

УДК 330.1:519.8:621.39:004(470+571)  
JEL C02, C53, D43, D5, L96

DOI: <http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.12.2018.3.468-480>

И. А. БИРЮКОВА<sup>1</sup>

М. И. ГЕРАСЬКИН<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева (Самарский университет), г. Самара, Россия

## АНАЛИЗ РЕФЛЕКСИВНОЙ ИГРЫ АГЕНТОВ НА ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОМ РЫНКЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХ РЕФЛЕКСИРУЮЩИХ АГЕНТОВ

**Бирюкова Инна Андреевна**, студент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева (Самарский университет)  
Адрес: 443086, г. Самара, ул. Московское шоссе, 34, тел.: +7 (846) 267-44-96  
E-mail: [Tatisamara-75@mail.ru](mailto:Tatisamara-75@mail.ru)  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1505-7344>  
Researcher ID: <http://www.researcherid.com/rid/J-4423-2017>

*Контактное лицо:*

**Гераськин Михаил Иванович**, доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой математических методов в экономике Института экономики и управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева (Самарский университет)  
Адрес: 443086, г. Самара, ул. Московское шоссе, 34, тел.: +7 (846) 267-44-96  
E-mail: [innovation@ssau.ru](mailto:innovation@ssau.ru)  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0381-5830>  
Researcher ID: <http://www.researcherid.com/rid/F-9518-2016>

**Цель:** рефлексивный анализ возможных структур распределения рынка олигополии.

**Методы:** теория игр, экономико-математическое моделирование.

**Результаты:** в игре трех олигополистов проанализированы возможные варианты равновесий на произвольных рангах стратегической рефлексии двух рефлекслирующих агентов; моделирование информационных равновесий телекоммуникационного рынка РФ показало возможные стратегии улучшения рыночных позиций агентов.

**Научная новизна:** рассмотрено равновесие на рынке олигополии с тремя агентами, два из которых рефлекслируют, а третий действует в соответствии с их представлениями. Получено решение всех имеющихся вариантов равновесий на произвольных рангах рефлексии при линейных функциях спроса и издержек. Проведено моделирование информационных равновесий телекоммуникационного рынка Российской Федерации.

**Практическая значимость:** полученные информационные равновесия могут использоваться при сопоставлении со структурой рынка телекоммуникаций России для определения типа рефлексивного поведения компаний.

**Ключевые слова:** экономика и управление народным хозяйством; рефлексивная игра; олигополия; равновесие Курно – Штакельберга; телекоммуникационный рынок

*Конфликт интересов: авторами не заявлен.*

**Как цитировать статью:** Бирюкова И. А., Гераськин М. И. Анализ рефлексивной игры агентов на телекоммуникационном рынке для случая двух рефлекслирующих агентов // Актуальные проблемы экономики и права. 2018. Т. 12, № 3. С. 468–480. DOI: <http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.12.2018.3.468-480>

I. A. BIRYUKOVA<sup>1</sup>

M. I. GERAS'KIN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University named after Academician S. P. Korolev (Samara University), Samara, Russia

## ANALYSIS OF REFLECTIVE GAME OF AGENTS IN TELECOMMUNICATIONS MARKET FOR A CASE OF TWO REFLECTIVE AGENTS

**Inna A. Biryukova**, student, Samara National Research University named after Academician S. P. Korolev (Samara University)

Address: 34 Moskovskoye shosse, 443086 Samara, tel.: +7 (846) 267-44-96

E-mail: Tatisamara-75@mail.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1505-7344>

Researcher ID: <http://www.researcherid.com/rid/J-4423-2017>

Contact:

**Mikhail I. Geras'kin**, Doctor of Economics, Professor, Head of the Department of Mathematical Methods in Economics of the Institute of Economics and Management, Samara National Research University named after Academician S. P. Korolev (Samara University)

Address: 34 Moskovskoye shosse, 443086 Samara, tel.: +7 (846) 267-44-96

E-mail: innovation@ssau.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0381-5830>

Researcher ID: <http://www.researcherid.com/rid/F-9518-2016>

**Objective:** comparative analysis of reflexive and non-reflexive strategies of market agents' behavior in accordance with Stackelberg equilibrium.

**Methods:** game theory, economic and mathematical modeling.

**Results:** modeling of information equilibria of the Russian telecommunications market is carried out. In the game of three oligopolists on arbitrary ranks of strategic reflection of two of them, the possible variants of equilibria are analyzed; the solution of all available variants of equilibria on arbitrary ranks of reflection at linear functions of demand and expenses is received. Modeling of information equilibria of the Russian telecommunications market showed possible strategies to improve the agents' market positions.

**Scientific novelty:** the equilibrium in the market of oligopoly with three agents is considered, two of which reflect, and the third acts in accordance with their ideas. The reflexive behavior of the oligopoly market agents leads to a significant shift in the market equilibrium in comparison with non-reflexive behavior, while the strategy of the non-reflexive agent is ineffective in all cases, since its market share decreases with an increase in the reflection rank.

**Practical significance:** the obtained informational equilibria can be used for comparison with the structure of the Russian telecommunications market to determine the type of the companies' reflexive behavior.

**Keywords:** Economics and national economy management; Reflexive game; Oligopoly; Cournot-Stackelberg equilibrium; Telecommunications market

*Conflict of Interest: No conflict of interest is declared by the authors.*

**For citation:** Biryukova I. A., Geras'kin M. I. Analysis of reflective game of agents in telecommunications market for a case of two reflective agents, *Actual Problems of Economics and Law*, 2018, vol. 12, No. 3, pp. 468–480 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.12.2018.3.468-480>

## Введение

В современной экономике олигополия является достаточно широко распространенной рыночной структурой, поскольку по мере укрупнения компаний они занимают все большие рыночные ниши [1, с. 683]. Рынки олигополистического типа обладают характерной чертой, которая состоит в предложении унифицированного товара настолько малым числом продавцов, что изменение объемов предложений каждого из агентов существенно влияет на показатели рынка в целом [2, с. 17].

Телекоммуникационная отрасль России в основном включает в себя три компании мобильной связи и Интернета – ПАО «Мегафон»<sup>1</sup>, ПАО «МТС»<sup>2</sup> и ПАО «ВымпелКом»<sup>3</sup>, обслуживающих совместно 84 % абонентов, обеспечивающих 69 % трафика и 73 % передачи интернет-данных. Все перечисленные компании (далее – агенты) предлагают идентичную услугу для потребителя во всех регионах страны, что позволяет отнести отрасль к рынку олигополии [3, с. 600].

Оптимизация стратегий олигополистов базируется на методах теории игр, в частности, оптимальным состоянием рынка является равновесие Нэша [4, с. 287], при котором все агенты максимизируют свои функции полезности. Рынок телекоммуникаций является наиболее релевантным приложением игровых моделей, поскольку, будучи относительно недавно сформировавшейся олигополией, характеризуется динамичным поведением агентов [5, с. 710].

Особые возможности исследования поведения агентов рынка олигополии [6, с. 590] открывает анализ рефлексии [7, с. 333]. Систематическое описание рефлексии началось в 60-е гг. XX в. (школа В. А. Лефевра) [8, с. 136]. Рефлексивные игры – это разновидность игровых моделей поведения, в которых игроки (агенты) принимают решения на основе выдвижения гипотез о поведении окружения (других агентов) [9, с. 5]. В пределах данного исследования вектор внимания будет направлен на стратегическую

рефлексию [10, с. 298] на примере нескольких контр-агентов, которая подразумевает под собой результат мыслительного процесса агентов о том, какое действие выбирает окружение [11, с. 107]. Ранг рефлексии агента определяется как глубина прогнозируемых им действий окружения [12, с. 197]. Информационное равновесие [13, с. 251] определяется как решение системы уравнений оптимальных действий всех агентов при условии выдвинутых ими рефлексивных предположений [14, с. 19].

