}_3^k . A $0 < |w| < 1/20$ feltételezést kihasználva így a következő felső becslés adható:

$$\sum_{5 \leq k+l \leq 12} |r_3^{kl}(\alpha)| |w|^{k+l} < \sum_{5 \leq k \leq 12} \hat{r}_3^k |w|^k < \sum_{5 \leq k \leq 12} \hat{r}_3^k |w|^4 \left(\frac{1}{20}\right)^{k-4} < 1,02 |w|^4. \quad (3.55)$$

Ebből következik, hogy

$$|R_3(z, \alpha)| < 1,05^4 \cdot 1,02 |z|^4 < 1,24 |z|^4 \quad (3.56)$$

fennáll bármely $(\alpha, w) \in H$ esetén, ahol $z = h_\alpha(w)$. Mindezek alapján

$$|h_{\text{inv}}(z)| < |z| + 0,76 |z|^2 + 1,06 |z|^3 + 2,63 |z|^4 \quad (3.57)$$

teljesül bármely $(\alpha, w) \in H$ esetén, ha $z = h_\alpha(w)$.

3.3. lépés: R_2 becslése

Most már készen állunk a (3.47) leképezés R_2 maradéktagjának felső becslésére. Az eddigi becsléseinkkel összhangban definiáljuk az alábbi polinomokat:

$$\begin{aligned} h^{\max}(s) &= s + 0,76s^2 + 0,52s^3, \\ G^{\max}(s) &= s + 1,01s^2 + 1,09s^3 + 0,76s^4, \\ h_{\text{inv}}^{\max}(s) &= s + 0,76s^2 + 1,06s^3 + 2,63s^4, \end{aligned}$$

és

$$Q(s) = \sum_{k=1}^{48} q_k s^k = h_{\text{inv}}^{\max} \circ G^{\max} \circ h^{\max}(s).$$

Az eddigiek alapján világos, hogy bármely $(\alpha, w) \in H$ esetén

$$|R_2(w, \bar{w}, \alpha)| < \sum_{k=4}^{48} q_k |w|^4 \left(\frac{1}{20}\right)^{k-4}$$

fennáll, amiből az $|R_2(w, \bar{w}, \alpha)| < 23,9 |w|^4$ becslést kapjuk. Ezt használva a megkonstruálandó környezet a mi céljainkhoz túl kicsi lenne ($\approx K(\alpha; 1/80)$), ezért tovább kell finomítani a becslésünket. Ennek érdekében tekintsük $h_\alpha^{-1} \circ G_\alpha \circ h_\alpha$ függvényt, ahol a $G_\alpha(z) = G(z, \bar{z}, \alpha)$. Minket ezúttal csak a negyed- és magasabb rendű tagok érdekelnek. A h_α ismert, valamint G_α és h_α^{-1} is ismertek a negyedrendű tagokig, így $h_\alpha^{-1} \circ G_\alpha \circ h_\alpha$ negyedrendű tagjai kiszámíthatók. Jelölje a $w^k \bar{w}^l$ taghoz tartozó együtthatót rendre $r_2^{kl}(\alpha)$, ahol $k + l = 4$. Ekkor megmutatható, hogy

$$\sum_{k+l=4} |r_2^{kl}(\alpha)| < 1,02, \quad (3.58)$$

lásd az (A.28)–(A.33) formulákat. Ezt felhasználva már egy sokkal jobb becslést kapunk, nevezetesen hogy

$$|R_2(w, \bar{w}, \alpha)| < 1,02|w|^4 + \sum_{k=5}^{48} q_k |w|^4 \left(\frac{1}{20}\right)^{k-4} < 4,6|w|^4 \quad (3.59)$$

fennáll bármely $(\alpha, w) \in H$ esetén.

Ezután fordítsuk a figyelmünket a (3.47) leképezés másik szereplőjére, a $c(\alpha)$ együtthatóra. A rá vonatkozó explicit formula megtalálható a függelékben, lásd (A.34).

3.4. lépés: A $B_{1/20}$ környezet a (3.47) leképezés 0 fixpontjának vonzástartományában van

Kuznetsov [38] levezetését követve és felhasználva a (3.59) becslést a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} |\mu(\alpha)w + c(\alpha)w^2\bar{w} + R_2(w, \bar{w}, \alpha)| &\leq |w| |\mu(\alpha) + c(\alpha)| |w|^2 + |R_2(w, \bar{w}, \alpha)| \\ &= |w| (|\mu(\alpha)| + d(\alpha)) |w|^2 + |R_2(w, \bar{w}, \alpha)| \quad (3.60) \\ &< |w| (\sqrt{\alpha} + d(\alpha)) |w|^2 + 4,6|w|^4, \end{aligned}$$

bármely $(\alpha, w) \in H$ esetén, ahol $d(\alpha) = \frac{|\mu(\alpha)|}{\mu(\alpha)} c(\alpha)$. Legyen

$$R_4(w, \alpha) = |\sqrt{\alpha} + d(\alpha)| |w|^2 - (\sqrt{\alpha} + a(\alpha)) |w|^2,$$

ahol $a(\alpha)$ a $d(\alpha)$ valós részét jelöli.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy $|R_4(w, \alpha)| < 0,1|w|^3$ fennáll bármely $(\alpha, w) \in H$ esetén. Szükségünk lesz az a pontos képletére α függvényében:

$$a(\alpha) = \frac{4 + \alpha(-10 + \alpha + \alpha^2)}{4\alpha^{3/2}(-1 + \alpha(4 + \alpha))}. \quad (3.61)$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$-1 < a(\alpha) \leq -\frac{1}{4} \quad (3.62)$$

fennáll bármely $\alpha \in [0,999, 1]$ esetén. Kihasznlva d és a definícióját, valamint a fenti

becslést a következő becslések igazolhatók bármely $(\alpha, w) \in H$ esetén:

$$\begin{aligned}
& \left| \left| \sqrt{\alpha} + d(\alpha)|w|^2 \right| - \left(\sqrt{\alpha} + a(\alpha)|w|^2 \right) \right| \\
&= \left| \sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha}a(\alpha)|w|^2 + |d(\alpha)|^2|w|^4} - \left(\sqrt{\alpha} + a(\alpha)|w|^2 \right) \right| \\
&= \left| \frac{(|d(\alpha)|^2 - (a(\alpha))^2)|w|^4}{\sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha}a(\alpha)|w|^2 + |d(\alpha)|^2|w|^4} + \sqrt{\alpha} + a(\alpha)|w|^2} \right| \\
&\leq \frac{(|d(\alpha)|^2 - (a(\alpha))^2)|w|^4}{\sqrt{400\alpha}|w|^2 + 2\sqrt{\alpha}a(\alpha)|w|^2 + 20\sqrt{\alpha}|w| + a(\alpha)|w|} \\
&\leq \frac{(|d(\alpha)|^2 - (a(\alpha))^2)}{\sqrt{400\alpha - 2} + 20\alpha - 1} \cdot |w|^3 \leq \frac{(|d(\alpha)|^2 - (a(\alpha))^2)}{19\sqrt{\alpha} + 18\alpha} \cdot |w|^3 \\
&\leq \frac{(|d(\alpha)|^2 - (a(\alpha))^2)}{37\alpha} \cdot |w|^3 = \frac{(\alpha^4 + 3\alpha^3 - 12\alpha^2 + 20\alpha - 4)^2}{16 \cdot 37\alpha^6(4\alpha - 1)(\alpha^2 + 4\alpha - 1)^2} \cdot |w|^3.
\end{aligned}$$

Innen már megmutatható, hogy $|R_4(w, \alpha)| < 0,1|w|^3$. A (3.60) és (3.62) egyenlőtlenségekéből, valamint az iménti becslésből adódik, hogy bármely $(\alpha, w) \in H$ esetén

$$\begin{aligned}
& \left| \mu(\alpha)w + c(\alpha)w^2\bar{w} + R_2(w, \bar{w}, \alpha) \right| < |w| \left(\sqrt{\alpha} + a(\alpha)|w|^2 + R_4(w, \alpha) \right) + 4,6|w|^4 \\
&< \sqrt{\alpha}|w| - \frac{1}{4}|w|^3 + 4,7|w|^4 < |w| \left(1 - \frac{1}{4}|w|^2(1 - 4 \cdot 4,7|w|) \right) < |w| \quad (3.63)
\end{aligned}$$

fennállnak, ha $|w| < \frac{1}{20} = \min \left\{ \frac{1}{20}, \frac{1}{4 \cdot 4,7} \right\}$. Ebből következik, hogy bármely $\alpha \in [0,999, 1]$ esetén a $B_{1/20}$ környezet a (3.47) leképezés 0 fixpontjának vonzástartományában van.

