Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro Gradu

Poincarén epäyhtälöstä

Tekijä:
Anssi Tuovinen

Ohjaaja:
FT Ritva Hurri-Syrjänen
Toinen tarkastaja:
FT Antti Vähäkangas

1. toukokuuta 2014

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Anssi Tuovinen

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Poincarén epäyhtälöstä

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Toukokuu 2014	34 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tutkielmassa käsitellään klassisen Poincarén epäyhtälön

$$\left(\int_D |u(y) - u_D|^p \, \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \leq \kappa \left(\int_D |\nabla u(y)|^p \, \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}$$

voimassaoloa euklidisen avaruuden rajoitetuissa alueissa. Epäyhtälön toteutuminen riippuu paitsi integrointialueesta D myös eksponentista p. Oleellista on, että epäyhtälössä esiintyvä vakio κ ei ole riippuvainen integroitavasta funktiosta. Epäyhtälössä esiintyy lisäksi funktion u integraalikeskiarvo yli alueen D, jota merkitsemme u_D. Työssä käsiteltävät alueet ovat rajoitettuja sekä funktiot Lebesgue-integroituvia näissä alueissa.

Luvussa 3 todistetaan Poincarén epäyhtälön voimassaolo konvekseissa alueissa eksponentilla $1 < p < \infty$. Työn neljännessä luvussa todistetaan Poincarén epäyhtälön voimassaolon pisteen suhteen tähtimäisissä alueissa eksponentilla $1 < p < \infty$. Lopuksi luvussa 5 tutustumme "Huoneita ja käytäviä" -tyyppiseen alueeseen, jossa Poincarén epäyhtälö ei ole voimassa eksponentin $p > 1$ ollessa kyllin pieni.

Epäyhtälöä tutkitaan ja esitetyt tulokset ovat voimassa Sobolev avaruuksien funktioilla, vaikka tässä työssä tarkastellaan kerran jatkuvasti derivoituvia funktioita. Epäyhtälöllä on lukuisia sovelluksia osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriassa.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Poincarén epäyhtälö, konveksi alue, tähtimäinen alue, huoneita ja käytäviä

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tässä työssä käsittelemme klassisen Poincarén epäyhtälön

$$\left(\int_D |u(y) - u_D|^p \, \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \leq \kappa \left(\int_D |\nabla u(y)|^p \, \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

voimassaoloa euklidisen avaruuden rajoitetuissa alueissa. Epäyhtälössä joukko D on rajoitettu alue avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja funktio $u\colon D \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva sekä Lebesgue-integroituva. Epäyhtälössä esiintyy lisäksi funktion u integraalikeskiarvo alueen D yli, mikä saadaan laskemalla

$$u_D = \frac{1}{|D|} \int_D u(x) \, \mathrm{d}x.$$

Epäyhtälön toteutuminen riippuu paitsi alueesta D myös eksponentista p. Oleellista on, että epäyhtälössä esiintyvä vakio κ ei ole riippuvainen funktiosta u.

Todistamme ensin luvussa 3 Poincarén epäyhtälön (1.1) voimassaolon konvekseissa alueissa eksponentilla $1 < p < \infty$. Työn neljännessä luvussa todistamme Poincarén epäyhtälön voimassaolon pisteen suhteen tähtimäisissä alueissa myös eksponentilla $1 < p < \infty$. Lopuksi luvussa 5 tutustumme Otto Nikodymin ideoiden, [12], pohjalta konstruoituun joukkoon, jossa Poincarén epäyhtälö ei ole voimassa eksponentin $p > 1$ ollessa kyllin pieni. Esitetty ”Huoneita ja käytäviä” -tyyppinen joukko on ensi kertaa kehitetty hieman toisessa muodossa Richard Courantin ja David Hilbertin vuonna 1937 julkaistussa kirjassa [1].

Epäyhtälö (1.1) on saanut nimensä ranskalaisen Henri Poincarén mukaan. Hän tutki yhtälön toteutumista eksponentilla $p = 2$ tason sekä avaruuden $\mathbb{R}^3$ suorakaiteissa 1800-luvun lopulla. Työtä jatkoi 1900-luvun alussa italialainen Eugenio Levi tason pisteen suhteen tähtimäisissä alueissa. Tapausta $p \neq 2$ epäsäännöllisissä alueissa on enemmän tutkittu 1980-luvulta lähtien. Epäyhtälöä tutkitaan ja esitetyt tulokset ovat voimassa Sobolev avaruuksien funktioilla, vaikka tässä työssä tarkastellaan kerran jatkuvasti derivoituvia funktioita. Epäyhtälöllä on lukuisia sovelluksia osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriassa. Esimerkkejä ja taustaa on julkaistu esimerkiksi Lawrence C. Evansin kirjassa [2].

Luku 2

Määritelmiä ja merkintöjä

Tässä luvussa käsittelemme joitain tarvittavia merkintöjä, määritelmiä ja perustuloksia. Kaikkia matematiikan aineopinnoista tuttuja merkintöjä sekä tuloksia emme käy läpi.

Kutsumme joukkoa alueeksi, mikäli se on avoin ja yhtenäinen. Kirjaimella D merkitsemme rajoitettua aluetta euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ sekä kirjaimella u reaaliarvoista funktiota. Merkitsemme $B^n(x,r)$ avointa x-keskistä r-säteistä palloa avaruudessa $\mathbb{R}^n$, kun $n \geq 2$. Vastaavan pallon kuorta merkitsemme $S^{n-1}(x,r)$. Yksikköpallon tilavuudelle käytämme merkintää ω_n. Merkitsemme $c(*,\dots,*)$ vakiota, joka riippuu vain sulkeiden sisällä luetelluista termeistä.

Gradientti

Funktion $u\colon D \to \mathbb{R}$ gradienttia pisteessä $x_0 \in D$ merkitsemme

$$\nabla u(x_0) = (\partial_1 u(x_0), \dots, \partial_n u(x_0)).$$

Mikäli funktion u kaikki osittaisderivaatat $\partial_j u$, kullakin $j = 1,\dots,n$, ovat olemassa alueen D jokaisessa pisteessä ja ne ovat jatkuvia alueessa D, sanomme, että u kuuluu kerran joukossa D jatkuvasti derivoituvien funktioiden luokkaan $C^1(D)$. Tällöin merkitsemme $u \in C^1(D)$. Jos on voimassa $u \in C^1(D)$, niin funktio u on differentioituva alueen D jokaisessa pisteessä. Tulos on todistettu esimerkiksi oppikirjan [10] sivuilla 33 – 34. Mikäli muuta ei mainita, on läpi tekstin voimassa $u \in C^1(D)$.

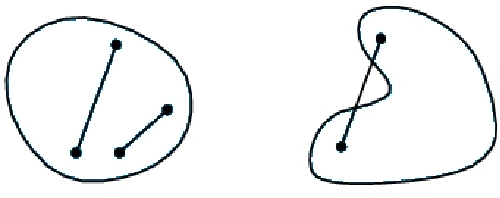
Integraalikeskiarvo

Joukon A Lebesguen mitalle käytämme merkintää $|A|$. Joukossa A Lebesgue-integroituvan funktion u integraalikeskiarvo yli Lebesgue-mitallisen joukon A, kun $0 < |A| < \infty$, saadaan laskemalla

$$u_A = \frac{1}{|A|} \int_A u(x)\ \mathrm{d}x.$$

Konveksi joukko

Alue D on konveksi, jos kaikilla $a, b \in D$ on voimassa $ta + (1-t)b \in D$, kun $t \in [0,1]$. Geometrisesti tulkittuna konveksit joukot ovat "kuperia".



Kuva 2.1: Konveksi joukko sekä ei-konveksi joukko.

L^p-avaruudet

Kun $1 \leq p < \infty$, määritellään

$$L^p(D) = \left\{ u \colon D \to \mathbb{R} \;\middle|\; u \text{ mitallinen ja } \int_D |u(x)|^p\ \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Kun avaruus $L^p(D)$ varustetaan normilla

$$||u||_{L^p(D)} = \left(\int_D |u(x)|^p\ \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

osoittautuu se normiavaruudeksi.

Seuraavat kaksi lausetta ovat L^p-avaruuksien perusominaisuuksia. Lauseiden todistukset löytyvät esimerkiksi kirjan [11] sivuilta 50 – 57.

Lause 2.1. *Hölderin epäyhtälö. Jos* $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $f \in L^p(D)$ *sekä* $g \in L^q(D)$, *niin*

$$fg \in L^1(D) \quad ja \quad ||fg||_{L^1(D)} \leq ||f||_{L^p(D)} ||g||_{L^q(D)}, \quad ts.$$

$$\int_D |f(x) \cdot g(x)| \; dx \leq \left(\int_D |f(x)|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_D |g(x)|^q \; dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Huomautus 2.2. Hölderin epäyhtälö on voimassa myös jonoille (a_k) ja (b_k), missä $a_k \geq 0$ ja $b_k \geq 0$ jokaisella $k = 1, \ldots, n$. Jos $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ sekä $1/p + 1/q = 1$, niin

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Huomautus 2.3. Kun $1 < p < \infty$, toteuttavat luvut p ja $q = p/(p-1)$ Hölderin epäyhtälön eksponenttien ehdon $1/p + 1/q = 1$.