Глубоко исследованы равновесия Курно [15, с. 134] в случае симметричного положения агентов [16, с. 683]. Модели олигополии с лидерством по Штакельбергу [17, с. 150] исследованы в аспекте несимметричного поведения агентов рынка [18, с. 250].

Моделирование рефлексии агентов осуществляется путем введения вектора предположительных вариаций, компоненты которого равны предполагаемым приращениям действий окружения вследствие единичного прироста действия агента [19, с. 973]. В случае нерефлексивного (симметричного) поведения агентов их предположительные вариации равны нулю, поэтому информационное равновесие в игре есть равновесие Курно – Нэша. В случае рефлексивного (асимметричного) поведения возникает равновесие Штакельберга, при котором появляются агенты-лидеры ( $L$ ) и агенты-ведомые ( $F$ ) (leader (англ.) – лидер, follower (англ.) – ведомый, последователь) [20, с. 398]. На практике лидер – это агент, адекватно прогнозирующий действия окружения [21, с. 558], ведомый – это нерефлексирующий агент, не выдвигающий прогнозов действия окружения [22, с. 284].

Ранее [23, с. 6] было подробно рассмотрено равновесие на олигополистическом рынке с тремя агентами, где один агент рефлексирует (достоверно предсказывает), а два других действуют в соответствии с его представлениями [24, с. 263]. Однако в данном исследовании рассматривается более сложная ситуация с учетом особенностей рефлексии нескольких агентов, где два агента будут выступать в качестве рефлексирующих и достоверно предсказывающих действия окружения. В результате данного анализа необходимо получить информационное равновесие [25, с. 20] для произвольного ранга рефлексии при линейных [26, с. 128] функциях спроса и издержек.

Равновесия на рынках телекоммуникаций исследовались для трехагентных рыночных структур Индоне-

<sup>1</sup> Официальный сайт ПАО «Мегафон». URL: <http://megafon.ru> (дата обращения: 29.06.2018).

<sup>2</sup> Официальный сайт ПАО «МТС». URL: <https://mts.ru> (дата обращения: 29.06.2018).

<sup>3</sup> Официальный сайт ПАО «ВымпелКом». URL: <https://beeline.ru> (дата обращения: 29.06.2018).

зии [27], Испании [28], Польши [29], США [30], Чехии [31], Южной Кореи [32], Японии [33], Чили [34], Великобритании [35]. На нерегулируемых рынках США, Индонезии, Японии и регулируемом рынке Великобритании тенденция к повышению концентрации сопровождалась понижением цены и, следовательно, прибыльности агентов, что позволяет предположить увеличение глубины их рефлексии. Статистическое моделирование рынков Польши и Чехии показало, что при определенных типах поведения покупателей один или два из трех агентов доминируют. На рынках Испании, Чили, Южной Кореи отмечено наличие асимметричной олигополии с лидером, что также приводит к понижению прибыли всех агентов.

### Методология

Рассматривается модель рынка олигополии в случае линейной обратной функции спроса и линейных функций издержек агентов. Модель выбора действий агентов выражается в максимизации их функций полезности (прибыли) и имеет следующий вид:

$$Q^* = \underset{Q_i \geq 0}{ar \max} \Pi_i(Q, Q_i) = \underset{Q_i \geq 0}{ar \max} \left\{ (a + bQ_i)Q_i - d - cQ_i \right\}, i \in N, N = \{1, \dots, n\}, \quad (1)$$

где  $\Pi_i, Q_i$  – прибыль и объем предложения  $i$ -го агента соответственно;  $a, b$  – постоянные обратной функции спроса на рынке;  $c, d$  – постоянные функций издержек агентов;  $N$  – множество агентов,  $n$  – число агентов на рынке.

Информационное равновесие агентов определяется из системы оптимальных реакций в модели выбора (1) при данных предположительных вариациях:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial Q_i} = a + bQ + bQ_i \left( 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\partial Q_j}{\partial Q_i} \right) - c = 0, i \in N, \quad (2)$$

где  $Q'_i Q_j$  – предполагаемая вариация объема предложения  $j$ -го агента в случае единичного приращения предложения  $i$ -го агента, являющаяся функцией рефлексивного предположения  $i$ -го агента.

Рынок телекоммуникаций в России и за рубежом [27–35] образован взаимодействием трех компаний, поэтому проведем анализ рефлексивных представлений при  $n = 3$ . При различных представлениях

возникают соответствующие игры, случай которых обозначим символом  $t$ .

Поскольку модели выбора действий агентами (1) инвариантны относительно функций издержек агентов, агенты различаются только типами их представлений о стратегиях окружения, поэтому рефлексивный анализ проводится для произвольного порядка агентов.

Зафиксируем некоторого  $i$ -го агента (пусть  $i = 1$ ) как метаагента, относительно которого в дальнейшем будем исследовать представления другого  $j$ -го рефлексивного агента (пусть  $j = 2$ ) и третьего, нерелексивного.

Пусть *рефлексивные агенты не информированы о том, что третий агент не рефлексивен*.

Представления каждого агента могут быть следующие:

– представление об  $F$ -стратегии означает, что  $\eta$ -й ( $\eta = 1, 2, 3$ ) агент считает окружение ведомыми агентами на первом ранге рефлексии ( $r = 1$ ) и что окружение воспринимает его как ведомого при  $r = 2$ , и т. д. на последующих рангах рефлексии;

– представление об  $L$ -стратегии означает, что  $\eta$ -й агент считает окружение лидерами по Штакельбергу при  $r = 1$ , окружение воспринимает его как лидера при  $r = 2$ , и т. д. на последующих рангах рефлексии.

Рассмотрим все возможные случаи сочетаний представлений двух рефлексивных агентов о стратегиях окружения (рис. 1).

Во-первых, случай совпадения представлений  $i$ -го и  $j$ -го агентов (обозначенный  $t = 1$ ) характеризует рефлексивную ситуацию, когда оба рефлексивных агента имеют одинаковые представления о стратегиях окружения. Возможны два варианта этого случая (обозначенные двойным индексом  $t_\tau$ ): вариант  $t_\tau = t_2$ , оба рефлексивных агента имеют представления об  $F$ -стратегии окружения; вариант  $t_\tau = 1_2$ , при котором оба рефлексивных агента имеют представления об  $L$ -стратегии окружения.

Во-вторых, случай противоположных представлений  $i$ -го и  $j$ -го агентов (обозначенный  $t = 2$ ) характеризует рефлексивную ситуацию, когда оба рефлексивных агента имеют одинаковые, но противоположные друг другу представления о стратегиях окружения. Варианты этого случая не рассматриваются, так как порядок агентов не влияет на равновесие.