4. lépés: A $K(\underline{\alpha}; \frac{1}{22})$ környezet az F_α leképezés $\underline{\alpha}$ fixpontjának vonzástartományában van

Már csak annyit kell megmutatnunk, hogy bármely $(x, y) \in K(\underline{\alpha}; 1/22)$ esetén a transzformációk végrehajtása után $|w| < \varepsilon_0 = \frac{1}{20}$ teljesül. Először is, ha $|z| < 1/21$, akkor a (3.49) becslésből következik, hogy $|w| = |h_\alpha^{-1}(z)| < \frac{1}{20}$ bármely $\alpha \in [0,999, 1]$ esetén. Ugyanakkor a (3.43) összefüggésből könnyen adódik, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $|u| < \varepsilon$, $|v| < \varepsilon$ esetén

$$|z(u, v, \alpha)| \leq \varepsilon \sqrt{\frac{\alpha(2 + \alpha)}{4\alpha - 1}}$$

teljesül, így ha

$$\varepsilon < \min_{\alpha \in [0,999, 1]} \sqrt{\frac{4\alpha - 1}{\alpha(2 + \alpha)}} \cdot \frac{1}{21}, \quad (3.64)$$

akkor $|z(u, v, \varepsilon)| < \frac{1}{21}$ is teljesül. Könnyű megmutatni, hogy az $\varepsilon = \frac{1}{22}$ eleget tesz a (3.64) feltételnek. Ezzel a 3.19. Tételt maradéktalanul bebizonyítottuk. \square

3.20. Következmény. Az F_α leképezés (α, α) fixpontja pontosan akkor lokálisan aszimptotikusan stabil, ha $\alpha \in (0, 1]$.

Bizonyítás. Linearizálással adódik, hogy $\alpha \in (0, 1)$ esetén az egyensúlyi helyzet lokálisan aszimptotikusan stabil, és $\alpha \in (1, \infty)$ esetén instabil. Ha $\alpha = 1$, akkor az F_α leképezést az előző bizonyításban látottak szerint a (3.47) normálalakra hozzuk, majd a (3.63) egyenlőtlenségből következik a lokális aszimptotikus stabilitás. \square

3.2.3. A trajektóriák vizsgálata, a 3.15. Tétel bizonyítása

Tekintsük az $\alpha \in [0,875, 1]$ paramétertartományt. Ahogy azt a 3.1.2. szakasz II. részében is tettük, a paraméterteret kis intervallumokra osztjuk, majd az alábbi algoritmussal és megbízható számítógépes eljárásokkal (intervallumaritmetika, gráfrepresentáció) megmutatjuk, hogy tetszőleges $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén létezik $n \in \mathbb{N}_0$, hogy $F_\alpha^n(x, y) \in K([\alpha]; \varepsilon(\alpha))$, ahol $\varepsilon(\alpha) = \frac{1}{37}$, ha $0,875 \leq \alpha < 0,999$ és $\varepsilon(\alpha) = \frac{1}{22}$, ha $\alpha \geq 0,999$.

```

1: procedure GLOBÁLIS_STABILITÁS_RICKER( $[\alpha], \delta$ )
2:    $[S] \leftarrow S^{(\alpha)}$  ▷ a 3.16. Tételből
3:    $[U] \leftarrow K([\alpha]; \varepsilon(\alpha))$  ▷ a 3.18. és 3.19. Tételekből
4:    $\mathcal{V} \leftarrow \text{Particionál}([S], \delta)$  ▷  $\mathcal{V}$  az  $[S]$  egy partíciója,  $\text{diam}(\mathcal{V}) \leq \delta$ 
5:   repeat
6:      $\mathcal{E} \leftarrow \text{Átmenetek}(\mathcal{V}, F_{[\alpha]})$  ▷ a  $\mathcal{V}$  csúcsok közti átmenetek  $F_{[\alpha]}$  mellett
7:      $\mathcal{G} \leftarrow \text{Gráf}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  ▷  $\mathcal{G}$  az  $F_{[\alpha]}$  egy gráfrepresentációja
8:      $T \leftarrow \{v : v \text{ egy irányított körön van}\}$ 
9:     for all  $v \in \mathcal{V}$  do
10:       if  $v \notin T$  or  $v \subseteq [U]$  or  $F_{[\alpha]}(v) \subseteq [U]$  then
11:          $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} - v$  ▷ A  $v$  csúcsot elhagyjuk  $\mathcal{G}$ -ből
12:       end if
13:     end for
14:      $\delta \leftarrow \delta/2$ 
15:      $\mathcal{V} \leftarrow \text{Particionál}(|\mathcal{V}|, \delta)$ 
16:   until  $|\mathcal{V}| = \emptyset$ 
17: end procedure

```

A számításokat a Szegedi Tudományegyetem NIIF HPC központjának klaszterén futtattuk több szálon. A program sikeresen lefutott minden paraméterszeletre. A 3.1. táblázat a számítások memória- és időigényéről, míg a 3.2. táblázat a reprezentáló gráf csúcsainak méretéről (iterációnként feleződik az élhossz), valamint a csúcsok és élek maximális számáról tartalmaz információkat.

A 3.15. Tétel bizonyítása. A Globális_Stabilitás_Ricker program sikeresen lefutott az $\alpha \in [0,875, 1]$ paramétertartomány minden szeletére (az outputokat lásd [75, Program]). Ezt összevetve a 3.16., 3.18. és 3.19. Tételekkel, valamint a 3.20. Következménnyel és [63] eredményeivel adódik a tétel állítása. \square

3.1. táblázat. A program által használt erőforrások.

Paraméter	Szelet mérete	CPU-k száma	Max. memória	CPU-idő
[0,875, 0,95]	10^{-3}	48	3,05 GB	52,3s
[0,95, 0,99]	10^{-4}	48	3,07 GB	22m 5,9s
[0,99, 1]	10^{-5}	20	65,3 GB	1800m 37,1s

3.2. táblázat. A számítások bonyolultsága.

Paraméter	[S]	Iterációk (db)	Csúcsok (db)	Élek (db)
[0,875, 0,876]	$[2,072 \cdot 10^{-4}, 5,049031]^2$	13	242	1.676
[0,999, 0,99901]	$[2,928 \cdot 10^{-6}, 7,369087]^2$	27	729.528	4.193.329
[0,99999, 1]	$[2,822 \cdot 10^{-6}, 7,389015]^2$	33	3.105.304	118.751.916

3.3. Nyitott kérdések

Az előző két részben látott bizonyításokban bemutatott módszer segítségével több hasonló probléma megoldására kínálkozik lehetőség a másodrendű differenciaegyenletek körében. Hogy egy konkrét példát említsünk, az

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_{n-1})$$

Maynard Smith-féle modell globális stabilitása még nincs bebizonyítva az $1 < a \leq 2$ esetben, és ez a módszer alkalmasnak ígérkezik a probléma vizsgálatára. Az érdeklődő olvasónak a témában Aronson és szerzőtársai [2] dolgozatát ajánljuk.

Távlati céljaink között szerepel a bizonyítás során szükséges kompakt, a trajektóriákat bevonzó pozitív invariáns halmaz (lásd 3.8. és 3.16. Tételek) konstruálása általánosabb feltételek mellett, továbbá a vonzástartományhoz tartozó kis környezetek (lásd 3.13., valamint 3.18. és 3.19. Tételek) megadásának minél magasabb szintű algoritmizálása.

Célunk továbbá, hogy a módszert alkalmazzuk magasabb dimenziós differenciaegyenletekre is. Megjegyezzük, hogy a Dénes és Makay által fejlesztett [16], differenciaegyenletek globális attraktorainak és azok vonzástartományainak – numerikus módszerekkel történő – közelítésére és szemléltetésére szolgáló számítógépes alkalmazás kiváló lehetőséget nyújt a globális viselkedéssel kapcsolatos sejtések megfogalmazására, megerősítésére. Levin és May sejtése továbbra is nyitott a (3.38) egyenletre vonatkozóan a $d \geq 2$ esetben, ahogy a (3.1) egyenlet nagyobb késleltetésű analogonjának globális stabilitására sem adott még senki olyan feltételt, mely szükséges és elegendő lenne. Ezekhez először meg kell konstruálni egy kétdimenziós invariáns sokaságot (a centrális sokaságot), majd a becsléseket ezen végezni. Ez számos újabb nehézséget vet föl. Egyfelől becslést kell adni a sokaság méretére, másrészt a dimenzió növelésével egyidejűleg a

gráfrepresentációs eljárások memóriaigénye exponenciálisan nő. Távlati célunk a módszer végtelen dimenziós problémákra való alkalmazása. Ha ezt sikerül megvalósítani, olyan problémák megoldása kerülhet elérhető közelségbe, mint a híres Wright-sejtés [68] és az általánosított Wright-sejtés [34].

A Wright-egyenlet a következőképpen írható:

$$\dot{x}(t) = -\alpha(e^{x(t-1)} - 1), \quad (3.65)$$

ahol $\alpha > 0$ paraméter. Wright bebizonyította, hogy a zéró egyensúlyi helyzet globálisan attraktív, ha $\alpha \leq \frac{3}{2}$, és úgy sejtette, hogy $\alpha < \frac{\pi}{2}$ esetén is az, ahol aztán egy periodikus pálya születik. Ennek igazolásában Bánhelyi és szerzőtársai [6] tettek előrelépéseket, noha a sejtést nem sikerült igazolniuk. Krisztin [34] dolgozatában megfogalmazta az úgynevezett általánosított Wright-sejtést, miszerint bármely rögzített $\alpha > 0$ esetén a globális attraktor megegyezik a zéró egyensúlyi helyzet lokális instabil sokaságából induló – a megoldásoperátor által indukált – trajektóriák összességének lezártjával.