Lause 2.4. *Minkowskin epäyhtälö eli kolmioepäyhtälö. Jos* $f, g \in L^p(D)$, *niin* $f + g \in L^p(D)$ *ja*

$$||f + g||_{L^p(D)} \leq ||f||_{L^p(D)} + ||g||_{L^p(D)}$$

eli auki kirjoitettuna

$$\left(\int_D |f(x) + g(x)|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_D |f(x)|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_D |g(x)|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Fubinin lause

Muutamissa todistuksissa on tarpeen vaihtaa integrointijärjestystä. Fubinin lauseen eräs versio mahdollistaa sen. Käsittelyymme riittävä seuraavassa lauseessa esitetty versio on todistettu esimerkiksi luentomonisteen [6] sivuilla 68 – 69. Käytämme lauseen tulosta todistuksissa erikseen mainitsematta.

Lause 2.5. *Olkoon* $u \colon \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *mitallinen funktio siten, että*

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} |u| < \infty, \qquad \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |u(x,y)| \; dm_q(y) \right) \; dm_p(x) < \infty \qquad tai$$

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |u(x,y)| \; dm_p(x) \right) \; dm_q(y) < \infty.$$

Tällöin integrointijärjestys voidaan vaihtaa eli

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |u(x,y)| \; dm_q(y) \right) \; dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |u(x,y)| \; dm_p(x) \right) \; dm_q(y).$$

Muuttujanvaihto pallokoordinaatteihin

Olkoot piste $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, sekä kulmat $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, missä $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2} \in [0, \pi]$ ja $\varphi_{n-1} \in [0, 2\pi)$. Merkitsemme pallokoordinaattimuunnoksen $x \mapsto (r, \varphi)$ Lebesgue-integroituvan funktion $f(x)$ integraalille avaruudessa $\mathbb{R}^n$ seuraavasti:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{S^{n-1}(0,1)} \int_0^\infty f(r, \varphi) r^{n-1} \mathrm{d}r\ \mathrm{d}m_{n-1}(\varphi).$$

Luku 3

Poincarén epäyhtälö konveksissa alueessa

Tässä luvussa todistamme klassisen Poincarén epäyhtälön rajoitetussa konveksissa alueessa. Todistus pohjautuu kirjan [3] luvun 7 sivuilta 152 – 157 löytyvään käsittelyyn.

Määritelmä 3.1. Olkoon $\mu \in (0,1)$ vakio sekä $u\colon D \to \mathbb{R}^+$, missä $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, mitallinen positiivisia arvoja saava funktio sekä $u \in L^p(D)$. Määritellään operaattori V_μ kaavalla

$$(V_\mu u)(x) = \int_D |x-y|^{n(\mu-1)} u(y)\ \mathrm{d}y.$$

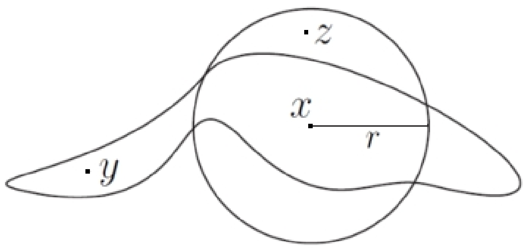
Operaattori V_μ osoittautuu hyvin määritellyksi melkein kaikilla $x \in D$ seuraavan Lemman 3.2 nojalla.

Lemma 3.2. *Olkoon V_μ edellä määritelty operaattori. Jos $u \in L^p(D)$, $1 < p < \infty$, niin*

$$||V_\mu u||_{L^p(D)} \leq \frac{1}{\mu} \cdot \omega_n^{1-\mu} \cdot |D|^\mu \cdot ||u||_{L^p(D)}.$$

Todistus. Olkoon $x \in D$ kiinnitetty. Tehdään aluksi apuarvio operaattorin V_μ arvoille funktiolle $u(x) = 1$ kaikilla $x \in D$. Olkoon $r > 0$. Asetetaan x-keskinen r-säteinen pallo $B^n(x,r)$ niin, että $|D| = |B^n(x,r)| = \omega_n \cdot r^n$. Varmistamme seuraavaksi, että voimme tutkia integraalia pallossa $B^n(x,r)$. Seuraavassa esitetty arvion (3.4) perustelu on peräisin kirjan [9] Lemmasta 1.30. Integraali alueen D yli voidaan jakaa palloon ja sen ulkopuolelle, eli

$$(3.3)\quad \int_D |x-y|^{n(\mu-1)}\ \mathrm{d}y = \int_{D\cap B^n(x,r)} |x-y|^{n(\mu-1)}\ \mathrm{d}y + \int_{D\setminus B^n(x,r)} |x-y|^{n(\mu-1)}\ \mathrm{d}y.$$



Kuva 3.1: Hahmotelma alueesta D ja pallosta $B^2(x,r)$ tasossa $\mathbb{R}^2$.

Nyt jokaisella pisteellä $z \in B^n(x,r) \setminus D$ ja pisteellä $y \in D \setminus B^n(x,r)$ on voimassa

$$|x-z| \leq r \leq |x-y|.$$

Lisäksi tiedämme, että

$$|B^n(x,r) \setminus D| + |D \cap B^n(x,r)| = |B^n(x,r)| = |D| = |D \setminus B^n(x,r)| + |D \cap B^n(x,r)|,$$

joten $|B^n(x,r) \setminus D| = |D \setminus B^n(x,r)|$. Koska on voimassa $n(\mu-1) < 0$, saamme arvion

$$\begin{aligned}\int_{D \setminus B^n(x,r)} |x-y|^{n(\mu-1)} \, \mathrm{d}y &\leq |D \setminus B^n(x,r)| \cdot r^{n(\mu-1)} \\ &= |B^n(x,r) \setminus D| \cdot r^{n(\mu-1)} \leq \int_{B^n(x,r) \setminus D} |x-z|^{n(\mu-1)} \, \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Sijoittamalla edellinen arvio yhtälöön (3.3) saamme

$$\begin{aligned}\int_D |x-y|^{n(\mu-1)} \, \mathrm{d}y &\leq \int_{D \cap B^n(x,r)} |x-y|^{n(\mu-1)} \, \mathrm{d}y + \int_{B^n(x,r) \setminus D} |x-y|^{n(\mu-1)} \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{B^n(x,r)} |x-y|^{n(\mu-1)} \, \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Siten on voimassa

$$\int_D |x-y|^{n(\mu-1)} \, \mathrm{d}y \leq \int_{B^n(x,r)} |x-y|^{n(\mu-1)} \, \mathrm{d}y. \tag{3.4}$$

Muuttujanvaihdolla pallokoordinaatteihin saamme

$$\begin{aligned}\int_{B^n(x,r)} |x-y|^{n(\mu-1)} \, \mathrm{d}y &= \int_{B^n(0,r)} |y|^{n(\mu-1)} \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{S^{n-1}(0,1)} \int_0^r \rho^{n(\mu-1)} \cdot \rho^{n-1} \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}m_{n-1}(\varphi).\end{aligned}$$

Koska pätee

$$\int_{S^{n-1}(0,1)} 1 \ \mathrm{d}m_{n-1}(\varphi) = n \cdot \omega_n,$$

saamme laskemalla

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}(0,1)} \int_0^r \rho^{n(\mu-1)} \cdot \rho^{n-1} \ \mathrm{d}\rho \ \mathrm{d}m_{n-1}(\varphi) &= n \cdot \omega_n \int_0^r \rho^{n\mu-1} \ \mathrm{d}\rho \\ &= n \cdot \omega_n \cdot \frac{1}{n\mu} r^{n\mu} = \frac{1}{\mu}\omega_n r^{n\mu}.\end{aligned}$$

Järjestelemällä termejä saamme esityksen muotoon

$$\frac{1}{\mu}\omega_n r^{n\mu} = \frac{1}{\mu} \cdot \omega_n^{1-\mu} \cdot \omega_n^{\mu} \cdot r^{n\mu} = \frac{1}{\mu}\omega_n^{1-\mu}|D|^{\mu}.$$

Olemme saaneet arvion

$$\int_D |x-y|^{n(\mu-1)} \ \mathrm{d}y \leq \frac{1}{\mu}\omega_n^{1-\mu}|D|^{\mu}. \tag{3.5}$$

Merkitään nyt $h(x,y) = |x-y|^{n(\mu-1)}$. Edellisen nojalla $h(x,\cdot) \in L^1(D)$ ja edellinen arvio (3.5) voidaan kirjoittaa muodossa

$$||h(x,\cdot)||_{L^1(D)} = ||h(\cdot,y)||_{L^1(D)} \leq \frac{1}{\mu} \cdot \omega_n^{1-\mu} \cdot |D|^{\mu} \quad \text{kaikilla } x,y \in D. \tag{3.6}$$