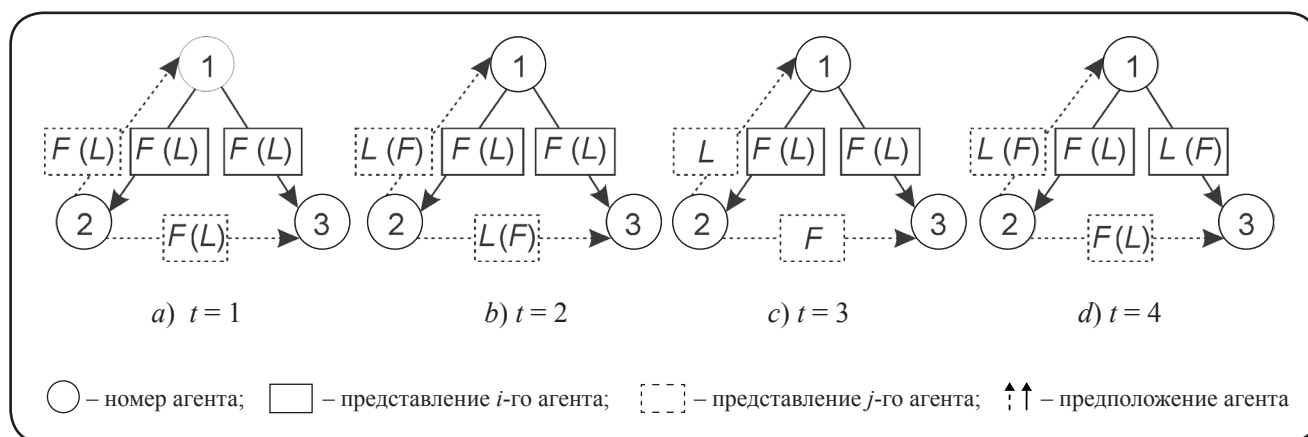


Рис. 1. Схема вариантов представлений агентов

\* Источник: составлено авторами.

Fig. 1. Scheme of agent' representations

\* Source: compiled by the authors.

В-третьих, рассматривается случай комбинации неодинаковых представлений одного (например,  $j$ -го) из рефлексивных агентов (обозначенный  $t = 3$ ). Возможны два варианта этого случая: вариант  $t_{\tau} = 3_1$ , при котором первый рефлексивный агент имеет представление об  $F$ -стратегии окружения, в то время как второй агент имеет представление об  $L$ -стратегии первого агента и об  $F$ -стратегии третьего агента; вариант  $t_{\tau} = 3_2$ , при котором первый рефлексивный агент имеет представление об  $L$ -стратегии окружения, в то время как второй агент имеет представление об  $L$ -стратегии первого агента и об  $F$ -стратегии третьего агента.

В-четвертых, случай сочетания противоположных представлений  $i$ -го и  $j$ -го агентов о стратегиях окружения, который так же, как  $t = 2$ , не имеет вариантов.

Поставим задачу анализа всех возможных рефлексивных представлений двух агентов из трех, на основе которых найдем векторы предположительных вариаций в каждом случае, что позволит получить решения набора игр с полной информированностью.

### Результаты исследования

Поскольку в исследовании рассматриваются рефлексивные представления двух (из трех) агентов ( $i$ -го и  $j$ -го), то предположительные вариации в уравнении реакции (2), соответствующем  $\eta$ -му ( $\eta \neq i, j$ ) агенту, во всех случаях равны нулю.

Предположительные вариации в уравнениях реакций (2), соответствующих  $i$ -му и  $j$ -му агентам, находятся отдельно для каждого из них путем анализа системы двух уравнений реакций агентов окружения следующего вида, записанного, например, для  $i$ -го агента на  $r$ -м ранге рефлексии:

$$f_k = a + bQ + bQ_k(1 + \gamma_{t(r-1)}^{ki} + \gamma_{t(r-1)}^{k\eta}) - c = 0, \\ k \in N \setminus i, \eta \neq i, j, \quad (3)$$

$$\text{где } \gamma_{t(r-1)}^{ki} = \left. \frac{\partial Q_i}{\partial Q_k} \right|_{t(r-1)}, \gamma_{t(r-1)}^{k\eta} = \left. \frac{\partial Q_{\eta}}{\partial Q_k} \right|_{t(r-1)}$$

предположительные вариации агентов окружения  $i$ -го агента на  $(r - 1)$ -м ранге рефлексии. Здесь для предположительной вариации выпуска  $i$ -го агента, представляемой  $k$ -м агентом, введено обозначение  $\gamma_{tr}^{ki}$ , в подстрочном индексе первым символом  $t$  обозначен рассматриваемый случай рефлексии,  $t = 1, 2, 3, 4$ , вторым символом  $r$  обозначен ранг рефлексии. В дальнейшем после анализа конкретных представлений рефлексивных  $i$ -го и  $j$ -го агентов в надстрочном индексе вместо индексов агентов будет указываться тип представления агента об окружении ( $F, L$ ), т. е. обозначение будет  $\gamma_{tr}^{F(L)}$ .

Например, для нахождения предположительных вариаций в реакции первого агента ( $i = 1$ ) при варианте  $t_{\tau} = 1_1$  на втором ранге рефлексии ( $r = 2$ ) система (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} f_2 &= a + bQ + bQ_2(1 + \gamma_{11}^{21} + \gamma_{11}^{23}) - c = 0, \\ f_3 &= a + bQ + bQ_3(1 + \gamma_{11}^{31} + \gamma_{11}^{32}) - c = 0. \end{aligned} \quad (4a)$$

Поскольку в этом варианте оба рефлексующих агента представляют  $F$ -стратегии окружения, то с учетом обозначения  $\gamma_{tr}^{F(L)}$  эту систему можно записать в виде:

$$\begin{aligned} f_2 &= a + bQ + bQ_2(1 + 2\gamma_{11}^F) - c = 0, \\ f_3 &= a + bQ + bQ_3(1 + 2\gamma_{11}^F) - c = 0. \end{aligned} \quad (4b)$$

На основе системы (3) предположительные вариации для уравнения (2)  $i$ -го агента вычисляются по методике Крамера для определения производных неявно заданных функций, зависящих от нескольких независимых переменных из решения следующей системы:

$$\sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial f_k}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial Q_i} + \frac{\partial f_k}{\partial Q_i} = 0, k \in N \setminus i. \quad (5)$$

Например, для системы (4b) система (5) имеет вид:

$$\begin{aligned} (1 + 2\gamma_{11}^F)\gamma_{12}^{12} + \gamma_{12}^{13} + 1 &= 0, \\ \gamma_{12}^{12} + (1 + 2\gamma_{11}^F)\gamma_{12}^{13} + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (5a)$$

и позволяет найти предположительные вариации первого агента  $\gamma_{12}^{12} = \gamma_{12}^{13} = \gamma_{12}^F = -\frac{1}{3 + 2\gamma_{11}^F}$ .

Найдем предположительные вариации реакции  $i$ -го агента ( $i = 2$ ), при варианте  $t = 3$ , на примере второго ранга рефлексии ( $r = 2$ ).

В таком случае система (4) примет вид:

$$\begin{aligned} f_1 &= a + bQ + bQ_1(1 + 2\gamma_{21}^F) - c = 0, \\ f_3 &= a + bQ + bQ_3(1 + 2\gamma_{21}^F) - c = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Проведя рассуждения, аналогичные варианту  $t_{\tau} = 1_1$ , получим систему двух линейных уравнений:

$$\begin{aligned} (1 + 2\gamma_{21}^F)\gamma_{32}^{21} + \gamma_{32}^{23} + 1 &= 0, \\ \gamma_{32}^{21} + (1 + 2\gamma_{21}^F)\gamma_{32}^{23} + 1 &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

позволяющую найти неизвестные предположительные вариации второго агента:

$$\begin{aligned} \gamma_{32}^{21} = \gamma_{32}^L &= -\frac{1 + 2\gamma_{22}^F}{3 + 4\gamma_{22}^F + 4\gamma_{21}^F + 4\gamma_{22}^F}, \gamma_{32}^{23} = \gamma_{32}^F = \\ &= -\frac{1 + 2\gamma_{21}^F}{3 + 4\gamma_{22}^F + 4\gamma_{21}^F + 4\gamma_{22}^F}, \\ \gamma_{32}^{FL} = \gamma_{32}^{21} + \gamma_{32}^{23} &= -\frac{2(1 + \gamma_{21}^F + \gamma_{22}^F)}{3 + 4\gamma_{22}^F + 4\gamma_{21}^F + 4\gamma_{22}^F}. \end{aligned}$$

Аналогично рассуждая, найдем предположительные вариации для уравнений реакций каждого из рефлексующих агентов ( $i$ -го и  $j$ -го) для всех вариантов рефлексии  $t = 1, 2, 3, 4$  на первых трех рангах рефлексии (табл. 1).

