

Hana ŠIMONOVÁ<sup>1</sup>, Ivana HAVLÍKOVÁ<sup>2</sup>, Zbyněk KERŠNER<sup>3</sup>

STUDIE STATISTICKÉHO CHOVÁNÍ GUMBELOVA MODELU  
ÚNAVOVÉ ODEZVY BETONŮ TŘÍD C30/37 A C45/55

STUDY OF STATISTICAL BEHAVIOUR OF GUMBEL MODEL  
OF PLAIN C30/37 AND C45/55 CLASS CONCRETE FATIGUE RESPONSE

### Abstrakt

Cílem příspěvku je představit a porovnat hodnoty základních únavových parametrů betonů pevnostních tříd C30/37 a C45/55 získané z cyklických testů těles. Pro popis únavové  $S-N$  křivky je v příspěvku použit nelineární regresní model vyvinutý Castillem a kol., založený na Gumbelovu rozdělení pravděpodobnosti. Autoři se v tomto článku zaměřují na analýzu proměnlivosti naměřených hodnot základních únavových parametrů betonů těles z výše uvedených tříd s využitím pravděpodobnostního softwaru FReET.

### Klíčová slova

Beton, únava, aproximace, Gumbelovo rozdělení pravděpodobnosti, software FReET.

### Abstract

The aim of this paper is to present and compare values of basic fatigue parameters obtained for plain C30/37 and C45/55 class concrete specimens during dynamic tests with consideration of their variability. The Gumbel distribution utilized by Castillo et al. in a nonlinear regression model is applied for standard description of the  $S-N$  curve. The authors focus on the analysis of the variability of the values measured for the basic fatigue parameters of the above mentioned classes of concrete specimens using the FReET probabilistic software.

### Keywords

Concrete, fatigue, approximation, Gumbel distribution, software FReET.

## 1 ÚVOD

Beton v současnosti patří k nejpoužívanějším stavebním materiálům také pro prvky a konstrukce dynamicky zatěžované. Provádění zkoušek cyklicky namáhaných betonových prvků či konstrukcí je nákladné, z tohoto důvodu může numerické modelování představovat efektivní přístup pro předpověď procesu poškozování a únavové životnosti těchto konstrukcí za různých provozních podmínek. Pro efektivní použití numerického (materiálového) modelu při řešení odezvy konstrukce na dané zatížení bývá třeba „naladit“ parametry modelu pomocí experimentálně získaných dat. Adekvátní vyhodnocení únavových experimentů se tak stává nutnou podmínkou pro korektní použití numerického modelu v praxi.

---

<sup>1</sup> Ing. Hana Šimonová, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 116, e-mail: simonova.h@fce.vutbr.cz.

<sup>2</sup> Ing. Ivana Havlíková, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 116, e-mail: havlikova.i@fce.vutbr.cz.

<sup>3</sup> prof. Ing. Zbyněk Keršner, CSc., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 362, e-mail: kersner.z@fce.vutbr.cz.

Pro posuzování únavové životnosti konstrukčních prvků je v technické praxi všeobecně přijímán přístup založený na empiricky odvozených  $S-N$  diagramech známých jako Wöhlerovy křivky, tj. grafy zobrazující závislost napětí ( $S$ ) na počtu zatěžovacích cyklů do porušení ( $N$ ); tento postup byl použit v [1]. Další možností je vyhodnocení dynamických zkoušek pomocí nelineárního regresního modelu vyvinutého Castillem a kol., a to buď na základě Weibullova rozdělení pravděpodobnosti, který byl využit v [2], nebo Gumbelova rozdělení, který je použit v tomto příspěvku. Poznamenejme již na tomto místě, že výsledky získané pomocí obou zmíněných modelů pro analyzovaná data vycházejí obdobně.

Hlavním cílem předkládaného článku je uvedení vybraných výsledků provedené analýzy proměnlivosti vstupních parametrů regresního modelu, využívajícího naměřené hodnoty základních únavových parametrů betonů těles z výše uvedených tříd. K analýzám byl použit pravděpodobnostní software FReET.

## 2 SHRNUTÍ VÝSLEDKŮ DYNAMICKÝCH ZKOUŠEK

Výsledky dříve proběhlých únavových zkoušek třibodově ohybaných trámů  $100 \times 100 \times 400$  mm s počátečním centrálním zářezem hloubky 10 mm při různé maximální úrovni napětí jsou shrnuty na Obr. 1 a Obr. 2 pro beton pevnostní třídy C30/37 a C45/55; maximální nominální normálové napětí při ohybu ( $S$ ) je v obrázcích vynášeno v závislosti na logaritmu počtu cyklů do porušení ( $N$ ). K popisu experimentálně získaných dat byl použit vztah, který vychází z Gumbelova rozdělení využitého Castillem a kol. [3], v následujícím tvaru:

$$S = \exp \left( \frac{\log \left( \log \left( \frac{1}{1-P} \right) \right) \delta + \lambda}{\log N - B} + C \right) \quad (1)$$

kde:

$\log$  – značí přirozený logaritmus,

$N$  – je únavová životnost měřená v cyklech,

$S$  – napětí,

$P$  – pravděpodobnost porušení,

$B$  – prahová hodnota životnosti,

$C$  – prahová hodnota  $S$  nebo mezní odolnost,

$\delta$  a  $\lambda$  – jsou parametry Gumbelova rozdělení pravděpodobnosti.