Tehdään seuraavaksi toinen apuarvio funktioilla $u \in L^p(D)$. Viemällä itseisarvot sisään saamme

$$\begin{aligned}|V_\mu u(x)| &= \left| \int_D |x-y|^{n(\mu-1)} u(y) \ \mathrm{d}y \right| \\ &\leq \int_D |x-y|^{n(\mu-1)} |u(y)| \ \mathrm{d}y = \int_D h(x,y)|u(y)| \ \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Kun on voimassa $p > 1$, voimme kirjoittaa

$$h(x,y) \cdot |u(y)| = h(x,y)^{\frac{1}{p}} \cdot h(x,y)^{1-\frac{1}{p}} \cdot |u(y)| = h(x,y)^{\frac{1}{p}} \cdot |u(y)| \cdot h(x,y)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Nyt voimme käyttää Hölderin epäyhtälöä ja saamme

$$\begin{aligned}&\int_D h(x,y)^{\frac{1}{p}} \cdot |u(y)| \cdot h(x,y)^{1-\frac{1}{p}} \ \mathrm{d}y \\ &\leq \left(\int_D \left[h(x,y)^{\frac{1}{p}} |u(y)| \right]^p \ \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_D \left[h(x,y)^{1-\frac{1}{p}} \right]^{1/(1-\frac{1}{p})} \ \mathrm{d}y \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_D h(x,y)|u(y)|^p \ \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_D h(x,y) \ \mathrm{d}y \right)^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Siis

$$|V_\mu u(x)| \leq \left(\int_D h(x,y)|u(y)|^p \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_D h(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^{1-\frac{1}{p}}. \tag{3.7}$$

Nyt olemme valmiit pureutumaan väitteeseen. Käyttämällä edellistä arviota (3.7) sekä viemällä itseisarvot sisään ja sieventämällä saamme

$$\begin{aligned}
||V_\mu u||_{L^p(D)} &= \left(\int_D |V_\mu u(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_D \left|\left(\int_D h(x,y)|u(y)|^p \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_D h(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^{1-\frac{1}{p}}\right|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_D \left(\int_D |h(x,y)||u(y)|^p \,\mathrm{d}y\right) \cdot \left(\int_D |h(x,y)|\,\mathrm{d}y\right)^{p-1} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Käyttämällä kahdesti peräkkäin aiemmin saatua arviota (3.6) saamme

$$\begin{aligned}
&\left(\int_D \left(\int_D |h(x,y)||u(y)|^p \,\mathrm{d}y\right) \cdot \left(\int_D |h(x,y)|\,\mathrm{d}y\right)^{p-1} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq\ & \left[\frac{1}{\mu}\omega_n^{1-\mu}|D|^\mu\right]^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_D\int_D |h(x,y)||u(y)|^p \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq\ & \left[\frac{1}{\mu}\omega_n^{1-\mu}|D|^\mu\right]^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left[\frac{1}{\mu}\omega_n^{1-\mu}|D|^\mu\right]^{\frac{1}{p}} \left(\int_D |u(y)|^p \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \\
=\ & \frac{1}{\mu} \cdot \omega_n^{1-\mu} \cdot |D|^\mu \cdot ||u||_{L^p(D)},
\end{aligned}$$

ja väite on näin todistettu. □

Lemma 3.8. *Olkoot D rajoitettu konveksi alue sekä alueessa D integroituva funktio $u \in C^1(D)$. Tällöin on voimassa*

$$|u(x) - u_D| \leq \frac{d^n}{n|D|}\int_D |x-y|^{1-n}|\nabla u(y)|\,dy,$$

missä $d = diam\ (D)$ on joukon D halkaisija.

Todistus. Olkoon mielivaltaiset pisteet $x, y \in D$ siten, että $x \neq y$. Tällöin konveksisuuden ja analyysin peruslauseen nojalla saamme

$$u(x) - u(y) = -\int_0^{|x-y|} \partial_r u(x + r\theta)\ \mathrm{d}r, \quad \text{missä} \quad \theta = \frac{y-x}{|y-x|}. \tag{3.9}$$

Integroidaan yhtälön (3.9) molemmat puolet muuttujan y suhteen joukon D yli. Tällöin sen vasen puoli saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
\int_D (u(x) - u(y))\ \mathrm{d}y &= \int_D u(x)\ \mathrm{d}y - \int_D u(y)\ \mathrm{d}y \\
&= |D|u(x) - \int_D u(y)\ \mathrm{d}y \\
&= |D| \left(u(x) - \frac{1}{|D|} \int_D u(y)\ \mathrm{d}y \right) = |D|(u(x) - u_D).
\end{aligned}$$

Voimme näin ollen kirjoittaa yhtälön (3.9) muodossa

$$|D|(u(x) - u_D) = -\int_D \int_0^{|x-y|} \partial_r u(x + r\theta)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}y. \tag{3.10}$$

Merkitään suunnattua derivaattaa nyt

$$T(x + r\theta) = \begin{cases} |\partial_r u(x + r\theta)|, & \text{kun } x + r\theta \in D \\ 0, & \text{kun } x + r\theta \notin D \end{cases}, \tag{3.11}$$

jolloin itseisarvot lisäämällä ja jakamalla mitalla $|D|$ saamme edellisestä (3.10) arvion

$$|u(x) - u_D| \leq \frac{1}{|D|} \int_{|x-y|<d} \int_0^\infty T(x + r\theta)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}y.$$

Vaihdetaan edellisestä integrointijärjestys sekä muuttujat pallokoordinaatteihin, jolloin saamme

$$\int_0^\infty \int_{|x-y|<d} T(x + r\theta)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}r = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}(0,1)} \int_0^d T(x + r\theta)\rho^{n-1}\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}m_{n-1}(\theta)\ \mathrm{d}r.$$

Nyt voimme integroida tekijän ρ suhteen saaden

$$\int_0^\infty \int_{S^{n-1}(0,1)} \int_0^d T(x + r\theta)\rho^{n-1}\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}r = \frac{d^n}{n} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}(0,1)} T(x + r\theta)\ \mathrm{d}m_{n-1}(\theta)\ \mathrm{d}r.$$

Merkinnän (3.11) sekä tiedon $|\partial_r u(x+r\theta)| \leq |\nabla u(x+r\theta)|$ avulla saamme

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_{S^{n-1}(0,1)} T(x+r\theta)\ \mathrm{d}m_{n-1}(\theta)\ \mathrm{d}r &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}(0,1)} |\partial_r u(x+r\theta)|\ \mathrm{d}m_{n-1}(\theta)\ \mathrm{d}r \\ &\leq \int_0^\infty \int_{S^{n-1}(0,1)} |\nabla u(x+r\theta)|\ \mathrm{d}m_{n-1}(\theta)\ \mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Tehdään muuttujanvaihto takaisin, jolloin voimme kirjoittaa

$$\int_0^\infty \int_{S^{n-1}(0,1)} |\nabla u(x+r\theta)|\ \mathrm{d}m_{n-1}(\theta)\ \mathrm{d}r = \int_D |\nabla u(y)| \cdot |x-y|^{1-n}\ \mathrm{d}y.$$

Kokoamalla edelliset yhteen saamme halutun tuloksen

$$|u(x) - u_D| \leq \frac{d^n}{n|D|} \int_D |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)|\ \mathrm{d}y,$$

ja todistus on valmis. $\square$

Nyt olemme valmiit todistamaan luvun päätuloksen.

Lause 3.12. *Olkoot D avaruuden $\mathbb{R}^n$ rajoitettu konveksi alue, $u \in C^1(D)$ integroituva alueessa D sekä $d = diam(D)$ alueen D halkaisija. Tällöin kaikilla $1 < p < \infty$ on voimassa*

$$||u - u_D||_{L^p} \leq \kappa(D) ||\nabla u||_{L^p},$$

vakiolla

$$\kappa(D) = \left(\frac{\omega_n}{|D|}\right)^{1-\frac{1}{n}} d^n.$$

Todistus. Aluksi arvioimme Lemman 3.8 avulla sekä siirrämme vakion integraalin ulkopuolelle, jolloin saamme

$$\begin{aligned}||u - u_D||_{L^p(D)} &= \left(\int_D |u(x) - u_D|^p\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_D \left|\frac{d^n}{n|D|} \int_D |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)|\ \mathrm{d}y\right|^p\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \\ &= \frac{d^n}{n|D|} \left(\int_D \left|\int_D |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)|\ \mathrm{d}y\right|^p\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{d^n}{n|D|} ||V_{1/n} |\nabla u|||_{L^p(D)}.\end{aligned}$$

Nyt Lemman 3.2 perusteella tiedämme, että

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{n|D|}||V_{1/n}|\nabla u|||_{L^p(D)} &\leq \frac{d^n}{n|D|} \cdot n \cdot \omega_n^{1-\frac{1}{n}} \cdot |D|^{\frac{1}{n}} ||\nabla u||_{L^p(D)} \\ &= \left(\frac{\omega_n}{|D|}\right)^{1-\frac{1}{n}} \cdot d^n \cdot ||\nabla u||_{L^p(D)}.\end{aligned}$$

Kokoamalla arviot yhteen saamme väitteen

$$||u - u_D||_{L^p(D)} \leq \left(\frac{\omega_n}{|D|}\right)^{1-\frac{1}{n}} d^n ||\nabla u||_{L^p(D)}.$$

□

Luvun päätteeksi todistamme kaksi apulausetta, joita käytämme myöhemmin. Todistukset pohjautuvat väitöskirjan [5] Lemmojen 2.3 ja 5.1 todistuksiin.

Lemma 3.13. *Olkoot $1 < p < \infty$, rajoitettu alue D Lebesgue-mitallinen, joukko A, $|A| > 0$, sen osajoukko sekä funktio $u \in L^p(D)$. Tällöin pätee*

$$\left(\int_D |u(y) - u_A|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\left(\frac{|D|}{|A|}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_D |u(y) - c|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

kaikilla vakioilla $c \in \mathbb{R}$.