Обобщив полученные выражения для произвольного ранга, по индукции составим формулы предположительных вариаций в общем виде:

$$\begin{aligned} \gamma_{tr}^F \Big|_{r \geq 1} &= -\frac{1}{3 + 2\gamma_{t(r-1)}^F}, \gamma_{t0}^F = 0, \\ \gamma_{tr}^L \Big|_{r \geq 1} &= -\frac{1}{3 + 2\gamma_{tr}^F}, t = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\gamma_{3r}^{FL} = -\frac{2(1 + \gamma_{2(r-1)}^F + \gamma_{2r}^F)}{3 + 4\gamma_{2r}^F + 4\gamma_{2(r-1)}^F + (1 + \gamma_{2r}^F)}, r > 1, t = 3, (9)$$

Подставим полученные формулы предположительных вариаций для каждой игры  $G_i(r)$  в условия равновесия (3), в результате чего получим систему уравнений для случаев  $t = 1, 2, 3, 4$  в следующем общем виде:

$$a + bQ + bQ_i(1 + \gamma_{\Sigma ti}) - cQ_i = 0, i \in N, \quad (10)$$

где  $\gamma_{\Sigma ti}$  определяется согласно данным табл. 2 для каждого  $i$ -го уравнения этой системы в  $t$ -м случае.

Таблица 1

Методика расчета предположительных вариаций\*  
Table 1. Methodology of calculating the hypothetical variations\*

Случай (i)	Ранг (r)			
	1	2	3	
	Вид системы (4)	Вид системы (4)	$\gamma_{ir}^{(L)}$	Вид системы (4)
	$\gamma_{ir}^{(L)}$			$\gamma_{ir}^{(L)}$
1	FF	$a + bQ + bQ_k(1+0) - c = 0, k \in N \setminus i$	$-\frac{1}{3}$	$a + bQ + bQ_k(1 + 2\gamma_{i2}^F) - c = 0, k \in N \setminus i$
	LL	$a + bQ + bQ_k(1 + 2\gamma_{i1}^F) - c = 0, k \in N \setminus i$	$-\frac{1}{3 + 2\gamma_{i1}^F}$	$a + bQ + bQ_k(1 + 2\gamma_{i3}^F) - c = 0, k \in N \setminus i$
2	FF	$a + bQ + bQ_k(1+0) - c = 0, k \in N \setminus i$	$-\frac{1}{3}$	$a + bQ + bQ_k(1 + 2\gamma_{i2}^F) - c = 0, k \in N \setminus i$
	LL	$a + bQ + bQ_k(1 + 2\gamma_{i1}^F) - c = 0, k \in N \setminus i$	$-\frac{1}{3 + 2\gamma_{i1}^F}$	$a + bQ + bQ_k(1 + 2\gamma_{i3}^F) - c = 0, k \in N \setminus i$
3	FF	$a + bQ + bQ_k(1+0) - c = 0, k \in N \setminus i$	$-\frac{1}{3}$	$a + bQ + bQ_k(1 + 2\gamma_{i2}^F) - c = 0, k \in N \setminus i$
	LL	$a + bQ + bQ_k(1 + 2\gamma_{i1}^F) - c = 0, k \in N \setminus i$	$-\frac{1}{3 + 2\gamma_{i1}^F}$	$a + bQ + bQ_k(1 + 2\gamma_{i3}^F) - c = 0, k \in N \setminus i$
4	F	$a + bQ + bQ(1 + 2\gamma_{i1}^F) - c = 0$	$-\frac{1}{3 - 4\gamma_{i1}^F}$	$a + bQ + bQ(1 + 2\gamma_{i3}^F) - c = 0$
	L	$a + bQ + bQ(1 + 0) - c = 0$	$-\frac{1 + 2\gamma_{i1}^F}{3 + 4\gamma_{i1}^F}$	$a + bQ + bQ(1 + 2\gamma_{i2}^F) - c = 0$
3	F	$a + bQ + bQ(1 + 2\gamma_{i1}^F) - c = 0$	$-\frac{1 - 2\gamma_{i1}^F}{3 + 4\gamma_{i2}^F + 4\gamma_{i21}^F(1 + \gamma_{i2}^F)}$	$a + bQ + bQ(1 + 2\gamma_{i3}^F) - c = 0$
	L	$a + bQ + bQ(1 + 0) - c = 0$	$-\frac{1 - 2\gamma_{i2}^F}{3 + 4\gamma_{i2}^F + 4\gamma_{i21}^F(1 + \gamma_{i2}^F)}$	$a + bQ + bQ(1 + 2\gamma_{i2}^F) - c = 0$
4	F	$a + bQ + bQ(1 + 2\gamma_{i1}^F) - c = 0$	$-\frac{1 - 2\gamma_{i1}^F}{3 + 4\gamma_{i2}^F + 4\gamma_{i21}^F(1 + \gamma_{i2}^F)}$	$a + bQ + bQ(1 + 2\gamma_{i3}^F) - c = 0$
	L	$a + bQ + bQ(1 + 0) - c = 0$	$-\frac{1 + 2\gamma_{i2}^F}{3 + 4\gamma_{i2}^F}$	$a + bQ + bQ(1 + 2\gamma_{i2}^F) - c = 0$

\* Источник: составлено авторами.  
\* Source: compiled by the authors.

Значения параметра  $\gamma_{\Sigma ti}^*$   
Table 2. Value of parameter  $\gamma_{\Sigma ti}^*$

i	$t_r$					
	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	2	3 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>	4
1	$2\gamma_r^F$	$2\gamma_r^L$	$2\gamma_r^F$	$2\gamma_r^F$	$2\gamma_r^L$	$2\gamma_r^E$
2	$2\gamma_r^F$	$2\gamma_r^L$	$2\gamma_r^L$	$2\gamma_r^E$	$2\gamma_r^E$	$2\gamma_r^E$
3	0	0	0	0	0	0

\* Источник: составлено авторами.  
\* Source: compiled by the authors.

Общее решение системы (10), полученное методом Крамера, имеет вид:

$$Q_1 = -\frac{(a-c)(1+\gamma_{\Sigma t2})(1+\gamma_{\Sigma t3})}{\Delta},$$

$$Q_2 = -\frac{(a-c)(1+\gamma_{\Sigma t1})(1+\gamma_{\Sigma t3})}{\Delta},$$

$$Q_3 = -\frac{(a-c)(1+\gamma_{\Sigma t1})(1+\gamma_{\Sigma t2})}{\Delta},$$

где главный определитель системы (10) вычисляется по формуле:

$$\Delta = b \left( 4 + 3\gamma_{\Sigma t3} + \gamma_{\Sigma t2} \left( 3 + 2\gamma_{\Sigma t3} \right) + \gamma_{\Sigma t1} \left( 3 + 2\gamma_{\Sigma t3} + \gamma_{\Sigma t2} \left( 2 + \gamma_{\Sigma t3} \right) \right) \right). \quad (11)$$

Моделирование информационных равновесий проведем для телекоммуникационного рынка России. На основе объемов голосового трафика операторов ПАО «МегаФон», ПАО «МТС» и ПАО «ВымпелКом»<sup>4</sup> и средневзвешенных цен за период 2007–2017 гг. с помощью встроенной функции градиентного метода минимизации процессора Excel получены следующие значения коэффициентов функции спроса:

$$a = 1,85, b = -0,001. \quad (12)$$

Коэффициент детерминации при (12) равен 0,94, критерий Фишера составил 12,5 при критическом значении 2,4 для уровня значимости 0,05. Аналогичным методом получены значения параметров функций издержек агентов (табл. 3), имеющие достаточно высокие статистические оценки. Отклонения коэффициентов  $c_i, d_i$  от их средних значений  $\bar{c}, \bar{d}$ ,