A Wright-egyenlettel kapcsolatos Jones sejtése is [30]. Ő azt állította, hogy bármely $\alpha > \frac{\pi}{2}$ esetén (időeltolástól eltekintve) pontosan egy lassan oszcilláló periodikus megoldása van a (3.65) egyenletnek. Ennek bizonyításában Lessard [40] tett jelentős lépéseket. Az ő eredményeit kombinálva a mi módszerünkkel lehetőség nyílt ennek a bizonyítására is. A nehézséget itt többek között az fogja jelenteni, hogy a módszert úgy kell módosítani, hogy azzal egy periodikus megoldás vonzáskörnyezete is konstruálható legyen az egyensúlyi helyzet vonzáskörnyezete mellett. Ehhez azonban sok eszközre lesz szükség, úgymint diszkrét Ljapunov-függvények elmélete, instabil sokaság méretének analitikus becslése és lassan oszcilláló pályák összességének kétdimenziós reprezentálása.

Összefoglalás

A disszertációban neuronhálózatokat modellező késleltetett differenciál- és differencia-egyenletekkel, valamint egy diszkrét idejű késleltetett populációdinamikai modellel foglalkozunk. A dolgozatban periodikus megoldások létezésére és egyértelműségére, valamint egyensúlyi helyzetek globális aszimptotikus stabilitására adunk szükséges és elegendő feltételeket a paraméterek függvényében. Az adott tételek hozzájárulnak a modellek globális dinamikájának jobb megértéséhez.

Az értekezés 1. fejezetében egy rövid bevezető és a dolgozat áttekintése után ismertetjük az általunk használt legfontosabb jelöléseket és fogalmakat.

A 2. fejezetben az alábbi, neuronhálózatokat modellező késleltetett differenciálegyenlet-rendszert vizsgáljuk:

$$\begin{aligned} \dot{x}^0(t) &= -\alpha x^0(t) \pm f_\beta(x^1(t - \tau_0)), \\ &\vdots \\ \dot{x}^{n-1}(t) &= -\alpha x^{n-1}(t) \pm f_\beta(x^n(t - \tau_{n-1})), \\ \dot{x}^n(t) &= -\alpha x^n(t) \pm f_\beta(x^0(t - \tau_n)), \end{aligned}$$

ahol x^j a j -edik neuron elektromos potenciálját jelöli, és $\alpha > 0$, $\tau_j \geq 0$ paraméterek. A τ_j késleltetés itt az elektromos jel terjedésének véges sebességéből adódik. Az $f_\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ visszacsatolási függvényre vagy $f_\beta(x) = \frac{\beta}{2}(|x+1| - |x-1|)$ teljesül vagy f_β folytonosan differenciálható, páratlan, szigorúan monoton növekvő, továbbá $f'_\beta(0) = \beta$, és $\xi \mapsto \frac{\xi f'_\beta(\xi)}{f_\beta(\xi)}$ szigorúan monoton csökkenő a $(0, \infty)$ intervallumon.

Az előbbi visszacsatolási függvények osztálya a leggyakrabban használt visszacsatolás bizonyos mesterséges neuronhálózatok, úgynevezett celluláris neurális hálók elméletében, amelyek fontos szerepet játszanak a mesterséges intelligencia (például képfeldolgozás, optimalizálási problémák) kutatásában [12]. Ezekben a modellekben a neuronok (cellák) egy d dimenziós rács rácspontjaiban helyezkednek el és a szomszédos rácspontokon lévő neuronok vannak összeköttetésben (a széleken valamilyen peremfeltétellel). A fenti modell egy egydimenziós rácson elhelyezett celluláris neurális modellnek felel meg, periodikus peremfeltétellel. Erre a visszacsatolásra úgy is fogunk hivatkozni, mint a „szakaszonként lineáris eset”.

Az utóbbi, úgynevezett szigmoid típusú visszacsatolások a (valódi) idegsejthálózatok modellezésében játszanak fontos szerepet (lásd [26, 69]). Ezen függvényosztályba tartoznak a gyakran alkalmazott tanh és arctg függvények is.

A fejezetben a fenti egyenletrendszer nemkonstans periodikus megoldásaival foglalkozunk, amelyek kiemelt fontossággal bírnak a neuronhálózatok elméletében. Mallet-Paret és Sell [48] munkájának köszönhetően a periodikus megoldások kategorizálhatók az előjelváltásaik közti távolságok nagysága szerint, a [47] alapvető fontosságú dolgozatukban pedig egy Poincaré–Bendixson-típusú tételt bizonyítottak. Eredményeik összességében a miénknél általánosabb alakú rendszerekre is igazak, de a Poincaré–Bendixson-típusú tételükben a visszacsatolási függvény(ek) differenciálhatóságát és szigorú monotonitását feltételezik, és ezen tulajdonságok fontos szerepet is kapnak a levezetések során. A szakaszonként lineáris visszacsatolásunk esetében ezek a feltételek sérülnek, így ez a fontos eszköz nem áll rendelkezésünkre a vizsgálatunk során.

A 2.4. részben az $n = 0$ esetet vizsgáljuk. Ekkor a szigmoid esetben a globális attraktorról egy nagyon részletes kép áll rendelkezésre Krisztin, Walther és Wu [37] monográfiájának, valamint [8, 32, 33, 36] cikkeknek köszönhetően. Speciálisan, ismertek a periodikus pályák létezésére és egyértelműségére vonatkozó szükséges és elegendő feltételek (α , β és τ függvényében). Ebben a részben ezen eredmények analogonjait bizonyítjuk a szakaszonként lineáris típusú visszacsatolásra. Természetesen adódik a gondolat, hogy ezt a szakaszonként lineáris függvényt közelítsük a sima függvényosztályban lévő függvényekkel, majd az azokra vonatkozó eredményekből vonjunk le következtetéseket. A globális attraktor azonban csak alulról félig folytonos, így ez a megközelítés nem alkalmas arra, hogy unicitási vagy nemlétezési eredményeket bizonyítsunk vele.

Az

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + f_{\beta}(x(t - \tau))$$

egyenlet nemkonstans periodikus x megoldása lassan oszcilláló, ha bármely τ hosszúságú intervallumon legalább egy, de legfeljebb két előjelváltása van. A szigmoid esetben Krisztin és Walther [36] eredményeiből, a szakaszonként lineáris esetben pedig a 2.4. részben adott analóg tételekből tudjuk, hogy ha létezik lassan oszcilláló periodikus megoldás, akkor az rögzített paraméterek mellett és időeltolástól eltekintve egyértelműen meghatározott. Így definiálhatjuk annak periódusát, mint a késleltetés függvényét. A rész végén bebizonyítjuk, hogy a periódusfüggvény (rögzített α és β mellett) a késleltetésnek monoton nemcsökkenő függvénye, és hogy Lipschitz-folytonos a 2 konstanssal. Ezt az eredményt elsősorban a 2.5. részben tudjuk kamatoztatni.

A 2.5. részben az $n \geq 1$ esettel foglalkozunk mindkét típusú visszacsatolás mellett. A rész fő eredményei, hogy szükséges és elegendő feltételeket adunk a relatíve gyorsabban oszcilláló periodikus megoldások létezésére és egyértelműségére vonatkozóan, valamint elegendő feltételeket fogalmazunk meg a lassabban oszcilláló periodikus

megoldások létezésére illetve nemlétezésére. A bizonyítások során felhasználjuk a 2.4. rész mindkét típusú visszacsatolásra vonatkozó létezési és unicitási tételeit. Itt periódusfüggvényre kapott eredményeinknek is fontos szerep jut, ugyanis a rendszer periodikus megoldásaihoz társítható az $\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + f_\beta(x(t - \tau))$ egyenlet egy lassan oszcilláló periodikus megoldása, amelynek késleltetése és periódusa közt egy bizonyos összefüggésnek teljesülnie kell. Ennek az összefüggésnek a fennállására tudunk feltételeket adni a periódusfüggvényre kapott eredmények segítségével. A kapott tételek Yi, Chen és Wu [11,71] eredményeinek egy általánosítását adják. A szakaszonként lineáris esetben nehézséget okoz, hogy ekkor a visszacsatolás nem mindenhol differenciálható és nem szigorúan monoton, ezért a megoldásoperátor nem sima és nem injektív, és így a Poincaré–Bendixson-típusú tétel és ehhez köthető korábbi eredmények nem alkalmazhatók közvetlenül.

A 3. fejezetben két másodrendű, paraméteres differenciaegyenlet egyensúlyi helyzetének globális aszimptotikus stabilitására adunk szükséges és elegendő feltételt a paraméterek függvényében. A 3.1. részben vizsgálatunk tárgya az alábbi differenciaegyenlet:

$$x_{n+1} = mx_n - \alpha \tanh(x_{n-1}),$$

ahol $(\alpha, m) \in \mathbb{R}^2$. A fenti egyenletre gondolhatunk úgy, mint egy diszkrét idejű késleltetett neuronmodellre, ugyanakkor egy egyszerű transzformációjával egy Clark-típusú populációdinamikai modellt nyerhetünk [13].