Todistus. Ensin teemme apuarvion. Koska $|u_A - c|^p \in \mathbb{R}$ on vakio, kun funktio u on kiinnitetty, saamme laskemalla

$$\begin{aligned}\left(\int_D |u_A - c|^p \, \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(|u_A - c|^p \int_D 1 \, \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} = |u_A - c| \cdot |D|^{\frac{1}{p}} \\ &= |D|^{\frac{1}{p}} \cdot \left|\frac{1}{|A|}\int_A u(y) \, \mathrm{d}y - c\right|.\end{aligned}$$

Tiedämme, että

$$\begin{aligned}\frac{1}{|A|}\int_A u(y) \, \mathrm{d}y - c &= \frac{1}{|A|}\int_A u(y) \, \mathrm{d}y - \frac{1}{|A|} \cdot |A| \cdot c = \frac{1}{|A|}\int_A u(y) \, \mathrm{d}y - \frac{1}{|A|} \cdot \int_A 1 \, \mathrm{d}y \cdot c \\ &= \frac{1}{|A|}\int_A u(y) \, \mathrm{d}y - \frac{1}{|A|} \cdot \int_A c \, \mathrm{d}y = \frac{1}{|A|}\int_A (u(y) - c) \, \mathrm{d}y,\end{aligned}$$

joten saamme

$$|D|^{\frac{1}{p}} \cdot \left|\frac{1}{|A|}\int_A u(y) \, \mathrm{d}y - c\right| = |D|^{\frac{1}{p}} \cdot \left|\frac{1}{|A|}\int_A (u(y) - c) \, \mathrm{d}y\right|.$$

Viemällä itseisarvon integraalin sisään voimme kirjoittaa

$$|D|^{\frac{1}{p}} \cdot \left| \frac{1}{|A|} \int_A (u(y) - c) \, \mathrm{d}y \right| \leq \frac{|D|^{1/p}}{|A|} \int_A |u(y) - c| \, \mathrm{d}y.$$

Hölderin epäyhtälön avulla, järjestelemällä sekä tiedon $A \subset D$ nojalla saamme

$$\begin{aligned}
\frac{|D|^{1/p}}{|A|} \int_A |u(y) - c| \cdot |1| \, \mathrm{d}y &\leq \frac{|D|^{1/p}}{|A|} \cdot \left(\int_A |u(y) - c|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_A |1|^{\frac{p}{p-1}} \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \frac{|D|^{1/p}}{|A|} \cdot \left(\int_A |u(y) - c|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \cdot |A|^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \left(\frac{|D|}{|A|} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_A |u(y) - c|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\frac{|D|}{|A|} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_D |u(y) - c|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Siis on voimassa

$$\left(\int_D |u_A - c|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{|D|}{|A|} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_D |u(y) - c|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.14}$$

Minkowskin epäyhtälön perusteella tiedämme, että

$$\begin{aligned}
\left(\int_D |u(y) - u_A|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_D |(u(y) - c) + (c - u_A)|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_D |u(y) - c|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_D |u_A - c|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

ja käyttämällä edelliseen arviota (3.14) voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned}
&\left(\int_D |u(y) - c|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_D |u_A - c|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq\ &\left(\int_D |u(y) - c|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{|D|}{|A|} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_D |u(y) - c|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \\
=\ &\left[1 + \left(\frac{|D|}{|A|} \right)^{\frac{1}{p}} \right] \cdot \left(\int_D |u(y) - c|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Koska joukko A on joukon D osajoukko, pätee $|D|/|A| \geq 1$. Saamme siten arvion

$$\left[1 + \left(\frac{|D|}{|A|}\right)^{\frac{1}{p}}\right] \leq 2\left(\frac{|D|}{|A|}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Olemme saaneet halutun epäyhtälön

$$\left(\int_D |u(y) - u_A|^p \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\left(\frac{|D|}{|A|}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_D |u(y) - c|^p \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Lemma 3.15. *Olkoon D_1 ja D_2 rajoitettuja avaruuden $\mathbb{R}^n$ alueita siten, että $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Jos Poincarén epäyhtälö (1.1), kun $1 \leq p < \infty$, on voimassa alueissa D_1 ja D_2 vakioin $\kappa(D_i)$, $i = 1, 2$, niin se on voimassa myös yhdisteessä $D_1 \cup D_2$ vakiolla*

$$\kappa(D_1 \cup D_2) = \frac{4}{|D_1 \cap D_2|^{1/p}} \left(|D_1|^{\frac{1}{p}} \kappa(D_1) + |D_2|^{\frac{1}{p}} \kappa(D_2)\right).$$

Todistus. Lemman 3.13 perustella voimme arvioida ensin

$$\begin{aligned}\left(\int_{D_1 \cup D_2} |u(y) - u_{D_1 \cup D_2}|^p \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} &\leq 2 \cdot \left(\frac{|D_1 \cup D_2|}{|D_1 \cup D_2|}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{D_1 \cup D_2} |u(y) - u_{D_1 \cap D_2}|^p \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2 \cdot \left(\int_{D_1 \cup D_2} |u(y) - u_{D_1 \cap D_2}|^p \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Korottamalla nyt edellä lasketun arvion puolitain potenssiin p saamme

$$\int_{D_1 \cup D_2} |u(y) - u_{D_1 \cup D_2}|^p \,\mathrm{d}y \leq 2^p \cdot \int_{D_1 \cup D_2} |u(y) - u_{D_1 \cap D_2}|^p \,\mathrm{d}y. \tag{3.16}$$

Voimme hajottaa integraalin kahteen osaan

$$\int_{D_1 \cup D_2} |u(y) - u_{D_1 \cap D_2}|^p \,\mathrm{d}y \leq \int_{D_1} |u(y) - u_{D_1 \cap D_2}|^p \,\mathrm{d}y + \int_{D_2} |u(y) - u_{D_1 \cap D_2}|^p \,\mathrm{d}y.$$

Arvioimalla kahta jälkimmäistä integraalia Lemman 3.13 avulla, saamme

$$\int_{D_1} |u(y) - u_{D_1 \cap D_2}|^p \,\mathrm{d}y \leq 2^p \frac{|D_1|}{|D_1 \cap D_2|} \int_{D_1} |u(y) - u_{D_1}|^p \,\mathrm{d}y$$

ja

$$\int_{D_2} |u(y) - u_{D_1 \cap D_2}|^p \,\mathrm{d}y \leq 2^p \frac{|D_2|}{|D_1 \cap D_2|} \int_{D_2} |u(y) - u_{D_2}|^p \,\mathrm{d}y.$$

Sijoittamalla edelliset arvioon (3.16) ja ottamalla yhteisen tekijän, saamme

$$
\begin{aligned}
&\int_{D_1\cup D_2} |u(y) - u_{D_1\cup D_2}|^p \,\mathrm{d}y \\
&\leq 2^p \cdot \left(2^p \frac{|D_1|}{|D_1 \cap D_2|} \int_{D_1} |u(y) - u_{D_1}|^p \,\mathrm{d}y + 2^p \frac{|D_2|}{|D_1 \cap D_2|} \int_{D_2} |u(y) - u_{D_2}|^p \,\mathrm{d}y \right) \\
&= \frac{(2^p)^2}{|D_1 \cap D_2|} \cdot \left(|D_1| \int_{D_1} |u(y) - u_{D_1}|^p \,\mathrm{d}y + |D_2| \int_{D_2} |u(y) - u_{D_2}|^p \,\mathrm{d}y \right) \\
&= \frac{4^p}{|D_1 \cap D_2|} \sum_{i=1}^{2} |D_i| \int_{D_i} |u(y) - u_{D_i}|^p \,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Korottamalla ensin edellä lasketun ja sievennetyn arvion puolittain potenssiin $1/p$, arvioimalla $(|D_1| + |D_2|)^{1/p} \leq |D_1|^{1/p} + |D_2|^{1/p}$ ja käyttämällä Poincarén epäyhtälöä molempiin integraaleihin, saamme

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{D_1\cup D_2} |u(y) - u_{D_1\cup D_2}|^p \,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq\; & \frac{4}{|D_1 \cap D_2|^{1/p}} \sum_{i=1}^{2} |D_i|^{\frac{1}{p}} \left(\int_{D_i} |u(y) - u_{D_i}|^p \,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq\; & \frac{4}{|D_1 \cap D_2|^{1/p}} \sum_{i=1}^{2} |D_i|^{\frac{1}{p}} \kappa(D_i) \left(\int_{D_i} |\nabla u(y)|^p \,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \\
=\; & \frac{4}{|D_1 \cap D_2|^{1/p}} \sum_{i=1}^{2} \left(|D_i|^{\frac{1}{p}} \cdot \kappa(D_i) \right) \left(\int_{D_1\cup D_2} |\nabla u(y)|^p \,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}
$$

mikä todistaa väitteen. □

Luku 4

Poincarén epäyhtälö tähtimäisessä alueessa

Tässä luvussa todistamme Poincarén epäyhtälön (1.1) voimassaolon pisteen suhteen tähtimäisissä alueissa eksponenteilla $1 < p < \infty$.

Määritelmä 4.1. Rajoitettua aluetta D kutsutaan tähtimäiseksi pisteen $x_0 \in D$ suhteen, mikäli jokainen pisteestä x_0 lähtevä säde leikkaa alueen D reunan ∂D täsmälleen yhdessä pisteessä.

Käytämme seuraavia merkintöjä tuloksen todistuksessa: $\ell = \min\{|x_0 - q| \bigm| q \in \partial D\}$, $L = \max\{|x_0 - x| \bigm| x \in D\}$ sekä $B = B^n(x_0, \ell/2)$. Käsittelyn helpottamiseksi oletamme pisteen x_0 origoksi, $x_0 = 0$.