<sup>4</sup> URL: <http://megafon.ru/>; <https://mts.ru/>; <https://beeline.ru/>

Таблица 2 приведенные в табл. 3, не превышают 20 %, поэтому при дальнейшем моделировании будем использовать средние значения:

$$c = 0,43, d = 69,8. \quad (13)$$

Таблица 3  
Статистические оценки параметров функций издержек агентов\*  
Table 3. Statistical estimations of parameters of the functions of agents' costs\*

Агенты / Agents	$c_i$	$d_i$	$c$	$d$	$R^2$	$ c_i - \bar{c}  / \bar{c}$	$ d_i - \bar{d}  / \bar{d}$	F-критерий / F-criterion
МТС / MTS	0,4061	63,4420	0,4076	71,1153	0,9453	-0,0037	-0,1079	
«Мегафон» / «Megafon»	0,3922	58,5930			0,9307	-0,0378	-0,1761	
«ВымпелКом» / «VimpelKom»	0,4245	91,3110			0,8251	0,0415	0,2840	

\* Источник: составлено авторами.  
\* Source: compiled by the authors.

На рис. 2 отображены значения трафиков агентов для случаев  $t = 1, 2, 3, 4$  в зависимости от ранга рефлексии, рассчитанные как решение системы (12) с коэффициентами, приведенными в табл. 2.

На рис. 3 показан суммарный трафик агентов телекоммуникационного рынка для случаев  $t = 1, 2, 3$  и зависимость равновесной цены рынка в зависимости от ранга рефлексии.

### Обсуждение результатов

При  $t = 1_1$  и  $t = 1_2$  агент 1 и агент 2 выдвигают идентичные представления о стратегии окружения и независимо от ранга рефлексии в равновесии имеют равные доли рынка, однако на одном и том же ранге при  $t = 1_2$  объемы предложения рефлексирующих агентов больше, чем при  $t = 1_1$ , (соответствуют объемам предложения на предыдущем ранге при  $t = 1_1$ ) за счет сокращения доли рынка нерефлексирующего агента. Поэтому для рефлексирующих агентов случай  $t = 1_2$  является более эффективным.

В случае  $t = 2$  рассматривается несимметричное представление агентов об окружении, при котором первый рефлексирующий агент имеет представление о F-стратегии окружения, а второй агент имеет представление о L-стратегии окружения. Стратегия второго агента является более эффективной, доставляя ему больший объем рынка, не только по сравнению со стратегией первого агента при  $t = 2$ , но по сравнению с действиями обоих рефлексирую-



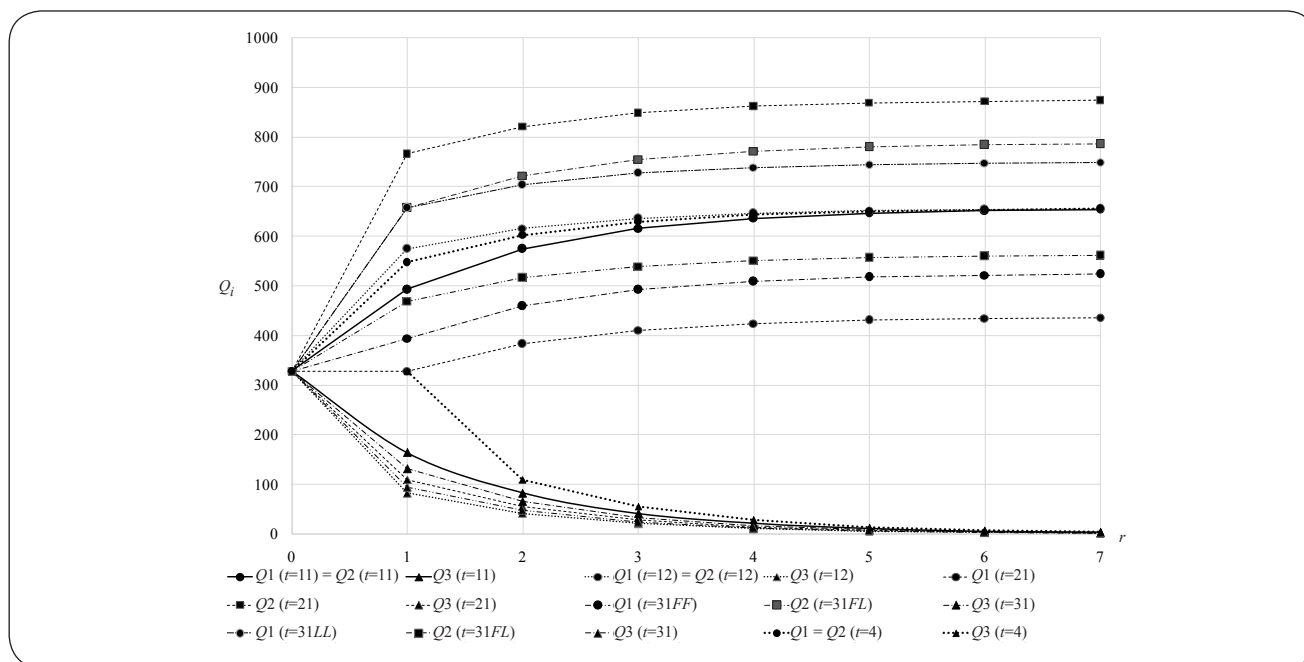


Рис. 2. Зависимость трафиков агентов рынка от ранга рефлексии при различных значениях  $t^*$   
Fig. 2. Dependence of the traffics of market agents on the ranking of reflection at various values of  $t^*$

\* Источник: составлено авторами.

\* Source: compiled by the authors.

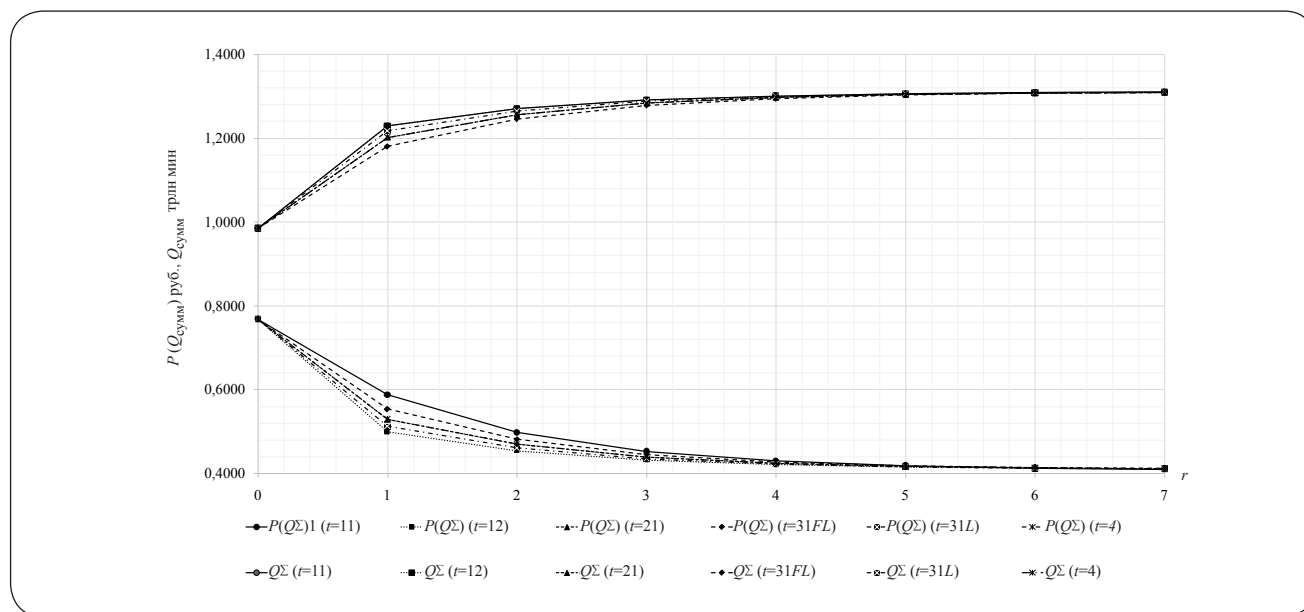


Рис. 3. Суммарное значение трафиков агентов рынка и зависимость равновесной цены рынка от ранга рефлексии при различных значениях  $t^*$

Fig. 3. Total value of the traffics of market agents and dependence of the market equilibrium price on the reflection ranking at various values of  $t^*$

\* Источник: составлено авторами.