A 3.2. részben az alábbi késleltetett Ricker-típusú populációdinamikai modellt vizsgáljuk:

$$x_{n+1} = x_n e^{\alpha - x_n - d},$$

ahol x_n egy adott területen élő populációjának méretét jelöli az n -edik időpillanatban, az α pozitív paraméter, és $d > 0$ az önszabályozó rendszer késleltetett visszacsatolását fejezi ki. A modellt Ricker állította fel 1954-ben [59] (akkor még késleltetés nélkül) és azóta az egyik legelterjedtebb populációdinamikai modell. Levin és May 1976-ban megfogalmazott egy sejtést a fenti modellt is magába foglaló késleltetett differenciaegyenletek egy osztályára, miszerint a pozitív egyensúlyi helyzet lokális aszimptotikus stabilitása maga után vonja annak globális attraktivitását (lásd [41]). Mi a $d = 1$ esettel foglalkozunk. Erre vonatkozóan az eddigi legjobb eredmény Tkachenko és Trofimchuk [63] általános tételéből következik, nevezetesen hogy $\alpha \in (0, 0,875)$ esetén a pozitív egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabil. A 3.2. részben igazoljuk Levin és May sejtését a $d = 1$ esetben, vagyis hogy a pozitív egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabil, ha $\alpha \in (0, 1]$ és $d = 1$.

A globális aszimptotikus stabilitás bizonyítása a két egyenlet esetében hasonló módon történik. Különböző, számítógéppel végzett megbízható számításokat ötvözzünk analitikus eszközökkel. A bizonyítás nagy vonalakban abból áll, hogy a Neimark–Sacker-

bifurkáció (rezonáns) normálalakját felhasználva, annak együttthatóira a paraméterekben egyenletes becsléseket adunk analitikus eszközök és intervallumaritmetika segítségével. Ezután meg tudjuk adni az egyensúlyi helyzet egy olyan paramétértől független környezetét, amelyben az egyensúlyi helyzet vonzása érvényesül (minden olyan paraméter esetén, amikor az egyensúlyi helyzet lokálisan stabil). Ezt követően intervallumaritmetikai módszerek segítségével megmutatjuk, hogy a fázistér bármely pontjából indítva a megoldást, a trajektória belép ebbe a kis környezetbe. Tudomásunk szerint ez a fajta megközelítés új és bízunk benne, hogy egy hatékony módszer fejlődik ki belőle a differenciaegyenletek, közönséges differenciálegyenletek – és idővel – a késleltetett differenciálegyenletek egyensúlyi helyzeteinek és periodikus pályáinak vizsgálata terén.

A fejezet végén megfogalmazzuk néhány, a témakörhöz köthető nyitott kérdést, valamint ismertetjük az ezekkel kapcsolatos közelebbi és távlati céljainkat.

Felhívjuk a figyelmet, hogy a 3.1.2. szakasz II. részében, valamint a 3.2.3. szakaszban a bizonyításban során használt intervallumaritmetikai és gráfrepresentációs technikákat jelen értekezésben nem részletezzük, azok ugyanis Bartha Ferenc eredményeit képezik. Az érdeklődő olvasó megtalálhatja a módszerek részletes leírását a [7] dolgozatban és az abban található hivatkozásokban.

Az értekezés a szerző alábbi publikációin alapul:

- Á. GARAB, T. KRISZTIN. The period function of a delay differential equation and an application. *Period. Math. Hungar.*, 63(2), 173–190, 2011.
- Á. GARAB. Unique periodic orbits of a delay differential equation with piecewise linear feedback function. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(6), 2369–2387, 2013.
- F. A. BARTHA, Á. GARAB, T. KRISZTIN. Local stability implies global stability for the 2-dimensional Ricker map. *J. Difference Equ. Appl.*, 19(12), 2043–2078, 2013.
- F. A. BARTHA, Á. GARAB. Necessary and sufficient condition for the global stability of a delayed discrete-time single neuron model. *J. Comput. Dyn.*, közlésre elfogadva.

Summary

The thesis investigates delayed differential and difference equations modelling neural networks and a discrete time population dynamical model. We give necessary and sufficient conditions in terms of the parameters on the existence and uniqueness of periodic solutions and global stability. The obtained theorems contribute to the better understanding of the global behaviour of the models.

Chapter 1 starts with a short introduction, then we give the outline of the thesis and the most important definitions and notations used.

In Chapter 2, we consider the neural network modelled by the following system of delayed differential equations:

$$\begin{aligned} \dot{x}^0(t) &= -\alpha x^0(t) \pm f_\beta(x^1(t - \tau_0)), \\ &\vdots \\ \dot{x}^{n-1}(t) &= -\alpha x^{n-1}(t) \pm f_\beta(x^n(t - \tau_{n-1})), \\ \dot{x}^n(t) &= -\alpha x^n(t) \pm f_\beta(x^0(t - \tau_n)), \end{aligned}$$

where x^j represents the electric potential of the j th neuron, and $\alpha > 0$ and $\tau_j \geq 0$ are parameters. The delay τ_j is present due to the finite propagation velocity of the electric signal. The feedback function $f_\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is either defined by $f_\beta(x) = \frac{\beta}{2}(|x+1| - |x-1|)$ or f_β is a continuous, strictly increasing, odd function having $f'_\beta(0) = \beta$, and possessing the property that the map $\zeta \mapsto \frac{\zeta f'_\beta(\zeta)}{f_\beta(\zeta)}$ is strictly decreasing on $(0, \infty)$.

The former function is the most common feedback function in the theory of certain artificial neural networks, the so-called cellular neural networks, which play an important role in the the research of artificial intelligence (e.g. solving image processing and optimization problems [12]). In these models, neurons (cells) are put on a d -dimensional grid and neighbouring cells are connected (with some conditions on the boundary). The above model corresponds to a 1-dimensional cellular neural network with periodic boundary condition. We shall also refer the case of this type of feedback function as the “piecewise linear case”.

The latter, so-called sigmoid type of feedback functions are widely used in models of (real) neural networks [26, 69]. The most common examples of sigmoid functions are the tangent hyperbolic and the inverse tangent functions.

In Chapter 2, non-constant periodic solutions of the above system of delay differential equations are investigated. Periodic solutions are of great importance in neural networks. According the pioneering work of Mallet-Paret and Sell [48], periodic solutions can be characterized by the distance of two consecutive zeros of them. In their fundamental paper [47] they also prove a Poincaré–Bendixson type theorem for similar systems. Although basically their results hold for more general systems than ours, the feedback functions are assumed to be smooth and strictly monotonic and these hypotheses play an important role in their proofs. As these hypotheses are not satisfied in our piecewise linear case, hence their theory cannot be applied directly.

The case $n = 0$ is considered in Section 2.4. In the sigmoid case, a very detailed picture of the global attractor is available due to the monograph of Krisztin, Walther and Wu [37] and to a sequence of papers [8, 32, 33, 36]. In particular, necessary and sufficient conditions in terms of the parameters α , β and τ are known for the existence and uniqueness of periodic solutions. The section is devoted to prove analogous theorems in the piecewise linear case. It seems reasonable to approximate our piecewise linear feedback function with functions from the sigmoid class, but the problem is that the global attractor is only upper semi-continuous, hence this approach cannot provide uniqueness and non-existence results.

We say that a non-constant periodic solution of equation

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + f_{\beta}(x(t - \tau))$$

is slowly oscillating if it has at least one but at most two sign changes on any interval of length τ . For fixed parameters, uniqueness of such periodic solutions is guaranteed (up to translation of the time variable) due to the results of Krisztin and Walther [36] in the sigmoid case and to the analogous results given in Section 2.4 for the piecewise linear case. Thus we may define the period of this solution as a function of the delay τ . At the end of the section we prove that for α and β fixed, this period function is monotonically non-decreasing and Lipschitz continuous with Lipschitz constant 2. This result will be particularly important in Section 2.5.

In Section 2.5, we investigate the case when $n \geq 1$ with both types of feedback function. The main result of the section is that we give necessary and sufficient conditions on the existence and uniqueness of relatively quickly oscillating periodic solutions and we formulate sufficient conditions on the existence and non-existence of relatively slowly oscillating periodic solutions. In the proofs, we make use of the existence and uniqueness results obtained in Section 2.4. It turns out that there is a bijection between the non-constant periodic solutions of the system and the slowly oscillating periodic solutions of equation $\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + f_{\beta}(x(t - \tau))$ that have a certain connection between the delay and the period. Hence the results on the period function will have a key role

in the investigation of the periodic solutions of the system. The main results of the section give a generalization of the theorems of Yi, Chen and Wu [11, 71]. A technical difficulty in the piecewise linear case is that the feedback function is neither smooth, nor strictly monotonic, therefore the solution operator is neither differentiable everywhere nor injective and for this reason the Poincaré–Bendixson type theorem of Mallet-Paret and Sell [47] and several other connected theorems cannot be applied directly.

In Chapter 3, we give necessary and sufficient conditions in terms of the parameters of the global asymptotic stability of the equilibrium of two second order difference equations. In Section 3.1, the difference equation

$$x_{n+1} = mx_n - \alpha \tanh(x_{n-1})$$

is considered, where $(\alpha, m) \in \mathbb{R}^2$ are parameters. This equation can be interpreted as a discrete-time delayed neural model, but it can be transformed to a Clark type population dynamical model [13] as well.

Section 3.2 is devoted to the following Ricker type population model:

$$x_{n+1} = x_n e^{\alpha - x_n - d},$$

where x_n denotes the size of the population of a species living in a certain area at the discrete time instance n , α is a positive parameter, and $d > 0$ represents the explicit delay in the self-regulatory system. The model was first formulated by Ricker [59] in 1954 (at that time, without delay), and since then it became one of the most famous population dynamical model. In 1976, Levin and May [41] formulated a conjecture on some population dynamical models, including the above one, that whenever the positive equilibrium of such an equation is locally asymptotically stable, it is globally asymptotically stable as well. We consider the case when $d = 1$. To our knowledge, the best result regarding the conjecture was due to the general theorem of Tkachenko és Trofimchuk [63], that is, if $\alpha \in (0, 0.875)$, then the positive equilibrium is globally asymptotically stable. The main result of the section is the proof of the conjecture in the case when $d = 1$, that is we prove that the positive equilibrium is globally asymptotically stable if $\alpha \in (0, 1]$ and $d = 1$.