Aluksi todistamme tarpeellisen apulauseen.

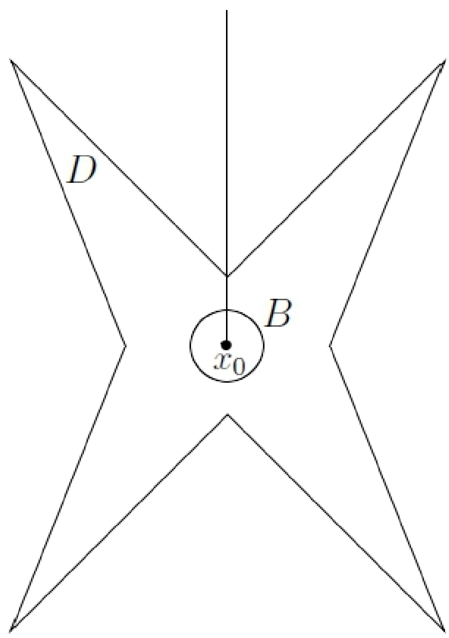
Lemma 4.2. *Jos $p \geq 1$, niin jonolle (a_j), missä $a_j \geq 0$ jokaisella indeksillä $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, pätee*

$$\left(\sum_{j=1}^{k} a_j \right)^p \leq k^{p-1} \sum_{j=1}^{k} a_j^p.$$

Todistus. Käyttämällä Hölderin epäyhtälöä jonoille saamme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} (a_j \cdot 1) &\leq \left(\sum_{j=1}^{k} a_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} 1^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{k} a_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot k^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Väitteen epäyhtälö seuraa korottomalla edellinen arvio puolittain potenssiin p. □



Kuva 4.1: Pisteen x_0 suhteen tähtimäinen alue D.

Seuraavan apulauseen todistuksen jätämme sen laajuuden vuoksi käsittelemättä. Todistus löytyy esimerkiksi kirjan [8] sivulta 316.

Lemma 4.3. *Olkoon $\mathcal{B} = B^n(0,r)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ pallo, $u\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, $u \in C^1(\overline{\mathcal{B}})$ sekä $1 < p < \infty$. Tällöin on olemassa luvuista n, p ja r riippuva vakio $c(n,p,r)$ siten, että*

$$||u||_{L^p(\partial\mathcal{B})} \leq c(n,p,r)\left(||u||_{L^p(\mathcal{B})} + ||\nabla u||_{L^p(\mathcal{B})}\right).$$

Lause 4.4. *Jos rajoitettu alue D on pisteen x_0 suhteen tähtimäinen, on Poincarén epäyhtälö (1.1) jokaisella $1 < p < \infty$ siinä voimassa Poincarén vakiolla κ, joka riippuu vain luvuista n, p, ℓ ja L.*

Todistus. Meidän on osoitettava, että epäyhtälö

$$\int_D |u(x) - u_D|^p \, \mathrm{d}x \le \kappa^p \int_D |\nabla u(x)|^p \, \mathrm{d}x \tag{4.5}$$

on voimassa, kun vakio κ riippuu vain luvuista n, p, ℓ ja L. Aluksi muokkaamme epäyhtälön (4.5) vasemman puolen Minkowskin epäyhtälön ja Hölderin epäyhtälön avulla kolmeksi integraaliksi, joita saamme arvioitua laskemalla sekä edellisen luvun tuloksen avulla.

Lemman 3.13 nojalla saamme

$$\int_D |u(x) - u_D|^p \, \mathrm{d}x \le 2^p \int_D |u(x) - u_B|^p \, \mathrm{d}x, \tag{4.6}$$

joten voimme tarkastella integraalia

$$\int_D |u(x) - u_B|^p \, \mathrm{d}x.$$

Ensiksi kirjoittamalla auki, järjestelemällä ja viemällä itseisarvomerkit integraalin sisään saamme

$$\begin{aligned}
\int_D |u(x) - u_B|^p \, \mathrm{d}x &= \int_D \left| u(x) - \frac{1}{|B|} \int_B u(y) \, \mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{|B|^p} \int_D \left| |B| u(x) - \int_B u(y) \, \mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{|B|^p} \int_D \left| u(x) \int_B 1 \, \mathrm{d}y - \int_B u(y) \, \mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{|B|^p} \int_D \left| \int_B u(x) \, \mathrm{d}y - \int_B u(y) \, \mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{|B|^p} \int_D \left| \int_B (u(x) - u(y)) \, \mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{|B|^p} \int_D \left(\int_B |u(x) - u(y)| \, \mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Siis pätee

$$\int_D |u(x) - u_B|^p \, \mathrm{d}x \le \frac{1}{|B|^p} \int_D \left(\int_B |u(x) - u(y)| \, \mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x. \tag{4.7}$$

Epäyhtälön (4.7) oikean puolen sisimmäistä integraalia voimme arvioida Hölderin epäyhtälöllä muotoon

$$\begin{aligned}\int_B |u(x)-u(y)|\cdot|1|\ \mathrm{d}y &\leq \left(\int_B |u(x)-u(y)|^p\ \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_B |1|^{\frac{p}{p-1}}\ \mathrm{d}y\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &= \left(\int_B |u(x)-u(y)|^p\ \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\cdot|B|^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

Sijoittamalla tämän epäyhtälöön (4.7) saamme

$$\begin{aligned}\int_D |u(x)-u_B|^p\ \mathrm{d}x &\leq \frac{1}{|B|^p}\int_D\left(\left(\int_B |u(x)-u(y)|^p\ \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\cdot|B|^{\frac{p-1}{p}}\right)^p\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{|B|^p}\int_D\int_B |u(x)-u(y)|^p\ \mathrm{d}y\cdot|B|^{p-1}\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{|B|^{p-1}}{|B|^p}\int_D\int_B |u(x)-u(y)|^p\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{|B|}\int_D\int_B |u(x)-u(y)|^p\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Tämän kaksinkertaisen integraalin käsittelemme kahdessa osassa. Voimme pilkkoa viimeisen integraalin käsittelyn palloon B sekä sen ulkopuolelle joukkoon $D\setminus B$ summaamalla

$$\begin{aligned}&\int_D\int_B |u(x)-u(y)|^p\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x\\ =&\int_B\int_B |u(x)-u(y)|^p\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x+\int_{D\setminus B}\int_B |u(x)-u(y)|^p\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Arvioidaan ensin integraalia pallossa. Minkowskin epäyhtälön sekä Lemman 4.2 nojalla saamme kaikilla $x,y\in B$ arvion

$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)|^p &= |u(x)-u_B+u_B-u(y)|^p\\ &\leq (|u(x)-u_B|+|u_B-u(y)|)^p\\ &\leq 2^{p-1}\cdot(|u(x)-u_B|^p+|u(y)-u_B|^p).\end{aligned}$$

Edellisen arvion avulla sekä järjestelemällä termejä uudelleen saamme

$$\begin{aligned}
&\int_B \int_B |u(x) - u(y)|^p \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
\leq \; & 2^{p-1} \left(\int_B \int_B |u(x) - u_B|^p \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_B \int_B |u(y) - u_B|^p \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \right) \\
= \; & 2^{p-1} \left(\int_B |u(x) - u_B|^p \, \mathrm{d}x \; \int_B 1\mathrm{d}y + \int_B |u(y) - u_B|^p \, \mathrm{d}y \; \int_B 1\mathrm{d}x \right) \\
= \; & 2^{p-1} \left(|B| \int_B |u(x) - u_B|^p \, \mathrm{d}x + |B| \cdot \int_B |u(y) - u_B|^p \, \mathrm{d}y \right) \\
= \; & 2^{p-1} \left(2 \cdot |B| \int_B |u(y) - u_B|^p \, \mathrm{d}y \right) \\
= \; & 2^p \cdot |B| \int_B |u(y) - u_B|^p \, \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Edellisen luvun Lauseessa 3.12 todistimme, että Poincarén epäyhtälö pätee konvekseissa alueissa. Koska pallo on konveksi, on voimassa

$$2^p \cdot |B| \int_B |u(y) - u_B|^p \, \mathrm{d}y \leq c_1(n,p) \ell^p |B| \int_B |\nabla u(y)|^p \, \mathrm{d}y,$$

missä $c_1(n,p)$ on luvuista n ja p riippuva vakio. Merkitsemme jäljempänä vastaavasti muita vakioita $c_i(n,p)$ indeksillä $i \in \mathbb{N}$. Siis olemme osoittaneet, että

$$\int_B \int_B |u(x) - u(y)|^p \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \leq c_1(n,p) \ell^p |B| \int_B |\nabla u(y)|^p \, \mathrm{d}y. \tag{4.10}$$

Seuraavaksi käsittelemme integraalin pallon ulkopuolella

$$\int_{D \setminus B} \int_B |u(x) - u(y)|^p \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Samalla tavalla kuin edellä, saamme Minkowskin epäyhtälön sekä Lemman 4.2 nojalla arvion

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)|^p &= \left| u(x) - u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right) + u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right) - u_B + u_B - u(y) \right|^p \\
&\leq 3^{p-1} \left(\left| u(x) - u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right) \right|^p + \left| u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right) - u_B \right|^p + |u(y) - u_B|^p \right).
\end{aligned}$$