\* Source: compiled by the authors.

щих агентов при  $t = 1_2$ . Следовательно, если один из агентов (назовем его  $\mu$ -й) информирован о том, что какой-то другой имеет представление об  $F$ -стратегии окружения, то лучшим вариантом для  $\mu$ -го агента будет представление об  $L$ -стратегии окружения; если же окажется, что на самом деле другой имеет представление об  $L$ -стратегии окружения, то это ухудшит выигрыш  $\mu$ -го агента, что анализируется в случае  $t = 3$ .

При  $t = 3$  рассматривается несимметричное представление агентов об окружении: первый агент имеет представление о  $FF$ -стратегии (подслучай  $t = 3_1$ ) или  $LL$ -стратегии (подслучай  $t = 3_2$ ) окружения, а второй рефлексизирующий агент предполагает, что его окружение придерживается  $FL$ -стратегии. При  $t = 3_1$  агент, придерживающийся стратегии  $FL$ , имеет наибольший объем рынка по сравнению с  $t = 1, t = 2$ . Поэтому если некоторый  $\mu$ -й агент информирован о том, что его контрагент имеет представление о  $FF$ -стратегии окружения, то наилучшим вариантом для  $\mu$ -го агента будет представление о  $FL$ -стратегии окружения. Если при этом контрагент также выдвинет представление о  $FL$ -стратегии, то это уменьшит долю  $\mu$ -го агента, что анализируется в случае  $t = 4$ . При  $t = 3_2$  агент, имеющий представление о  $LL$ -стратегии окружения, получает наибольший объем рынка, однако меньше, чем  $FL$ -агент при  $t = 3_1$ . Значит, если некоторый  $\mu$ -й агент информирован о том, что его контрагент имеет представление о  $FL$ -стратегии окружения, то наилучшим вариантом для  $\mu$ -го агента будет представлять  $LL$ -стратегию окружения; в случае если контрагент также представляет  $LL$ -стратегию окружения, это приведет к случаю  $t = 1_2$ , когда доли обоих рефлексизирующих агентов одинаковы.

При  $t = 4$  рефлексизирующие агенты симметричны, но выдвигают несимметричные представления о стратегиях окружения типа  $FL$ , что приводит к их меньшим рыночным долям по сравнению с симметричным представлением  $LL$  в случае  $t = 3_2$  и несимметричным представлением  $FL$  в случае  $t = 3_1$ . Следовательно, вариант  $LL$ -представления  $\mu$ -го агента является эффективной контригрой к  $FL$ -представлению его окружения, а вариант  $FL$ -представления – неэффективной.

Стратегия нерелексизирующего агента во всех случаях неэффективна, поскольку с увеличением ранга рефлексии его доля на рынке сокращается.

Анализ зависимости выпусков агентов (рис. 2) и совокупного объема рынка (рис. 3) от ранга рефлексии показывает, что с увеличением ранга рефлексии объемы выпуска агентов во всех исследуемых случаях стабилизируются, асимптотически приближаясь к некоторым аттракторам, что говорит о неэффективности углубления рефлексии. Другими словами, повышение ранга рефлексии агентов или глубины прогнозирования поведения контрагентов (т. е. мнение о стратегии контрагента, мнение о мнении контрагента и т. д.) не приводит к существенному увеличению их объемов продаж.

Наиболее резкое увеличение суммарного объема рынка наблюдается в случае  $t = 1_2$  в отличие от случая  $t = 1_1$ , где объемы выпуска увеличиваются менее динамично, что отрицательно сказывается на эффективности углубления рефлексии из-за медленного приближения трафиков агентов к суммарному значению на рынке.

Анализ изменения равновесной цены в зависимости от ранга рефлексии при различных значениях  $t$  (рис. 3) показывает тенденцию к снижению цены с увеличением ранга рефлексии. Наиболее резкое снижение цены наблюдается в случае  $t = 1_2$ , наиболее медленно цена снижается в случае  $t = 1_1$ , следовательно,  $FF$ -представления агентов максимально целесообразны с точки зрения их общих интересов поддержания более высокой цены. На практике это означает, что нерелексивное поведение всех компаний на рынке обеспечивает наиболее высокую среднеотраслевую (среднюю по операторам связи) цену услуги мобильной связи, что, очевидно, приводит к максимальной прибыли каждого оператора. Но если один из операторов рефлексизирует (случай  $t = 2$ ), то его объем продаж, а следовательно, и прибыль резко возрастают за счет проигрыша других агентов.

## Выводы

Исследование показало, что рефлексивное поведение агентов рынка олигополии приводит к существенному смещению рыночного равновесия по сравнению с нерелексивным поведением.

Расчеты показали, что реальный телекоммуникационный рынок РФ в 2017 г. качественно, т. е. по соотношению рыночных долей (табл. 4), близок к равновесию для двух расчетных случаев: судя по доле рынка агента «МТС», это случай  $t = 3_1$ , т. е. «МТС» считает окружение ведомыми, а судя по доле рынка агента «Мегафон» – случай  $t = 2$ , т. е. «Мегафон» считает окружение лидерами.

Таблица 4

**Сравнительный анализ распределения рынка  
при  $r = 1$ , млрд мин.\***

**Table 1. Comparative analysis of market distribution  
at  $r = 1$ , bln minutes\***

Агент / Agent	Фактическое распределение в 2016 г. / Actual distribution in 2016	$t = 1$		$t = 2$		$t = 3$		$t = 4$
		$t = 1_1$	$t = 1_2$	$FF$	$LL$	$FF, FL$	$LL, FL$	
		$FF$	$LL$					
МТС / MTS	390	493	575	328	766	<b>394</b>	657	547
«Мегафон» / “Megafon”	328	493	575	766	<b>328</b>	657	469	547
«ВымпелКом» / “VympelKom”	243	164	82	109	109	131	94	109

\* Источник: составлено авторами.

\* Source: compiled by the authors.

Если бы агент «МТС» был информирован о представлениях агента «Мегафон», то его представление об окружении изменилось бы на  $LL$ , поэтому в соответствии со случаем  $t = 1_2$  его рыночная доля, как и доля агента «Мегафон», возросла до 575 млрд мин. Если бы агент «Мегафон» был информирован о представлениях агента «МТС», то его представление об окружении изменилось бы на  $FL$ , что в соответствии со случаем  $t = 3_1$  дало бы ему рыночную долю 657 млрд мин., а доля агента «Мегафон» осталась бы на прежнем уровне 394 млрд мин. Поэтому  $LL$ -стратегия «борьба за лидерство» по Штакельбергу [17] с позиций двух рефлексивных агентов является доминирующей при кооперативном поведении, однако это равновесие неустойчиво, так как при  $FL$ -стратегии агент «Мегафон» может резко нарастить свой выигрыш.