The proof of the global asymptotic stability is done similarly for the two equations. We combine different validated computer aided calculations with analytical tools. The essence of the proof is as follows. We transform the equation to its (resonant) Neimark–Sacker normal form and give uniform estimations on its coefficients using analytical and interval arithmetical tools. Then we are able to construct a neighbourhood of the equilibrium which is independent of the parameters and belongs to the basin of attraction of the fixed point (for all parameter values for which the fixed point is locally stable). After that we prove by interval arithmetical tools that any trajectory starting from any point

of the phase space enters this small neighbourhood. As far as we know, this approach is new in the literature and we hope that it will become an efficient tool in the investigation of the global stability of equilibrium points and periodic orbits of difference and differential equations and – in time – in delay difference equations too.

At the end of the chapter we formulate some open problems and directions for possible future research related to the topic.

We note that we do not give the details of the interval arithmetic and graph representation techniques used in the proofs and presented in Part II of Subsection 3.1.2 and in Subsection 3.2.3, as they are the results of Ferenc Bartha. Readers interested in those methods are referred to the paper [7] and the references therein.

The dissertation is based on the following papers of the author:

- Á. GARAB, T. KRISZTIN. The period function of a delay differential equation and an application. *Period. Math. Hungar.*, 63(2), 173–190, 2011.
- Á. GARAB. Unique periodic orbits of a delay differential equation with piecewise linear feedback function. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(6), 2369–2387, 2013.
- F. A. BARTHA, Á. GARAB, T. KRISZTIN. Local stability implies global stability for the 2-dimensional Ricker map. *J. Difference Equ. Appl.*, 19(12), 2043–2078, 2013.
- F. A. BARTHA, Á. GARAB. Necessary and sufficient condition for the global stability of a delayed discrete-time single neuron model. *J. Comput. Dyn.*, accepted.

Irodalomjegyzék

- [1] G. ALEFELD. *Introduction to interval analysis*. *SIAM Rev.*, 53(2), 380–381, 2011.
- [2] D. G. ARONSON, M. A. CHORY, G. R. HALL, AND R. P. MCGEHEE. Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane: a computer-assisted study. *Comm. Math. Phys.*, 83(3), 303–354, 1982.
- [3] K. L. BABCOCK AND R. M. WESTERVELT. Dynamics of simple electronic neural networks. *Phys. D*, 28(3), 305–316, 1987.
- [4] N. BACAËR. *A short history of mathematical population dynamics*. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.
- [5] P. BALDI AND F. A. ATIYA. How delays affect neural dynamics and learning. *IEEE T. Neural Networ.*, 5, 612–621, 1994.
- [6] B. BÁNHÉLYI, T. CSENDES, T. KRISZTIN, AND A. NEUMAIER. Global attractivity of the zero solution for Wright’s equation. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 13(1), 537–563, 2014.
- [7] F. A. BARTHA, Á. GARAB, AND T. KRISZTIN. Local stability implies global stability for the 2-dimensional ricker map. *J. Difference Equ. Appl.*, 19(12), 2043–2078, 2013.
- [8] Y. CAO. Uniqueness of periodic solution for differential delay equations. *J. Differential Equations*, 128(1), 46–57, 1996.
- [9] W.-H. CHEN, X. LU, AND D.-Y. LIANG. Global exponential stability for discrete-time neural networks with variable delays. *Physics Letters A*, 358(3), 186–198, 2006.
- [10] Y. CHEN AND J. WU. Existence and attraction of a phase-locked oscillation in a delayed network of two neurons. *Differential Integral Equations*, 14(10), 1181–1236, 2001.
- [11] Y. CHEN, J. WU, AND T. KRISZTIN. Connecting orbits from synchronous periodic solutions in phase-locked periodic solutions in a delay differential system. *J. Differential Equations*, 163(1), 130–173, 2000.
- [12] L. O. CHUA AND T. ROSKA. *Cellular neural networks and visual computing: foundations and applications*. Cambridge University Press, 2002.
- [13] C. W. CLARK. A delayed-recruitment model of population dynamics, with an application to baleen whale populations. *J. Math. Biol.*, 3(3–4), 381–391, 1976.
- [14] M. DELLNITZ AND A. HOHMANN. A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors. *Numer. Math.*, 75(3), 293–317, 1997.

- [15] M. DELLNITZ, A. HOHMANN, O. JUNGE, AND M. RUMPF. Exploring invariant sets and invariant measures. *Chaos*, 7(2), 221–228, 1997.
- [16] A. DÉNES AND G. MAKAY. Attractors and basins of dynamical systems. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, pages 1–11, No. 20, 2011.
- [17] O. DIEKMANN, S. A. VAN GILS, S. M. VERDUYN LUNEL, AND H.-O. WALTHER. *Delay equations*, volume 110 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1995. Functional, complex, and nonlinear analysis.
- [18] H. A. EL-MORSHEDY AND E. LIZ. Convergence to equilibria in discrete population models. *J. Difference Equ. Appl.*, 11(2), 117–131, 2005.
- [19] Z. GALIAS. Rigorous investigation of the Ikeda map by means of interval arithmetic. *Nonlinearity*, 15(6), 1759–1779, 2002.
- [20] M. GILLI. Strange attractors in delayed cellular neural networks. *IEEE transactions on circuits and systems. 1, Fundamental theory and applications*, 40(11), 849–853, 1993.
- [21] K. GOPALSAMY AND X. Z. HE. Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays. *Phys. D*, 76(4), 344–358, 1994.
- [22] S. GUO, L. HUANG, AND L. WANG. Exponential stability of discrete-time Hopfield neural networks. *Comput. Math. Appl.*, 47(8-9), 1249–1256, 2004.
- [23] I. GYŐRI AND F. HARTUNG. Stability analysis of a single neuron model with delay. *J. Comput. Appl. Math.*, 157(1), 73–92, 2003.
- [24] J. K. HALE AND S. M. VERDUYN LUNEL. *Introduction to functional-differential equations*, volume 99 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [25] R. L. HARVEY. *Neural network principles*. Prentice-Hall, Inc., 1994.
- [26] S. HAYKIN. *Neural networks: a comprehensive foundation*. Prentice Hall PTR, 1999.
- [27] J. G. SIEK, L.-Q. LEE, AND A. LUMSDAINE, 2002. The Boost Graph Library User Guide and Reference Manual (With CD-ROM).
- [28] V. JIMÉNEZ LÓPEZ. A counterexample on global attractivity for Clark’s equation. Liz, Eduardo (ed.) et al., Proceedings of the workshop on future directions in difference equations, Vigo, Spain, June 13–17, 2011. Vigo: Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo. Colección Congresos 69, 97-105 (2011)., 2011.
- [29] V. JIMÉNEZ LÓPEZ AND E. PARREÑO. L.A.S. and negative Schwarzian derivative do not imply G.A.S. in Clark’s equation. Personal communication.

- [30] G. S. JONES. The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)\{1+f(x)\}$. *J. Math. Anal. Appl.*, 5, 435–450, 1962.
- [31] V. L. KOCIĆ AND G. LADAS. *Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications*, volume 256 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.
- [32] T. KRISZTIN. Periodic orbits and the global attractor for delayed monotone negative feedback. In *Proceedings of the 6th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations (Szeged, 1999)*, Proc. Colloq. Qual. Theory Differ. Equ., pages 1–12, No. 15. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Szeged, 2000.
- [33] T. KRISZTIN. Unstable sets of periodic orbits and the global attractor for delayed feedback. In *Topics in functional differential and difference equations (Lisbon, 1999)*, volume 29 of *Fields Inst. Commun.*, pages 267–296. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [34] T. KRISZTIN. Global dynamics of delay differential equations. *Period. Math. Hungar.*, 56(1), 83–95, 2008.
- [35] T. KRISZTIN AND G. VAS. Large-amplitude periodic solutions for differential equations with delayed monotone positive feedback. *J. Dynam. Differential Equations*, 23(4), 727–790, 2011.
- [36] T. KRISZTIN AND H.-O. WALTHER. Unique periodic orbits for delayed positive feedback and the global attractor. *J. Dynam. Differential Equations*, 13(1), 1–57, 2001.
- [37] T. KRISZTIN, H.-O. WALTHER, AND J. WU. *Shape, smoothness and invariant stratification of an attracting set for delayed monotone positive feedback*, volume 11 of *Fields Institute Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [38] Y. A. KUZNETSOV. *Elements of applied bifurcation theory*, volume 112 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [39] G. LADAS. On the recursive sequence $x_{n+1} = (\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}) / (A + Bx_n + Cx_{n-1})$. *J. Differ. Equations Appl.*, 1(3), 317–321, 1995.
- [40] J.-P. LESSARD. Recent advances about the uniqueness of the slowly oscillating periodic solutions of Wright’s equation. *J. Differential Equations*, 248(5), 992–1016, 2010.
- [41] S. A. LEVIN AND R. M. MAY. A note on difference-delay equations. *Theoret. Population Biology*, 9(2), 178–187, 1976.