Nyt vastaavasti voimme pilkkoa integraalin kolmeen osaan ja saamme

$$\begin{aligned}
\int_{D\setminus B}\int_B |u(x)-u(y)|^p \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq 3^{p-1}\Bigg(&\int_{D\setminus B}\int_B \left|u(x)-u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right)\right|^p \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&+\int_{D\setminus B}\int_B \left|u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right)-u_B\right|^p \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&+\int_{D\setminus B}\int_B |u_B-u(y)|^p \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\Bigg) \\
= 3^{p-1}\Bigg(&|B|\int_{D\setminus B} \left|u(x)-u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right)\right|^p \,\mathrm{d}x \\
&+|B|\int_{D\setminus B} \left|u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right)-u_B\right|^p \,\mathrm{d}x \\
&+|D\setminus B|\int_B |u(y)-u_B|^p \,\mathrm{d}y\Bigg).
\end{aligned}$$

Käsittelemme saadut kolme integraalia erikseen. Merkitsemme integraaleja

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \int_{D\setminus B} \left|u(x)-u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right)\right|^p \,\mathrm{d}x, \\
\mathcal{I}_2 &= \int_{D\setminus B} \left|u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right)-u_B\right|^p \,\mathrm{d}x \quad \text{ja} \\
\mathcal{I}_3 &= \int_B |u(y)-u_B|^p \,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Viimeisin integraali $\mathcal{I}_3$ on helpoin. Koska pallo B on konveksi, voimme edellisen luvun perusteella arvioida

$$\int_B |u(y)-u_B|^p \,\mathrm{d}y \leq c_2(n,p)\ell^p \int_B |\nabla u(y)|^p \,\mathrm{d}y.$$

Käsitellään seuraavaksi ensimmäinen integraali $\mathcal{I}_1$. Käsittelyn mahdollistamiseksi tehdään muuttujanvaihto pallokoordinaatteihin. Käymme ensin läpi tarvittavia merkintöjä. Olkoot piste yksikköpallon kuorella $\theta \in S^{n-1}(0,1)$, z yksikäsitteinen piste säteen $t\theta$, missä $t \geq 0$, ja reunan ∂D leikkauksessa sekä $R(\theta) = |z|$ tämän leikkauspisteen etäisyys origosta ($x_0 = 0$). Koska olemme pallon ulkopuolella integroimme etäisyyden suhteen välillä $[\ell/2, R(\theta)]$. Muunnoksen avulla voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned}
&\int_{D\setminus B} \left|u(x)-u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right)\right|^p \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{S^{n-1}(0,1)}\int_{\ell/2}^{R(\theta)} \left|u(r,\theta)-u\left(\frac{\ell}{2},\theta\right)\right|^p r^{n-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}m_{n-1}(\theta).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Analyysin peruslause antaa

$$u(r,\theta)-u\left(\frac{\ell}{2},\theta\right)=\int_{\ell/2}^{r}\partial_\alpha u(\alpha,\theta)\ \mathrm{d}\alpha,$$

ja edelleen Hölderin epäyhtälön avulla voimme arvioida

$$\begin{aligned}\int_{\ell/2}^{r}|\partial_\alpha u(\alpha,\theta)|\cdot|1|\ \mathrm{d}\alpha &\leq \left(\int_{\ell/2}^{r}|\partial_\alpha u(\alpha,\theta)|^p\ \mathrm{d}\alpha\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{\ell/2}^{r}|1|^{\frac{p}{p-1}}\ \mathrm{d}\alpha\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &= \left(\int_{\ell/2}^{r}|\partial_\alpha u(\alpha,\theta)|^p\ \mathrm{d}\alpha\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(r-\frac{\ell}{2}\right)^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

Edellisten avulla saamme

$$\begin{aligned}&\int_{\ell/2}^{R(\theta)}\left|u(r,\theta)-u\left(\frac{\ell}{2},\theta\right)\right|^p r^{n-1}\ \mathrm{d}r\\ &\leq\int_{\ell/2}^{R(\theta)}\left(r-\frac{\ell}{2}\right)^{p-1}\int_{\ell/2}^{r}|\partial_\alpha u(\alpha,\theta)|^p r^{n-1}\ \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{d}r.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Määritelmistä seuraavat suoraan epäyhtälöt

$$\frac{\ell}{2}\leq r\leq R(\theta)\leq L\qquad\text{ja}\qquad\frac{\ell}{2}\leq\alpha\leq r.$$

Arvioidaan nyt $(r-\ell/2)^{p-1}\leq r^{p-1}$ ja viedään termi integraalin sisään, jolloin saamme

$$\begin{aligned}&\int_{\ell/2}^{R(\theta)}\left(r-\frac{\ell}{2}\right)^{p-1}\int_{\ell/2}^{r}|\partial_\alpha u(\alpha,\theta)|^p\ r^{n-1}\ \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{d}r\\ &\leq\int_{\ell/2}^{R(\theta)}\int_{\ell/2}^{r}|\partial_\alpha u(\alpha,\theta)|^p\ r^{p-1+n-1}\ \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{d}r.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Arvioimalla ylöspäin, vaihtamalla integrointijärjestystä sekä integroimalla muuttujan r suhteen saamme

$$\begin{aligned}\int_{\ell/2}^{R(\theta)}\int_{\ell/2}^{r}|\partial_\alpha u(\alpha,\theta)|^p\ r^{p-1+n-1}\ \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{d}r &=\int_{\ell/2}^{R(\theta)}\int_{\ell/2}^{R(\theta)}|\partial_\alpha u(\alpha,\theta)|^p\ r^{p-1+n-1}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\alpha\\ &\leq\frac{L^{p+n-1}}{p+n-1}\int_{\ell/2}^{R(\theta)}|\partial_\alpha u(\alpha,\theta)|^p\ \mathrm{d}\alpha,\end{aligned}$$

ja edelleen sijoittamalla integroitavaan tulontekijäksi $1 = \alpha^{n-1}/\alpha^{n-1}$ ja arvioimalla

$$\frac{1}{\alpha^{n-1}} \leq \frac{1}{(\ell/2)^{n-1}} = \left(\frac{2}{\ell}\right)^{n-1}$$

sekä $|\partial_\alpha u(\alpha,\theta)| \leq |\nabla u(\alpha,\theta)|$ saamme

$$\begin{aligned} &\frac{L^{p+n-1}}{p+n-1} \int_{\ell/2}^{R(\theta)} |\partial_\alpha u(\alpha,\theta)|^p \, \mathrm{d}\alpha \\ \leq\ &\frac{L^{p+n-1}}{p+n-1} \left(\frac{2}{\ell}\right)^{n-1} \int_{\ell/2}^{R(\theta)} |\nabla u(\alpha,\theta)|^p \alpha^{n-1} \, \mathrm{d}\alpha. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Tehdään muuttujanvaihdos takaisin ja yhdistetään vakio, jolloin kokoamalla yhteen arviot (4.11), (4.12), (4.13) ja (4.14) saamme tarvittavan epäyhtälön

$$\int_{D\setminus B} \left| u(x) - u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right)\right|^p \, \mathrm{d}x \leq c_3(n,p,\ell,L) \int_{D\setminus B} |\nabla u(x)|^p \, \mathrm{d}x.$$

Arvioidaan lopuksi toinen integraali $\mathcal{I}_2$. Aluksi merkitsemme alueen yli integroinnin pallokuoren $S^{n-1}(0,r)$ sekä etäisyyden r suhteen integrointina sekä kasvatamme etäisyyden ylärajan suurimmaksi mahdolliseksi. Voimme siten kirjoittaa

$$\int_{D\setminus B} \left| u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right) - u_B\right|^p \, \mathrm{d}x \leq \int_{\ell/2}^{L} \int_{S^{n-1}(0,r)} \left| u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right) - u_B\right|^p \, \mathrm{d}m_{n-1}(x) \, \mathrm{d}r.$$

Kun vaihdamme integrointimuuttujan, saamme

$$\begin{aligned} &\int_{\ell/2}^{L} \int_{S^{n-1}(0,r)} \left| u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right) - u_B\right|^p \, \mathrm{d}m_{n-1}(x) \, \mathrm{d}r \\ =\ &\int_{\ell/2}^{L} \int_{S^{n-1}(0,\ell/2)} |u(z) - u_B|^p \frac{r^{n-1}}{(\ell/2)^{n-1}} \, \mathrm{d}m_{n-1}(z) \, \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Integroidaan jälkimmäinen termi muuttujan r suhteen, jolloin saamme

$$\int_{\ell/2}^{L} \frac{r^{n-1}}{(\ell/2)^{n-1}} \, \mathrm{d}r = \frac{2^n \cdot L^n - \ell^n}{2n\ell^{n-1}}.$$