Analytický výraz pro popis  $S-N$  pole v tomto tvaru umožňuje pravděpodobnostní predikci maximální konstantní amplitudy zatížení pro požadovaný počet cyklů.

Pro získání korektních hodnot únavových parametrů odpovídajících stáří vzorků, při kterém se prováděly únavové zkoušky, byly naměřené hodnoty poděleny koeficienty určenými z aproximačních křivek relativních hodnot pevnosti v tlaku. Tímto postupem se standardizovala naměřená data na stáří zkušebních těles 28 dní – podrobnosti viz [4].

S využitím modelu Castilla a kol. byly získány analytické vztahy pro betony pevnostní třídy C30/37 a C45/55 podle rovnice (1) s hodnotami parametrů uvedenými v níže komentované Tab. 1, přičemž pro následnou statistickou analýzu je uvažována pravděpodobnost porušení  $P = 0,50$ .

## 3 ANALÝZA ÚNAVOVÝCH FUNKCÍ S VYUŽITÍM SOFTWARE FReET

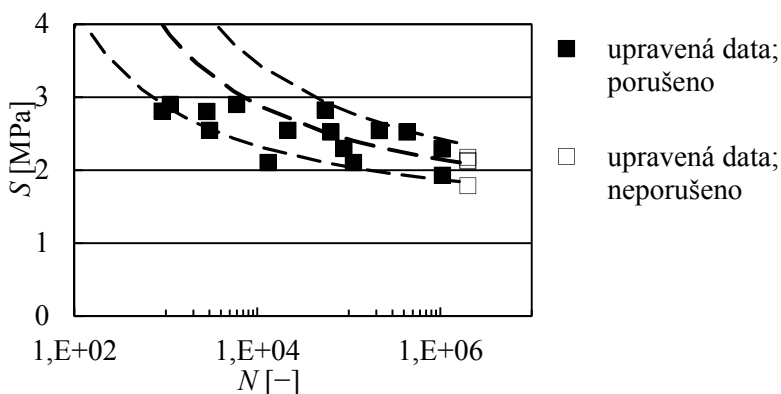
Následně byla provedena statistická analýza výše zmíněných únavových funkcí s využitím pravděpodobnostního softwaru FReET [5], kdy vybrané parametry  $S-N$  křivky (1) byly v této pilotní studii uvažovány jako náhodné veličiny s dvouparametrickým log-normálním rozdělením [6]. Střední

hodnoty parametrů jsou spolu s příslušnými hodnotami variačních koeficientů (COV) jednotlivých parametrů shrnuty v Tab. 1.

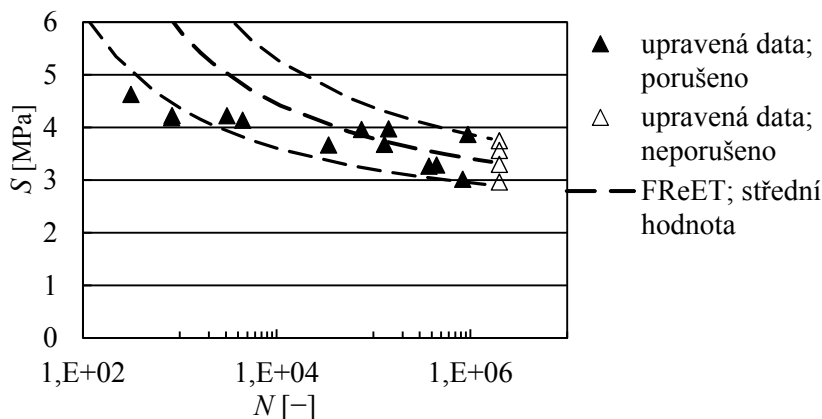
Tab. 1: Vstupní veličiny pro statistickou analýzu v programu FReET

Parametr		Typ rozdělení náhodné veličiny	Střední hodnota [-]	COV [%]
B	C30/37	Deterministické	0,00	–
	C45/55	Deterministické	0,00	–
C	C30/37	Log-normální (2 par)	0,18	15
	C45/55	Log-normální (2 par)	0,70	10
$\delta$	C30/37	Log-normální (2 par)	1,24	15
	C45/55	Log-normální (2 par)	1,48	10
$\lambda$	C30/37	Log-normální (2 par)	8,43	20
	C45/55	Log-normální (2 par)	7,69	20

O vybraných výsledcích naznačených statistických analýz si lze učinit představu z Obr. 1 a 2, kde jsou v  $S-N$  diagramu standardizovaná naměřená data obou betonů doplněna výstupy programu FReET (střední hodnoty a +/- směrodatné odchylky (STD)).