- [42] E. LIZ. Local stability implies global stability in some one-dimensional discrete single-species models. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 7(1), 191–199 (electronic), 2007.
- [43] E. LIZ. Stability of non-autonomous difference equations: simple ideas leading to useful results. *J. Difference Equ. Appl.*, 17(2), 203–220, 2011.
- [44] E. LIZ, V. TKACHENKO, AND S. TROFIMCHUK. Global stability in discrete population models with delayed-density dependence. *Math. Biosci.*, 199(1), 26–37, 2006.
- [45] S. LUZZATTO AND P. PILARCZYK. Finite resolution dynamics. *Found. Comput. Math.*, 11(2), 211–239, 2011.
- [46] J. MALLET-PARET AND R. D. NUSSBAUM. Global continuation and asymptotic behaviour for periodic solutions of a differential-delay equation. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 145, 33–128, 1986.
- [47] J. MALLET-PARET AND G. R. SELL. The Poincaré-Bendixson theorem for monotone cyclic feedback systems with delay. *J. Differential Equations*, 125(2), 441–489, 1996.
- [48] J. MALLET-PARET AND G. R. SELL. Systems of differential delay equations: Floquet multipliers and discrete Lyapunov functions. *J. Differential Equations*, 125(2), 385–440, 1996.
- [49] W. S. MCCULLOCH AND W. PITTS. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bull. Math. Biophys.*, 5, 115–133, 1943.
- [50] O. MERINO. Global attractivity of the equilibrium of a difference equation: an elementary proof assisted by computer algebra system. *J. Difference Equ. Appl.*, 17(1), 33–41, 2011.
- [51] S. MOHAMAD AND K. GOPALSAMY. Exponential stability of continuous-time and discrete-time cellular neural networks with delays. *Appl. Math. Comput.*, 135(1), 17–38, 2003.
- [52] R. E. MOORE. *Methods and applications of interval analysis*, volume 2 of *SIAM Studies in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pa., 1979.
- [53] N. S. NEDIALKOV, K. R. JACKSON, AND G. F. CORLISS. Validated solutions of initial value problems for ordinary differential equations. *Appl. Math. Comput.*, 105(1), 21–68, 1999.
- [54] O. Ī. NENYA. On the global stability of a nonlinear difference equation. *Nelīnāri Koliv.*, 9(4), 525–534, 2006.

- [55] O. Ī. NENYA, V. Ī. TKACHENKO, AND S. Ī. TROFIMCHUK. On the global stability of a nonlinear difference equation. *Nelīnīnī Kolīv.*, 7(4), 487–494, 2004.
- [56] O. Ī. NENYA, V. Ī. TKACHENKO, AND S. Ī. TROFIMCHUK. On exact conditions for the global stability of a difference equation that satisfies the Yorke condition. *Ukrāin. Mat. Zh.*, 60(1), 73–80, 2008.
- [57] R. D. NUSSBAUM. Circulant matrices and differential-delay equations. *J. Differential Equations*, 60(2), 201–217, 1985.
- [58] K. PAKDAMAN, C. GROTTA-RAGAZZO, AND C. P. MALTA. Transient regime duration in continuous-time neural networks with delay. *Phys. Rev. E*, 58, 3623–3627, Sep 1998.
- [59] W. E. RICKER. Stock and recruitment. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, 11(5), 559–623, 1954.
- [60] H. L. SMITH. Monotone semiflows generated by functional-differential equations. *J. Differential Equations*, 66(3), 420–442, 1987.
- [61] H. L. SMITH. *Monotone dynamical systems*, volume 41 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995. An introduction to the theory of competitive and cooperative systems.
- [62] R. TARJAN. Depth-first search and linear graph algorithms. *SIAM J. Comput.*, 1(2), 146–160, 1972.
- [63] V. TKACHENKO AND S. TROFIMCHUK. A global attractivity criterion for nonlinear non-autonomous difference equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 322(2), 901–912, 2006.
- [64] W. TUCKER. A rigorous ODE solver and Smale’s 14th problem. *Found. Comput. Math.*, 2(1), 53–117, 2002.
- [65] W. TUCKER. *Validated numerics*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011. A short introduction to rigorous computations.
- [66] G. VAS. Asymptotic constancy and periodicity for a single neuron model with delay. *Nonlinear Anal.*, 71(5-6), 2268–2277, 2009.
- [67] D. WILCZAK. Uniformly hyperbolic attractor of the Smale-Williams type for a Poincaré map in the Kuznetsov system. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 9(4), 1263–1283, 2010. With online multimedia enhancements.
- [68] E. M. WRIGHT. A non-linear difference-differential equation. *J. Reine Angew. Math.*, 194, 66–87, 1955.

- [69] J. WU. *Introduction to neural dynamics and signal transmission delay*, volume 6 of *de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2001.
- [70] H. XU, Y. CHEN, AND K. L. TEO. Global exponential stability of impulsive discrete-time neural networks with time-varying delays. *Appl. Math. Comput.*, 217(2), 537–544, 2010.
- [71] T. YI, Y. CHEN, AND J. WU. Periodic solutions and the global attractor in a system of delay differential equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(1), 24–63, 2010.
- [72] Q. ZHANG, X. WEI, AND J. XU. On global exponential stability of discrete-time Hopfield neural networks with variable delays. *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, pages Art. ID 67675, 9, 2007.
- [73] <http://www.math.u-szeged.hu/~garab/thesis/neuron>.
- [74] Computer assisted proofs in dynamics group. CAPD library, a C++ package for rigorous numerics. <http://capd.ii.uj.edu.pl>.
- [75] <http://www.math.u-szeged.hu/~garab/thesis/Ricker>.

Függelék

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \frac{-i + \sqrt{-1 + 4\alpha}}{2\sqrt{-1 + 4\alpha}} \left(\left(-1 + e^{-\frac{z - iz\sqrt{-1 + 4\alpha} + \bar{z} + i\sqrt{-1 + 4\alpha}\bar{z}}{2\alpha}} \right) (z + \bar{z}) \right. \\ \left. + \alpha \left(-1 + e^{-\frac{z - iz\sqrt{-1 + 4\alpha} + \bar{z} + i\sqrt{-1 + 4\alpha}\bar{z}}{2\alpha}} + \frac{2z}{1 + i\sqrt{-1 + 4\alpha}} + \frac{2i\bar{z}}{i + \sqrt{-1 + 4\alpha}} \right) \right) \quad (\text{A.1})$$

$$g_{20}(\alpha) = -\frac{1}{2} + \frac{3i}{2\sqrt{-1 + 4\alpha}} \quad (\text{A.2})$$

$$g_{11}(\alpha) = \frac{2(-1 + \alpha)}{-1 + 4\alpha + i\sqrt{-1 + 4\alpha}} \quad (\text{A.3})$$

$$g_{02}(\alpha) = \frac{i\alpha(3i + \sqrt{-1 + 4\alpha})}{\sqrt{-1 + 4\alpha}(i - 2i\alpha + \sqrt{-1 + 4\alpha})} \quad (\text{A.4})$$

$$g_{30}(\alpha) = -\frac{i(1 + \alpha - i\sqrt{-1 + 4\alpha})}{\alpha\sqrt{-1 + 4\alpha}} \quad (\text{A.5})$$

$$g_{21}(\alpha) = \frac{-3i + 2i\alpha + \sqrt{-1 + 4\alpha}}{2\alpha\sqrt{-1 + 4\alpha}} \quad (\text{A.6})$$

$$g_{12}(\alpha) = \frac{2(3i - 2i\alpha + \sqrt{-1 + 4\alpha})}{\sqrt{-1 + 4\alpha}(i + \sqrt{-1 + 4\alpha})^2} \quad (\text{A.7})$$

$$g_{03}(\alpha) = \frac{4i\alpha(5i + \sqrt{-1 + 4\alpha})}{\sqrt{-1 + 4\alpha}(i + \sqrt{-1 + 4\alpha})^3} \quad (\text{A.8})$$

$$g_{40}(\alpha) = \frac{8(-2 + \alpha - 2i\sqrt{-1 + 4\alpha})}{\sqrt{-1 + 4\alpha}(-i + \sqrt{-1 + 4\alpha})^3} \quad (\text{A.9})$$

$$g_{31}(\alpha) = -\frac{2(-2i + i\alpha + \sqrt{-1 + 4\alpha})}{\alpha(-i + 4i\alpha + \sqrt{-1 + 4\alpha})} \quad (\text{A.10})$$

$$g_{22}(\alpha) = \frac{2(-2 + \alpha)}{\alpha(-1 + 4\alpha + i\sqrt{-1 + 4\alpha})} \quad (\text{A.11})$$

$$g_{13}(\alpha) = \frac{8(2 - \alpha - i\sqrt{-1 + 4\alpha})}{\sqrt{-1 + 4\alpha}(i + \sqrt{-1 + 4\alpha})^3} \quad (\text{A.12})$$