Voimme siten kirjoittaa integraalin muodossa

$$\begin{aligned} &\int_{\ell/2}^{L} \int_{S^{n-1}(0,\ell/2)} |u(z) - u_B|^p \frac{r^{n-1}}{(\ell/2)^{n-1}} \, \mathrm{d}m_{n-1}(z) \, \mathrm{d}r \\ =\ &\frac{2^n \cdot L^n - \ell^n}{2n\ell^{n-1}} \int_{S^{n-1}(0,\ell/2)} |u(z) - u_B|^p \, \mathrm{d}m_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Lemman 4.3 perusteella sekä yhdistelemällä vakioita saamme

$$
\begin{aligned}
&\frac{2^n \cdot L^n - \ell^n}{2n\ell^{n-1}} \int_{S^{n-1}(0,\ell/2)} |u(z) - u_B|^p \,\mathrm{d}m_{n-1}(z) \\
\leq \quad & c_4(n,p,\ell,L) \cdot \frac{1}{\ell} \int_B |u(y) - u_B|^p \,\mathrm{d}y + \ell^{p-1} \int_B |\nabla u(y)|^p \,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Ensimmäisen integraalin voimme arvioida edellisen luvun Lauseen 3.12 perusteella

$$
\frac{1}{\ell} \int_B |u(y) - u_B|^p \,\mathrm{d}y \leq c_5(n,p)\ell^{p-1} \int_B |\nabla u(y)|^p \,\mathrm{d}y,
$$

joten yhdistämällä vakiot saamme integraalille $\mathcal{I}_2$ sopivan arvion

$$
\int_{D \setminus B} \left| u\left(\frac{\ell}{2|x|}x\right) - u_B \right|^p \,\mathrm{d}x \leq c_6(n,p,\ell,L) \int_B |\nabla u(y)|^p \,\mathrm{d}y.
$$

Nyt yhdistämällä integraalien $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ ja $\mathcal{I}_3$ arviot sekä vakiot saamme

$$
\begin{aligned}
\int_{D\setminus B} \int_B |u(x) - u(y)|^p \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \leq 3^{p-1} \cdot \Bigg(& |B| c_3(n,p,\ell,L) \int_{D\setminus B} |\nabla u(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
& + |B| c_6(n,p,\ell,L) \int_B |\nabla u(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
& + |D \setminus B| c_2(n,p)\ell^p \int_B |\nabla u(x)|^p \,\mathrm{d}x \Bigg) \\
= {} & c_7(n,p,\ell,L) \int_D |\nabla u(x)|^p \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Edellä laskemiemme arvioiden (4.10) ja (4.15) avulla saamme integraalien summalle (4.9) arvion

$$
\int_D \int_B |u(x) - u(y)|^p \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \leq c_8(n,p,\ell,L) \int_D |\nabla u(x)|^p \,\mathrm{d}x.
$$

Nyt sijoittamalla tämä arvioon (4.8) ja edelleen arvioon (4.6), saamme

$$
\int_D |u(x) - u_D|^p \,\mathrm{d}x \leq \kappa \int_D |\nabla u(x)|^p \,\mathrm{d}x,
$$

ja väite on näin todistettu. □

Luku 5

Huoneita ja käytäviä

Tässä luvussa esittelemme avaruuden $\mathbb{R}^n$ alueen, joka muodostuu peräkkäisistä kuutioista ("huoneet") ja niiden välisistä "käytävistä". Tämän jälkeen konstruoimme esimerkkifunktion, jonka avulla osoitamme, että Poincarén $(1, p)$-epäyhtälö

$$\int_D |u(y) - u_D| \, \mathrm{d}y \leq \kappa \left(\int_D |\nabla u(y)|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.1}$$

ei ole voimassa esitellyssä alueessa, mikäli eksponentti $p > 1$ on kyllin pieni. Tästä saamme seurauksena, että klassinen Poincarén epäyhtälö (1.1) ei myöskään ole voimassa tässä alueessa. Luvussa esitetyt esimerkki sekä todistukset pohjautuvat artikkeliin [4]. Aloitamme konstruoimalla "huoneita ja käytäviä" -alueen.

Määritelmä 5.2. Olkoot reaaliluvut $M > 1$ ja $a > 1$. Asetetaan luku $d_k = \sum_{i=1}^{k} M^{-i}$ ja $d_0 = 0$. Määritellään n-kuutio joukkona

$$D_{2i-1} = (d_{2i-2}, d_{2i-1}) \times \left(-\frac{1}{2} M^{-(2i-1)}, \frac{1}{2} M^{-(2i-1)} \right)^{n-1}$$

ja kahden kuution välinen käytävä joukkona

$$P_{2i} = [d_{2i-1}, d_{2i}] \times \left(-\frac{1}{2} M^{-2ai}, \frac{1}{2} M^{-2ai} \right)^{n-1} .$$

Yhdistämällä n-kuutiot ja käytävät saamme halutun alueen

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (D_{2i-1} \cup P_{2i}) .$$

Esimerkki 5.3. Hahmotellaan alue G tasossa $\mathbb{R}^2$ tapauksessa $M = a = 2$. Tällöin geometrisen summakaavan avulla luvulle d_k saamme esityksen

$$d_k = \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} = \frac{1 - 2^{-k}}{2 - 1} = 1 - 2^{-k}.$$

Kuutiot ovat siis tason neliöitä

$$D_{2i-1} = \left(1 - 2^{-(2i-2)}, 1 - 2^{-(2i-1)}\right) \times \left(-\frac{1}{2^{2i}}, \frac{1}{2^{2i}}\right)$$

ja käytävät tason suorakulmioita

$$P_{2i} = \left[1 - 2^{-(2i-1)}, 1 - 2^{-2i}\right] \times \left(-\frac{1}{2^{4i+1}}, \frac{1}{2^{4i+1}}\right).$$

Kuutioita ja käytäviä muodostuu siis seuraavasti:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\
P_2 &= \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \times \left(-\frac{1}{32}, \frac{1}{32}\right) \\
D_3 &= \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right) \times \left(-\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right) \\
P_4 &= \left[\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right] \times \left(-\frac{1}{512}, \frac{1}{512}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tapaus on esitetty Kuvassa 5.1.

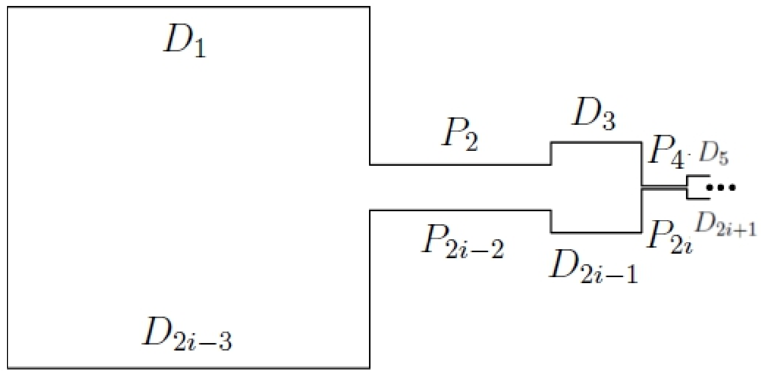
Huomautus 5.4. Alue G ei ole konveksi joukko.

Lause 5.5. *Poincarén* $(1, p)$*-epäyhtälö* (5.1) *ei ole voimassa alueessa* G*, jos*

$$1 \leq p \leq \frac{1}{n+1} \left(a(n-1) + 1\right).$$

Todistus. Laajennetaan aluetta G käsittelyä varten. Peilataan alue G tason $x_1 = 0$ suhteen ja merkitään tätä aluetta G_1. Määritellään lisäksi joukko

$$G_2 = \left(-\frac{1}{2}M^{-1}, \frac{1}{2}M^{-1}\right)^n.$$



Kuva 5.1: Huoneita ja käytäviä. Kuva on muokattu versio julkaisun [4] kuvasta.

Osoitetaan väite ensin oikeaksi laajennetussa alueessa $G \cup G_1 \cup G_2$ muodostamalla esimerkkifunktio, joka ei toteuta $(1, p)$-epäyhtälöä eksponentille p annetulla ehdolla.

Tarkastellaan kiinnitettyä kuutiota D_k, $k = 1, 3, 5, \ldots$, ja sen viereisiä käytäviä P_{k-1} ja P_{k+1}. Määritellään funktiot u_k kaavalla

$$u_k(x) = \begin{cases} M^{kn}, & \text{kun } x \in D_k \\ 0, & \text{kun } x \in G \setminus (P_{k-1} \cup D_k \cup P_{k+1}) \end{cases}.$$

Funktiot u_k määrittelevät jonon paloittain jatkuvia ja differentioituvia lineaarisia funktioita. Jatketaan funktiot u_k muuttujan x suhteen parittomiksi funktioiksi, $u_k(x) = -u_k(-x)$, joukkoon $G \cup G_1 \cup G_2$. Parittomuuden vuoksi on voimassa $u_{G \cup G_1 \cup G_2} = 0$.

Tiedämme, että

$$\begin{aligned} \int_{D_{2i-1}} 1 \, \mathrm{d}x &= (d_{2i-1} - d_{2i-2}) \cdot \left(\frac{1}{2} M^{-(2i-1)} - \left(-\frac{1}{2} M^{-(2i-1)} \right) \right)^{n-1} \\ &= M^{-(2i-1)} \cdot \left(M^{-(2i-1)} \right)^{n-1} = M^{-(2i-1)n}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Tiedon $D_{2i-1} \subset G$, funktion u_k määritelmän sekä laskun (5.6) perusteella saamme

$$\begin{aligned} \int_{G \cup G_1 \cup G_2} |u_{2i-1}(x)| \, \mathrm{d}x &\geq 2 \cdot \int_{D_{2i-1}} |u_{2i-1}(x)| \, \mathrm{d}x \\ &= 2 \cdot \int_{D_{2i-1}} M^{(2i-1)n} \, \mathrm{d}x = 2 \cdot M^{(2i-1)n} M^{-(2i-1)n} = 2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Siis $(1,p)$-epäyhtälön (5.1) vasen puoli on nyt vähintään 2, kun $D = G \cup G_1 \cup G_2$ kullakin $u_{2i-1}(x)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Osoitetaan seuraavaksi, että samassa tilanteessa epäyhtälön (5.1) oikea puoli pienenee mielivaltaisen pieneksi indeksin i kasvaessa.