**Список литературы**

1. Улезлова Л. В. Характеристика и особенности олигополии в телекоммуникационной отрасли // Ученые заметки ТОГУ: Электронное научное издание. 2015. Т. 6, № 4. С. 682–685.
2. Гераськин М. И. Проблемы определения рефлексивных равновесий на рынке олигополии // Вестник Самарского государственного экономического университета. 2017. № 1 (147). С. 17–25.
3. Mas-Collel A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. N. Y.: Oxford Univ. Press, 1995. 618 p.
4. Nash J. Non-cooperative Games // Annals of Mathematics. 1951. Vol. 54. Pp. 286–295.
5. Naimzada A. K., Sbragia L. Oligopoly games with nonlinear demand and cost functions: Two boundedly rational adjustment processes // Chaos, Solitons and Fractals. 2006. Vol. 29 (3). Pp. 707–722. DOI: 10.1016/j.chaos.2005.08.103
6. Gilpatric S. M., Li Y. Information value under demand uncertainty and endogenous market leadership // Economic Inquiry. 2015. Vol. 53 (1). Pp. 589–603. DOI: 10.1111/ecin.12119
7. Geraskin M. I., Chkhartishvili A. G. Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents' costs // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78, Is. 2. Pp. 332–348. DOI: 10.1134/s0005117917020114
8. Лефевр В. А. Рефлексия. М.: Когито-Центр, 2003. 496 с.
9. Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Рефлексия и управление: математические модели. М.: Изд-во физико-математической литературы, 2013. 412 с.
10. Новиков Д. А. Стратегическая рефлексия в биматричных играх // Региональная экономика в информационном измерении: модели, оценки, прогнозы: сборник науч. трудов / под ред. Е. Ю. Иванова, Р. М. Нижегородцева. М.: Бизнес-Юнитек, 2003. С. 296–307.
11. Гераськин М. И., Чхартишвили А. Г. Теоретико-игровые модели рынка олигополии с нелинейными функциями издержек агентов // Автоматика и телемеханика. 2017. № 9. С. 106–130.
12. Currarini S., Marini M. A. Sequential play and cartel stability in Cournot oligopoly // Applied Mathematical Sciences. 2013. Vol. 7 (1–4). Pp. 197–200. DOI: 10.12988/ams.2013.13017
13. Cavalli F., Naimzada A., Tramontana F. Nonlinear dynamics and global analysis of a heterogeneous Cournot duopoly with a local monopolistic approach versus a gradient rule with endogenous reactivity // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol. 23 (1–3). Pp. 245–262. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.11.013
14. Askar S., Alnowibet K. Nonlinear oligopolistic game with isoelastic demand function: Rationality and local monopolistic approximation // Chaos, Solitons and Fractals. 2016. Vol. 84. Pp. 15–22. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.12.019
15. Cournot A. A. Recherches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960 (Original 1838).
16. Karmarkar U. S., Rajaram K. Aggregate production planning for process industries under oligopolistic competition // European Journal of Operational Research. 2012. Vol. 223 (3). Pp. 680–689. DOI: 10.1016/j.ejor.2012.07.007
17. Stackelberg H. Market Structure and Equilibrium. 1<sup>st</sup> edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer, 2011 (Original 1934).
18. Ino H., Matsumura T. Welfare-Improving Effect of a Small Number of Followers in a Stackelberg Model // B. E. Journal of Theoretical Economics. 2016. Vol. 16 (1). Pp. 243–265. DOI: 10.1515/bejte-2015-0045

Бирюкова И. А., Гераськин М. И. Анализ рефлексивной игры агентов на телекоммуникационном рынке для случая двух рефлексивных агентов  
Biryukova I. A., Geras'kin M. I. Analysis of reflective game of agents in telecommunications market for a case of two reflective agents

19. Colacicco R. Ten years of general oligopolistic equilibrium: A survey // *Journal of Economic Surveys*. 2015. Vol. 29 (5). Pp. 965–992. DOI: 10.1111/joes.12084
20. Sherali H. D. Multiple leader Stackelberg model and analysis // *Operations Research*. 1984. Vol. 32 (2). Pp. 390–404.
21. Naimzada A., Tramontana F. Two different routes to complex dynamics in an heterogeneous triopoly game // *Journal of Difference Equations and Applications*. 2015. Vol. 21 (7). Pp. 553–563. DOI: 10.1080/10236198.2015.1040403
22. Ledvina A., Sircar R. Oligopoly games under asymmetric costs and an application to energy production // *Mathematics and Financial Economics*. 2012. Vol. 6 (4). Pp. 261–293. DOI: 10.1007/s11579-012-0076-3
23. Бирюкова И. А., Гераськин М. И. Структурный анализ рынка олигополии на основе модели рефлексивной игры на примере телекоммуникационного рынка России // *Актуальные проблемы экономики и права*. 2017. Т. 11, № 4. С. 66–81. DOI: 10.21202/1993-047x.11.2017.4.66-81
24. Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey // *Advances in Systems Science and Applications*. 2014. Vol. 3. Pp. 254–277.
25. Chkhartishvili A. G., Korepanov V. O. Adding Informational Beliefs to the Players Strategic Thinking Model // *IFAC-PapersOnLine*. 2016. Vol. 49 (32). Pp. 19–23. DOI: 10.1016/j.ifacol.2016.12.183
26. Vasin A. Game-theoretic study of electricity market mechanisms // *Procedia Computer Science*. 2014. Vol. 31. Pp. 124–132. DOI: 10.1016/j.procs.2014.05.252
27. Wulansari N. E., Rismayani R., Pramudiana Y. Study on structure and performance of telecommunication services industry in Indonesia // *CTTE (Conference of Telecommunication, Media and Internet Techno-Economics), Proceedings*. 2015. DOI: 10.1109/ctte.2015.7347229
28. Hurkens S., López Á. L. The welfare effects of mobile termination rate regulation in asymmetric oligopolies: The case of Spain // *Telecommunications Policy*. 2012. № 36 (5). Pp. 369–381. DOI: 10.1016/j.telpol.2011.11.008
29. Sznajd-Weron K., Weron R., Włoszczowska M. Outflow dynamics in modeling oligopoly markets: The case of the mobile telecommunication market in Poland // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. 2008. № 11. P. 11018.
30. Hausman J. A., Taylor W. E. Telecommunication in the US: From Regulation to Competition (Almost) // *Review of Industrial Organization*. 2013. № 42 (2). Pp. 203–230. DOI: 10.1007/s11151-012-9366-4
31. Grünwald O. Model of customer buying behavior in the CZ mobile telecommunication market // *Acta Polytechnica*. 2012. № 52 (5). Pp. 42–50.
32. Chu-Hwan P. Analysis of competitive situations among Korean mobile carriers using elasticity estimation // *Far East Journal of Electronics and Communications*. 2016. № 16 (3). Pp. 703–728. DOI: 10.17654/ec016030703
33. Ida T. Beyond mobile number portability: Measuring consumer preferences for service portability in Japan's mobile phone market // *Applied Economics*. 2012. № 44 (26). Pp. 3357–3369. DOI: 10.1080/00036846.2011.577011
34. Agostini C. A., Willington M., Lazcano R., Saavedra E. Predation and network based price discrimination in Chile // *Telecommunications Policy*. 2017. № 41 (9). Pp. 781–791. DOI: 10.1016/j.telpol.2017.04.006
35. Wagner D., Alexander I. Competitiveness in the UK energy and telecommunication markets // *Competition and Regulation in Network Industries*. 2014. № 15 (3). Pp. 284–300. DOI: 10.1177/178359171401500304