$$g_{04}(\alpha) = \frac{8\alpha (7i + \sqrt{-1 + 4\alpha})}{\sqrt{-1 + 4\alpha} (i + \sqrt{-1 + 4\alpha})^4} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} h_{\text{inv},\alpha}(z) = & z - \frac{h_{20}(\alpha)z^2}{2} + \frac{1}{6}z^3 \left(3h_{20}(\alpha)^2 - h_{30}(\alpha) + 3h_{11}(\alpha)\overline{h_{02}(\alpha)} \right) \\ & + \frac{1}{24}z^4 \left(-15h_{20}(\alpha)^3 + 10h_{20}(\alpha)h_{30}(\alpha) - 30h_{11}(\alpha)h_{20}(\alpha)\overline{h_{02}(\alpha)} \right. \\ & \quad \left. - 3h_{02}(\alpha)\overline{h_{02}(\alpha)}^2 + 4h_{11}(\alpha)\overline{h_{03}(\alpha)} - 12h_{11}(\alpha)\overline{h_{02}(\alpha)}\overline{h_{11}(\alpha)} \right) \\ & - h_{11}(\alpha)z\bar{z} + \frac{1}{2}z^2\bar{z} \left(3h_{11}(\alpha)h_{20}(\alpha) + h_{02}(\alpha)\overline{h_{02}(\alpha)} + 2h_{11}(\alpha)\overline{h_{11}(\alpha)} \right) \\ & + \frac{1}{6}z^3\bar{z} \left(-15h_{11}(\alpha)h_{20}(\alpha)^2 + 4h_{11}(\alpha)h_{30}(\alpha) - 12h_{11}(\alpha)^2\overline{h_{02}(\alpha)} \right. \\ & \quad + 3h_{12}(\alpha)\overline{h_{02}(\alpha)} - 6h_{02}(\alpha)h_{20}(\alpha)\overline{h_{02}(\alpha)} + h_{02}(\alpha)\overline{h_{03}(\alpha)} \\ & \quad - 12h_{11}(\alpha)h_{20}(\alpha)\overline{h_{11}(\alpha)} - 6h_{02}(\alpha)\overline{h_{02}(\alpha)}\overline{h_{11}(\alpha)} \\ & \quad \left. - 6h_{11}(\alpha)\overline{h_{11}(\alpha)}^2 + 3h_{11}(\alpha)\overline{h_{12}(\alpha)} - 3h_{11}(\alpha)\overline{h_{02}(\alpha)}\overline{h_{20}(\alpha)} \right) \\ & - \frac{h_{02}(\alpha)\bar{z}^2}{2} + \frac{1}{2}z\bar{z}^2 \left(2h_{11}(\alpha)^2 - h_{12}(\alpha) + h_{02}(\alpha)h_{20}(\alpha) \right. \\ & \quad \left. + 2h_{02}(\alpha)\overline{h_{11}(\alpha)} + h_{11}(\alpha)\overline{h_{20}(\alpha)} \right) \\ & + \frac{1}{4}z^2\bar{z}^2 \left(-12h_{11}(\alpha)^2h_{20}(\alpha) + 3h_{12}(\alpha)h_{20}(\alpha) - 3h_{02}(\alpha)h_{20}(\alpha)^2 \right. \\ & \quad + h_{02}(\alpha)h_{30}(\alpha) + h_{03}(\alpha)\overline{h_{02}(\alpha)} - 9h_{02}(\alpha)h_{11}(\alpha)\overline{h_{02}(\alpha)} \\ & \quad - 12h_{11}(\alpha)^2\overline{h_{11}(\alpha)} + 4h_{12}(\alpha)\overline{h_{11}(\alpha)} - 6h_{02}(\alpha)h_{20}(\alpha)\overline{h_{11}(\alpha)} \\ & \quad - 6h_{02}(\alpha)\overline{h_{11}(\alpha)}^2 + 2h_{02}(\alpha)\overline{h_{12}(\alpha)} - 3h_{11}(\alpha)h_{20}(\alpha)\overline{h_{20}(\alpha)} \\ & \quad \left. - 3h_{02}(\alpha)\overline{h_{02}(\alpha)}\overline{h_{20}(\alpha)} - 6h_{11}(\alpha)\overline{h_{11}(\alpha)}\overline{h_{20}(\alpha)} \right) \\ & + \frac{1}{6}\bar{z}^3 \left(-h_{03}(\alpha) + 3h_{02}(\alpha)h_{11}(\alpha) + 3h_{02}(\alpha)\overline{h_{20}(\alpha)} \right) \\ & + \frac{1}{6}z\bar{z}^3 \left(-6h_{11}(\alpha)^3 + 6h_{11}(\alpha)h_{12}(\alpha) + h_{03}(\alpha)h_{20}(\alpha) \right. \\ & \quad - 9h_{02}(\alpha)h_{11}(\alpha)h_{20}(\alpha) - 3h_{02}(\alpha)^2\overline{h_{02}(\alpha)} + 3h_{03}(\alpha)\overline{h_{11}(\alpha)} \\ & \quad - 18h_{02}(\alpha)h_{11}(\alpha)\overline{h_{11}(\alpha)} - 6h_{11}(\alpha)^2\overline{h_{20}(\alpha)} + 3h_{12}(\alpha)\overline{h_{20}(\alpha)} \\ & \quad - 3h_{02}(\alpha)h_{20}(\alpha)\overline{h_{20}(\alpha)} - 12h_{02}(\alpha)\overline{h_{11}(\alpha)}\overline{h_{20}(\alpha)} \\ & \quad \left. - 3h_{11}(\alpha)\overline{h_{20}(\alpha)}^2 + h_{11}(\alpha)\overline{h_{30}(\alpha)} \right) \\ & + \frac{1}{24}\bar{z}^4 \left(4h_{03}(\alpha)h_{11}(\alpha) - 12h_{02}(\alpha)h_{11}(\alpha)^2 + 6h_{02}(\alpha)h_{12}(\alpha) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned}
& -3h_{02}(\alpha)^2 h_{20}(\alpha) - 12h_{02}(\alpha)^2 \overline{h_{11}(\alpha)} + 6h_{03}(\alpha) \overline{h_{20}(\alpha)} \\
& - 18h_{02}(\alpha) h_{11}(\alpha) \overline{h_{20}(\alpha)} - 15h_{02}(\alpha) \overline{h_{20}(\alpha)}^2 + 4h_{02}(\alpha) \overline{h_{30}(\alpha)}
\end{aligned}$$

$$h_{20}(\alpha) = \frac{2(1 + \sqrt{1-4\alpha} - \alpha)}{\alpha(1-4\alpha + i\sqrt{-1+4\alpha})} \quad (\text{A.15})$$

$$h_{11}(\alpha) = \frac{2(-1 + \alpha)}{\alpha(-1 + 4\alpha - i\sqrt{-1+4\alpha})} \quad (\text{A.16})$$