Funktio u_{2i-1} on vakio muualla kuin kiinnitetyn kuution D_{2i-1} viereisissä käytävissä P_{2i-2} ja P_{2i} sekä näiden peilikuvissa. Siksi kaikkialla muualla kuin näissä käytävissä on voimassa $\nabla u_{2i-1}(x) = 0$, joten myös laskettava integraali tuolloin on 0. Saamme epäyhtälön (5.1) oikean puolen siten muotoon

$$\int_{G\cup G_1\cup G_2} |\nabla u_{2i-1}(x)|^p \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{P_{2i-2}} |\nabla u_{2i-1}(x)|^p \, \mathrm{d}x + 2 \cdot \int_{P_{2i}} |\nabla u_{2i-1}(x)|^p \, \mathrm{d}x. \tag{5.8}$$

Käsittelemme integraalit erikseen. Funktion $u_k(x)$ lineaarisuuden nojalla tiedämme jokaiselle $x \in P_{2i-1}$, että

$$|\nabla u_{2i-1}(x)| = \frac{M^{(2i-1)n}}{M^{-(2i-2)}},$$

ja siten ensimmäistä integraalia voimme arvioida

$$\begin{aligned}\int_{P_{2i-2}} |\nabla u_{2i-1}(x)|^p \, \mathrm{d}x &\le \int_{P_{2i-2}} \left(\frac{M^{(2i-1)n}}{M^{-(2i-2)}}\right)^p \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{M^{(2i-1)n}}{M^{-(2i-2)}}\right)^p \int_{P_{2i-2}} 1 \, \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{M^{(2i-1)n}}{M^{-(2i-2)}}\right)^p M^{-(2i-2)} M^{-(2i-2)a(n-1)},\end{aligned}$$

jota edelleen sieventämällä saamme

$$\begin{aligned}&\left(\frac{M^{(2i-1)n}}{M^{-(2i-2)}}\right)^p M^{-(2i-2)} M^{-(2i-2)a(n-1)} \\ =\ & M^{(2i-1)np+(2i-2)p} M^{-(2i-2)-(2i-2)a(n-1)} \\ =\ & M^{np+(2i-2)np+(2i-2)p} M^{-(2i-2)-(2i-2)a(n-1)} \\ =\ & M^{np} M^{(2i-2)np+(2i-2)p-(2i-2)-(2i-2)a(n-1)} \\ =\ & M^{np} M^{-(2i-2)[-np-p+1+a(n-1)]}.\end{aligned}$$

Vastaavasti saamme laskettua toisen käytävän P_{2i} integraalille ylärajan

$$\begin{aligned}\int_{P_{2i}} |\nabla u_{2i-1}(x)|^p \, \mathrm{d}x &\le \left(\frac{M^{(2i-1)n}}{M^{-2i}}\right)^p M^{-2i} M^{-2ia(n-1)} \\ &= M^{-np} M^{-2i[-np-p+1+a(n-1)]}.\end{aligned}$$

Alkuperäistä integraalia (5.8) saamme siis arvioitua

$$
\begin{aligned}
&\int_{P_{2i-2}} |\nabla u_{2i-1}(x)|^p \ \mathrm{d}x + \int_{P_{2i}} |\nabla u_{2i-1}(x)|^p \ \mathrm{d}x \\
&\leq M^{np} M^{-(2i-2)[-np-p+1+a(n-1)]} + M^{-np} M^{-2i[-np-p+1+a(n-1)]}.
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Kun $i \to \infty$ ja $-np - p + 1 + a(n-1) > 0$, eli kun

$$p < \frac{1}{n+1}\left(a(n-1)+1\right),$$

arvion (5.9) yläraja pienenee mielivaltaisen pieneksi. Siis Poincarén $(1,p)$-epäyhtälön oikea puoli pienenee mielivaltaisen pieneksi indeksin i kasvaessa. Olemme nyt osoittaneet, että Poincarén $(1,p)$-epäyhtälö ei ole voimassa alueessa $G \cup G_1 \cup G_2$, kun

$$1 \leq p < \frac{1}{n+1}\left(a(n-1)+1\right).$$

Tutkitaan vielä yhtäsuuruus. Olkoon

$$p = \frac{1}{n+1}\left(a(n-1)+1\right).$$

Osoitetaan, että tällöin summafunktio

$$v_m(x) = \sum_{k=1}^{m} u_{4k-1}(x),$$

kun $m \in \mathbb{N}$, ei toteuta Poincarén $(1,p)$-epäyhtälöä alueessa $G \cup G_1 \cup G_2$. Koska v_m on pariton funktio, on sen integraalikeskiarvo nolla alueessa $G \cup G_1 \cup G_2$.

Havaitsemme, että funktiossa v_m on m yhteenlaskettavaa funktiota u_k. Siis tarkasteltavana on m kuutiota, joissa funktiot u_k saavat nollasta poikkeavan arvon. Epäyhtälön (5.7) perusteella jokaisessa kuutiossa voimme arvioida integraalin arvoksi vähintään luvun yksi. Tällöin yhteensä m kuutiossa voimme arvioida

$$\int_{G\cup G_1 \cup G_2} |v_m(x) - v_{G\cup G_1\cup G_2}| \ \mathrm{d}x \geq \int_G |v_m(x)| \ \mathrm{d}x \geq m.$$

Vastaavasti jokaisen kuution viereisissä käytävissä voimme arvioida funktion u_{2i-1} gragienttin integraalia epäyhtälön (5.9) avulla. Saamme siten integraalille arvion

$$\int_{P_{2i-2}\cup P_{2i}} |\nabla u_{2i-1}(x)|^p \ \mathrm{d}x \leq c(p,n).$$

Kaikissa m eri kuution viereisissä käytävissä, ja siten koko joukossa G, saamme siten arvion

$$\int_{G \cup G_1 \cup G_2} |\nabla v_m(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq 2 \cdot \int_G |\nabla v_m(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq m \cdot c(p,n).$$

Tällöin saamme osamääräälle alarajan

$$\frac{\int_{G \cup G_1 \cup G_2} |v_m(x)| \,\mathrm{d}x}{\left(\int_{G \cup G_1 \cup G_2} |\nabla v_m(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}} \geq m^{1-\frac{1}{p}} \cdot c(p,n),$$

joka kasvaa rajatta, kun $m \to \infty$. Siis Poincarén $(1,p)$-epäyhtälö ei ole voimassa.

Olemme osoittaneet löytämällä esimerkkifunktiot, että Poincarén $(1,p)$-epäyhtälö (5.1) ei ole voimassa alueessa $G \cup G_1 \cup G_2$, kun

$$1 \leq p \leq \frac{1}{n+1}\left(a(n-1)+1\right).$$

Koska epäyhtälö ei ole voimassa yhdisteessä $G \cup G_1 \cup G_2$ ja epäyhtälö on voimassa kuutiossa G_2, niin Lemman 3.15 nojalla voimme päätellä, ettei se ole voimassa alueessa G eikä alueessa G_1, ja väite on näin todistettu. $\square$

Korollaari 5.10. *Poincarén epäyhtälö* (1.1) *ei ole voimassa alueessa G, kun*

$$1 \leq p \leq \frac{1}{n+1}\left(a(n-1)+1\right).$$

Todistus. Osoitamme, että Poincarén epäyhtälö (1.1) ei ole voimassa alueessa G, koska Poincarén $(1,p)$-epäyhtälö (5.1) ei ole siinä voimassa. Vastaavalla tavalla kuin aiemmin, saamme Hölderin epäyhtälön avulla arvion

$$\int_G |u(y) - u_G| \,\mathrm{d}y \leq |G|^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_G |u(y) - u_G|^p \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}},$$

josta väite seuraa. $\square$

Kirjallisuutta

[1] Richard Courant ja David Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, Vol. II, Springer, Berlin, 1937.

[2] Lawrence C. Evans: Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence RI, 1998.

[3] David Gilbarg ja Neil Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1977.

[4] Petteri Harjulehto ja Ritva Hurri-Syrjänen: On a (q,p)-Poincaré inequality, J. Math. Anal. Appl. (**337**), 2008, 61–68.

[5] Ritva Hurri: Poincaré domains in $\mathbb{R}^n$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. Diss. (**71**), Helsinki, 1988.

[6] Ilkka Holopainen: Mitta ja integraali luentomuistiinpanot, Helsingin yliopisto, 2004.

[7] Ilkka Holopainen: Reaalianalyysi I luentomuistiinpanot, Helsingin yliopisto, 2012.

[8] Alois Kufner, Oldřich John ja Svatopluk Fučík: Function Spaces, Noordhoff International Publishing. A division of A. W. Sijthoff International Publishin Company B. V., Leyden. Academia, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1977.

[9] Jan Malý ja William P. Ziemer: Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence RI, 1997.

[10] Olli Martio: Vektorianalyysi, Limes, Helsinki, 2004

[11] Dragoslav Mitrinović: Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1970.

[12] Otto Nikodým: Sur une classe de fonctions considérées dans le probléme de Dirichlet, Fundam. Math. (**21**), 1933, 129 – 150.