## References

1. Ulezlova L. V. Characteristics and features of oligopoly in telecommunication industry, *Uchenye zametki TOGU: Elektronnoe nauchnoe izdanie*, 2015, Vol. 6, No. 4, pp. 682–685 (in Russ.).
2. Geras'kin M. I. Problems of distribution of reflective equilibriums in oligopoly market, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo ekonomicheskogo universiteta*, 2017, No. 1 (147), pp. 17–25 (in Russ.).
3. Mas-Colell A., Whinston M., Green J. *Microeconomic Theory*. N. Y., Oxford Univ. Press, 1995, 618 p.
4. Nash J. Non-cooperative Games, *Annals of Mathematics*, 1951, Vol. 54, pp. 286–295.
5. Naimzada A. K., Sbragia L. Oligopoly games with nonlinear demand and cost functions: Two boundedly rational adjustment processes, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, Vol. 29 (3), pp. 707–722. DOI: 10.1016/j.chaos.2005.08.103
6. Gilpatric S. M., Li Y. Information value under demand uncertainty and endogenous market leadership, *Economic Inquiry*, 2015, Vol. 53 (1), pp. 589–603. DOI: 10.1111/ecin.12119
7. Geraskin M. I., Chkhartishvili A. G. Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents' costs, *Automation and Remote Control*, 2017, Vol. 78, Is. 2, pp. 332–348. DOI: 10.1134/s0005117917020114
8. Lefevr V. A. *Reflection*, Moscow, Kogito-Tsentr, 2003, 496 p. (in Russ.).
9. Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. *Reflection and management: mathematical models*, Moscow, Izd-vo fiziko-matematicheskoi literatury, 2013, 412 p. (in Russ.).
10. Novikov D. A. Strategicheskaya refleksiya v bimatrichnykh igrakh, Regional economy in informational dimension: models, estimates, forecasts. Collection of scientific works, ed. E. Yu. Ivanov, R. M. Nizhegorodtsev, Moscow, Biznes-Yunitek, 2003, pp. 296–307 (in Russ.).
11. Geras'kin M. I., Chkhartishvili A. G. Theoretical-game models of oligopoly markets with nonlinear functions of agents' costs, *Avtomatika i telemekhanika*, 2017, No. 9, pp. 106–130 (in Russ.).

12. Currarini S., Marini M. A. Sequential play and cartel stability in Cournot oligopoly, *Applied Mathematical Sciences*, 2013, Vol. 7 (1–4), pp. 197–200. DOI: 10.12988/ams.2013.13017
13. Cavalli F., Naimzada A., Tramontana F. Nonlinear dynamics and global analysis of a heterogeneous Cournot duopoly with a local monopolistic approach versus a gradient rule with endogenous reactivity, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, Vol. 23 (1–3), pp. 245–262. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.11.013
14. Askar S., Alnowibet K. Nonlinear oligopolistic game with isoelastic demand function: Rationality and local monopolistic approximation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2016, Vol. 84, pp. 15–22. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.12.019
15. Cournot A. A. *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. London: Hafner, 1960 (Original 1838).
16. Karmarkar U. S., Rajaram K. Aggregate production planning for process industries under oligopolistic competition, *European Journal of Operational Research*, 2012, Vol. 223 (3), pp. 680–689. DOI: 10.1016/j.ejor.2012.07.007
17. Stackelberg H. *Market Structure and Equilibrium*, 1<sup>st</sup> ed, translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer, 2011 (Original 1934).
18. Ino H., Matsumura T. Welfare-Improving Effect of a Small Number of Followers in a Stackelberg Model, *B. E. Journal of Theoretical Economics*, 2016, Vol. 16 (1), pp. 243–265. DOI: 10.1515/bejte-2015-0045
19. Colacicco R. Ten years of general oligopolistic equilibrium: A survey, *Journal of Economic Surveys*, 2015, Vol. 29 (5), pp. 965–992. DOI: 10.1111/joes.12084
20. Sherali H. D. Multiple leader Stackelberg model and analysis, *Operations Research*, 1984, Vol. 32 (2), pp. 390–404.
21. Naimzada A., Tramontana F. Two different routes to complex dynamics in an heterogeneous triopoly game, *Journal of Difference Equations and Applications*, 2015, Vol. 21 (7), pp. 553–563. DOI: 10.1080/10236198.2015.1040403
22. Ledvina A., Sigar R. Oligopoly games under asymmetric costs and an application to energy production, *Mathematics and Financial Economics*, 2012, Vol. 6 (4), pp. 261–293. DOI: 10.1007/s11579-012-0076-3
23. Biryukova I. A., Geras'kin M. I. Structural analysis of oligopoly market based on the reflective game model by the example of telecommunication market in Russia, *Aktual'nye problemy ekonomiki i prava*. 2017. T. 11, № 4. S. 66–81. DOI: 10.21202/1993-047x.11.2017.4.66-81 (in Russ.).
24. Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey, *Advances in Systems Science and Applications*, 2014, Vol. 3, pp. 254–277.
25. Chkhartishvili A. G., Korepanov V. O. Adding Informational Beliefs to the Players Strategic Thinking Model, *IFAC-PapersOnLine*, 2016, Vol. 49 (32), pp. 19–23. DOI: 10.1016/j.ifacol.2016.12.183
26. Vasin A. Game-theoretic study of electricity market mechanisms, *Procedia Computer Science*, 2014, Vol. 31, pp. 124–132. DOI: 10.1016/j.procs.2014.05.252
27. Wulansari N. E., Rismayani R., Pramudiana Y. Study on structure and performance of telecommunication services industry in Indonesia, *CTTE (Conference of Telecommunication, Media and Internet Techno-Economics), Proceedings*, 2015. DOI: 10.1109/ctte.2015.7347229
28. Hurkens S., López Á. L. The welfare effects of mobile termination rate regulation in asymmetric oligopolies: The case of Spain, *Telecommunications Policy*, 2012, No. 36 (5), pp. 369–381. DOI: 10.1016/j.telpol.2011.11.008
29. Sznajd-Weron K., Weron R., Włoszczowska M. Outflow dynamics in modeling oligopoly markets: The case of the mobile telecommunications market in Poland, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2008, No. 11, p. 11018.
30. Hausman J. A., Taylor W. E. Telecommunication in the US: From Regulation to Competition (Almost), *Review of Industrial Organization*, 2013, No. 42 (2), pp. 203–230. DOI: 10.1007/s11151-012-9366-4
31. Grünwald O. Model of customer buying behavior in the CZ mobile telecommunication market, *Acta Polytechnica*, 2012, No. 52 (5), pp. 42–50.
32. Chu-Hwan P. Analysis of competitive situations among Korean mobile carriers using elasticity estimation, *Far East Journal of Electronics and Communications*, 2016, No. 16 (3), Pp. 703–728. DOI: 10.17654/ec016030703
33. Ida T. Beyond mobile number portability: Measuring consumer preferences for service portability in Japan's mobile phone market, *Applied Economics*, 2012, No. 44 (26), pp. 3357–3369. DOI: 10.1080/00036846.2011.577011
34. Agostini C. A., Willington M., Lazcano R., Saavedra E. Predation and network based price discrimination in Chile, *Telecommunications Policy*, 2017, No. 41 (9), pp. 781–791. DOI: 10.1016/j.telpol.2017.04.006
35. Wagner D., Alexander I. Competitiveness in the UK energy and telecommunication markets, *Competition and Regulation in Network Industries*, 2014, No. 15 (3), pp. 284–300. DOI: 10.1177/178359171401500304

Дата поступления / Received 06.07.2018

Дата принятия в печать / Accepted 09.09.2018

Дата онлайн-размещения / Available online 25.09.2018

© Бирюкова И. А., Гераськин М. И., 2018

© Biryukova I. A., Geras'kin M. I., 2018