$$h_{02}(\alpha) = \frac{2\alpha(3i + \sqrt{-1+4\alpha})}{(i + \sqrt{-1+4\alpha})^2(-i + 4i\alpha + \alpha\sqrt{-1+4\alpha})} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned}
h_{30}(\alpha) = & \left(16 \left(-12 - 12i\sqrt{-1+4\alpha} \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha \left(45 + 21i\sqrt{-1+4\alpha} + \alpha \left(-27 + 2\alpha - 5i\sqrt{-1+4\alpha} \right) \right) \right) \right) \\
& \times \left(\left(1 + \sqrt{1-4\alpha} \right)^4 \sqrt{-1+4\alpha} \right. \\
& \left. \times \left(i + \sqrt{-1+4\alpha} + \alpha \left(-2i + \alpha \left(-5i + \sqrt{-1+4\alpha} \right) \right) \right) \right)^{-1}
\end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned}
h_{12}(\alpha) = & \left(\left(4i + \alpha \left(-4(5i + 3\sqrt{-1+4\alpha}) + \alpha \left(28i + 18\sqrt{-1+4\alpha} \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \alpha \left(-31i - 9\sqrt{-1+4\alpha} + \alpha(9i + \sqrt{-1+4\alpha}) \right) \right) \right) \right) \right) \\
& \times \left(\left(\alpha^3 \left(-i + \sqrt{-1+4\alpha} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \alpha \left(6i + \alpha \left(-13i - 15\sqrt{-1+4\alpha} + 2\alpha(10i + \sqrt{-1+4\alpha}) \right) \right) \right) \right) \right)^{-1}
\end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned}
h_{03}(\alpha) = & \left(\left(2 \left(5i + 7\sqrt{-1+4\alpha} + \alpha \left(-29i - 14\sqrt{-1+4\alpha} \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \alpha(17i - i\alpha + 3\sqrt{-1+4\alpha}) \right) \right) \right) \right) \\
& \times \left(\left(i + \sqrt{-1+4\alpha} + \alpha \left(-2(7i + 6\sqrt{-1+4\alpha}) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \alpha \left(70i + 46\sqrt{-1+4\alpha} + \alpha \left(-6(23i + 10\sqrt{-1+4\alpha}) \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + \alpha(73i - 4i\alpha + 13\sqrt{-1+4\alpha}) \right) \right) \right) \right) \right)^{-1}
\end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned}
& |h_{\text{inv}}^{20}(\alpha)| + |h_{\text{inv}}^{11}(\alpha)| + |h_{\text{inv}}^{02}(\alpha)| \\
&= \left(-2(-1 + \alpha)\alpha + \sqrt{\alpha^3(2 + \alpha)} + \sqrt{\frac{\alpha^5(2 + \alpha)}{-1 + \alpha(4 + \alpha)}} \right) \left(2\sqrt{\alpha^5(-1 + 4\alpha)} \right)^{-1} \quad (\text{A.21})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |h_{\text{inv}}^{30}(\alpha)| + |h_{\text{inv}}^{21}(\alpha)| + |h_{\text{inv}}^{12}(\alpha)| + |h_{\text{inv}}^{03}(\alpha)| \\
&= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{36 + 15\alpha - 12\alpha^2 + 4\alpha^3}{\alpha^5(-2 + 7\alpha + 4\alpha^2)}} + \sqrt{\frac{6 - 40\alpha + 75\alpha^2 - 21\alpha^4 + 4\alpha^5 + 4\alpha^6}{(2 - 15\alpha + 22\alpha^2 + 23\alpha^3 + 4\alpha^4)4\alpha^6}} \\
&+ \frac{1}{6} \sqrt{\frac{12 - 54\alpha + 66\alpha^2 - 13\alpha^3 + 4\alpha^4 + 4\alpha^5}{\alpha^3(-1 + 13\alpha - 57\alpha^2 + 88\alpha^3 - 18\alpha^4 + 7\alpha^5 + 4\alpha^6)}} \quad (\text{A.22}) \\
&+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 - 16\alpha + 13\alpha^2 + 124\alpha^3 - 198\alpha^4 + 15\alpha^5 + 54\alpha^6 + 9\alpha^7}{\alpha^6(-1 + 4\alpha)(-1 + 4\alpha + \alpha^2)^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|h_{\text{inv}}^{40}(\alpha)| &= \frac{1}{24} \left(-1140 + 10874\alpha - 12660\alpha^2 - 143073\alpha^3 + 423177\alpha^4 - 211261\alpha^5 \right. \\
&\quad \left. + 1356\alpha^6 + 30869\alpha^7 - 13766\alpha^8 - 2238\alpha^9 + 1489\alpha^{10} + 256\alpha^{11} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.23}) \\
&\quad \times \left((1 - 4\alpha)^2 \alpha^6 (-1 + 4\alpha + \alpha^2)^3 (-1 + 5\alpha - 2\alpha^2 + \alpha^3) \right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|h_{\text{inv}}^{31}(\alpha)| &= \left(-36 + 912\alpha - 9354\alpha^2 + 49026\alpha^3 - 133548\alpha^4 + 155248\alpha^5 \right. \\
&\quad \left. + 24851\alpha^6 - 182342\alpha^7 + 127014\alpha^8 - 47122\alpha^9 - 12543\alpha^{10} \right. \\
&\quad \left. + 34528\alpha^{11} - 329\alpha^{12} + 1925\alpha^{13} + 2452\alpha^{14} + 361\alpha^{15} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.24}) \\
&\quad \times (-1 + 5\alpha - 2\alpha^2 + \alpha^3)^{-\frac{1}{2}} \left(6\alpha^5(2 - 15\alpha + 22\alpha^2 + 23\alpha^3 + 4\alpha^4) \right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|h_{\text{inv}}^{22}(\alpha)| &= \left(-16 + 4\alpha + 2240\alpha^2 - 14868\alpha^3 + 19782\alpha^4 + 91297\alpha^5 \right. \\
&\quad \left. - 309731\alpha^6 + 259610\alpha^7 + 81080\alpha^8 - 147591\alpha^9 + 12815\alpha^{10} \right. \\
&\quad \left. + 19871\alpha^{11} - 8236\alpha^{12} + 241\alpha^{13} + 2132\alpha^{14} + 361\alpha^{15} \right) \quad (\text{A.25}) \\
&\quad \times (-1 + 5\alpha - 2\alpha^2 + \alpha^3)^{-\frac{1}{2}} \left(4\alpha^5(2 - 15\alpha + 22\alpha^2 + 23\alpha^3 + 4\alpha^4) \right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|h_{\text{inv}}^{13}(\alpha)| &= \frac{1}{6} \left(36 - 840\alpha + 7728\alpha^2 - 35454\alpha^3 + 84157\alpha^4 - 96139\alpha^5 \right. \\
&\quad \left. + 39017\alpha^6 + 15361\alpha^7 - 22836\alpha^8 + 10489\alpha^9 + 5142\alpha^{10} \right. \\
&\quad \left. - 397\alpha^{11} + 922\alpha^{12} + 529\alpha^{13} + 64\alpha^{14} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.26}) \\
&\quad \times \left(\alpha^9(-1 + 4\alpha + \alpha^2)^3(2 - 17\alpha + 35\alpha^2 + 4\alpha^3 - \alpha^4 + 4\alpha^5) \right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|h_{\text{inv}}^{04}(\alpha)| &= \frac{1}{24} \left(36 - 396\alpha + 1350\alpha^2 - 1422\alpha^3 + 318\alpha^4 \right. \\
&\quad \left. + 441\alpha^5 - 145\alpha^6 + 100\alpha^7 + 25\alpha^8 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\alpha^6(-1 + 4\alpha + \alpha^2)^2(1 - 9\alpha + 22\alpha^2 - 9\alpha^3 + 4\alpha^4) \right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned}
|r_2^{40}(\alpha)| &= \frac{1}{24} \left(-432 + 2808\alpha - 5016\alpha^2 + 4692\alpha^3 - 2584\alpha^4 \right. \\
&\quad \left. + 930\alpha^5 - 210\alpha^6 + 7\alpha^7 + 27\alpha^8 - 6\alpha^9 + \alpha^{10} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\alpha^4(-1 + 4\alpha + \alpha^2)^2(1 - 9\alpha + 22\alpha^2 - 9\alpha^3 + 4\alpha^4) \right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{A.28}$$

$$\begin{aligned}
|r_2^{31}(\alpha)| &= \frac{1}{6} \left(90 - 810\alpha + 1635\alpha^2 + 1485\alpha^3 - 3462\alpha^4 + 4056\alpha^5 - 659\alpha^6 \right. \\
&\quad \left. - 108\alpha^7 - 320\alpha^8 + 24\alpha^9 + 87\alpha^{10} - 102\alpha^{11} + 36\alpha^{12} + \alpha^{13} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\alpha^7(2 - 17\alpha + 33\alpha^2 + 13\alpha^3 + 4\alpha^5 + \alpha^6)(-1 + 4\alpha)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{A.29}$$

$$\begin{aligned}
|r_2^{22}(\alpha)| &= \frac{1}{4} \left(64 - 608\alpha + 1348\alpha^2 + 728\alpha^3 - 1692\alpha^4 + 1948\alpha^5 - 688\alpha^6 - 2008\alpha^7 \right. \\
&\quad \left. + 1184\alpha^8 + 742\alpha^9 - 355\alpha^{10} - 136\alpha^{11} + 34\alpha^{12} + 14\alpha^{13} + \alpha^{14} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\alpha^9(-1 + 4\alpha)(-2 + 7\alpha + 6\alpha^2 + \alpha^3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned}
|r_2^{13}(\alpha)| &= \frac{1}{6} \left(-54 + 918\alpha - 5973\alpha^2 + 18921\alpha^3 - 32250\alpha^4 + 32742\alpha^5 \right. \\
&\quad \left. - 15643\alpha^6 + 2506\alpha^7 + 3246\alpha^8 - 3551\alpha^9 + 1327\alpha^{10} \right. \\
&\quad \left. - 156\alpha^{11} - 48\alpha^{12} + 59\alpha^{13} + 16\alpha^{14} + \alpha^{15} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\alpha^7(-2 + 9\alpha + \alpha^2 + \alpha^4)(6 - 48\alpha + 90\alpha^2 + 4\alpha^3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned}
|r_2^{13}(\alpha)| &= \frac{1}{6} \left(-54 + 918\alpha - 5973\alpha^2 + 18921\alpha^3 - 32250\alpha^4 + 32742\alpha^5 \right. \\
&\quad \left. - 15643\alpha^6 + 2506\alpha^7 + 3246\alpha^8 - 3551\alpha^9 + 1327\alpha^{10} \right. \\
&\quad \left. - 156\alpha^{11} - 48\alpha^{12} + 59\alpha^{13} + 16\alpha^{14} + \alpha^{15} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\alpha^7(-2 + 9\alpha + \alpha^2 + \alpha^4)(6 - 48\alpha + 90\alpha^2 + 4\alpha^3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned}
|r_2^{04}(\alpha)| &= \frac{1}{24} \left(-432 + 2808\alpha - 5016\alpha^2 + 4692\alpha^3 - 2584\alpha^4 \right. \\
&\quad \left. + 930\alpha^5 - 210\alpha^6 + 7\alpha^7 + 27\alpha^8 - 6\alpha^9 + \alpha^{10} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\alpha^4(-1 + 4\alpha + \alpha^2)^2(1 - 9\alpha + 22\alpha^2 - 9\alpha^3 + 4\alpha^4) \right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned}
c_1(\alpha) &= \left(2i - 2\sqrt{-1 + 4\alpha} + \alpha \left(2(-7i + 5\sqrt{-1 + 4\alpha}) + \alpha \left(25i - 13\sqrt{-1 + 4\alpha} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha(-25i + 7\sqrt{-1 + 4\alpha} - \alpha(-7i + \sqrt{-1 + 4\alpha})) \right) \right) \right) \\
&\quad \times \left(2\alpha^3\sqrt{-1 + 4\alpha}(-i + \sqrt{-1 + 4\alpha})(i\alpha + \sqrt{-1 + 4\alpha}) \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{A.34}$$