Obr. 1: Naměřená data a výsledky analýzy únavových křivek pro beton pevnostní třídy C30/37



Obr. 2: Naměřená data a výsledky analýzy únavových křivek pro beton pevnostní třídy C45/55

Pomocí programu FReET byla provedena také citlivostní analýza obou únavových modelů (detaily lze nalézt např. v [5]). Za zmínku stojí, že vyšší stupeň závislosti proměnlivosti vstupního parametru na proměnlivosti únavového modelu vykázal pro oba betony jen bezrozměrný parametr  $\lambda$  (téměř roven 1 pro beton C30/37 a 0,97–0,99 pro beton C45/55). Nízké stupně této závislosti dosahovaly další uvažované náhodné parametry únavového modelu pro betony C30/37 a C45/55 v následujících mezích [-]:  $\delta$  (-0,04)–(-0,08) a (-0,03)–(-0,10);  $C$  0,04–0,11 a 0,06–0,11.

#### 4 ZÁVĚR

V příspěvku byly prezentovány především výsledky studie proměnlivosti korigovaných naměřených hodnot základních únavových parametrů získaných na zkušebních tělesech z betonů tříd C30/37 a C45/55 pomocí pravděpodobnostního softwaru FReET. Bylo zkoumáno statistické chování nelineárního regresního modelu vyvinutého Castillem a kol. na základě Gumbelova rozdělení pravděpodobnosti. Výchozí hodnoty COV odpovídajících parametrů uvedených v Tab. 1 byly – s ohledem na dříve provedené studie proměnlivosti parametrů Wöhlerovy křivky a nelineárního regresního modelu založeného na Weibullovu rozdělení [1, 2] – uvažovány hodnotou 15 % pro beton pevnostní třídy C30/37, resp. 10 % pro beton C45/55. Z předložené studie statistického chování modelu únavové odezvy výše zmíněných betonů vyplývá, že zvolené výchozí hodnoty COV jsou dostačující pro parametry  $C$  a  $\delta$ . Proměnlivost bezrozměrného parametru  $\lambda$  je pro přesnější vystižení závislosti maximálního nominálního normálového napětí při ohybu na logaritmu počtu cyklů do porušení nutné uvažovat hodnotou COV 20 % pro obě pevnostní třídy betonu. Obdobné výsledky byly získány i pro nelineární regresní model vyvinutý Castillem a kol. na základě Weibulla rozdělení [2].

#### PODĚKOVÁNÍ

Práce na příspěvku byly podporovány projektem juniorského specifického vysokoškolského výzkumu na VUT v Brně registrovaným na VUT pod č. FAST-J-12-5/1566, přičemž se částečně využilo výsledků projektu GA ČR č. P104/11/0833.

#### LITERATURA

- [1] ŠIMONOVÁ, H., I. HAVLÍKOVÁ a Z. KERŠNER. Statistická analýza únavových křivek betonů třídy C30/37 a C45/55. In: *Sborník příspěvků konference 19. Betonářské dny 2012*. Praha: ČBS servis, s. r. o., 2012, s. 418–421. ISBN 978-80-87158-32-6.
- [2] ŠIMONOVÁ, H., I. HAVLÍKOVÁ a Z. KERŠNER. Studie statistického chování Weibullova nelineárního modelu únavové odezvy betonů tříd C30/37 a C45/55. In: *Sborník doktorské konference Víceúrovňový design pokrokových materiálů*. Brno: Ústav fyziky materiálů AV ČR, v. v. i., 2012, s. 81–86. ISBN 978-80-87434-06-2.
- [3] CASTILLO, E. and A. FERNÁNDEZ-CANTELI. *A Unified Statistical Methodology for Modeling Fatigue Damage*. Springer Netherlands, 2009. ISBN 978-1-4020-9181-0.
- [4] ŠIMONOVÁ, H., Z. KERŠNER, S. SEITL, D. PRYL a R. PUKL. Korekce únavových parametrů betonu s využitím aproximací lomově-mechanických parametrů v čase. *BETON TKS*. Praha: Beton TKS, s. r. o., 2012, roč. 12, č. 1/2012, s. 57–59. ISSN 1213-3116.
- [5] NOVÁK, D., M. VOŘECHOVSKÝ a R. RUSINA. FReET v. 1.5 – program documentation, User's and Theory Guides, Brno, <http://www.freet.cz>.
- [6] JCSS. JCSS Probabilistic Model Code. Joint Committee on Structural Safety, Zurich, 2006, <http://www.jcss.ethz.ch/>.

#### Oponentní posudek vypracoval:

Ing. Petr Konečný, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.

Ing. Miroslav Sýkora, Ph.D., Oddělení spolehlivosti konstrukcí, Kloknerův ústav, ČVUT v Praze.