Termo geral de uma progressão aritmética de *k*-ésima ordem

General term of an arithmetic progression of *k*-th order

Marcelo Wachter Maroski
Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ)
Departamento de Ciências Exatas e Engenharias, Ijuí, RS, Brasil
marcelomaroski@gmail.com

Informações do Artigo

Histórico do Artigo
Submissão: 08 de agosto de 2017.
Aceite: 09 de outubro de 2017.

Palavras-chave
Integral
Função polinomial
Progressão Aritmética de Ordem Superior
MATLAB

Resumo

O presente artigo propõe um estudo acerca das sequências numéricas conhecidas como progressões aritméticas de ordem superior, na perspectiva de obter uma expressão algébrica que permita calcular o valor de qualquer termo de uma progressão de ordem *k*. Em um primeiro momento, demonstrar-se-á que o termo geral de uma progressão aritmética qualquer pode ser representado por uma função algébrica polinomial para, então, aplicar o conceito de integral indefinida de uma função, que é a principal ferramenta matemática utilizada neste artigo. Por fim, apresentar-se-á um algoritmo que foi desenvolvido no *software* MATLAB com o objetivo de gerar progressões aritméticas de *k*-ésima ordem utilizando a expressão algébrica obtida como resultado deste estudo.

Keywords
Integral
Polynomial Function
Arithmetic Progression of Higher order
MATLAB

Abstract

This article proposes a study about numerical sequences known as higher-order arithmetic progressions, in the view of obtaining an algebraic expression that allows to calculate the value of any term of a progression of order *k*. At first, it will demonstrate that the general term of any arithmetic progression can be represented by a polynomial algebraic function for then apply the concept of indefinite integral of a function, which is the main mathematical tool used in this article. Finally, it will present an algorithm that was developed in MATLAB software with the goal to generate arithmetic progressions of k-th order using the algebraic expression obtained as a result of this study.

1. Introdução

De todos os objetos de estudo da Matemática, um dos mais interessantes, e que há mais tempo desperta o interesse e a curiosidade do ser humano, são as sequências numéricas. Dentre elas, encontram-se as progressões aritméticas, que comumente são encontradas na bibliografia matemática e fazem parte do currículo da educação básica e de cursos de ensino superior.

Frequentemente, quando se fala em progressão aritmética, ou P.A., faz-se referência às progressões ditas de primeira ordem, que possuem propriedades importantes, conhecidas e estudadas desde o início da era cristã (BOYER, 1996) por diversos matemáticos de diferentes povos. Entretanto, existem as progressões aritméticas de ordem superior, que serão abordadas neste artigo por também possuírem algumas propriedades interessantes.

Assim, como objetivo deste trabalho, pretende-se obter uma expressão algébrica para calcular o *n*-ésimo termo de uma P.A. de ordem *k*, utilizando-se de um conceito bem conhecido do Cálculo: a integral indefinida de uma função.

2. Referencial Teórico

2.1. Progressões Aritméticas

De acordo com Iezzi e Hazzan (2012, p. 6), uma progressão aritmética é uma sequência de números "[...] em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada.". Cada termo de uma P.A. é indicado na forma a_n, em que n é o índice do termo, ou seja, a posição ocupada por ele na progressão. Assim, um exemplo de P.A. é a sequência (4, 7, 10, 13, 16, ...), em que $a_1 = 4$ e $r = 3$.

Um dos teoremas mais elementares relacionado às progressões aritméticas é o termo geral, definido como:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \qquad (1)$$

Utilizando-se o termo geral é possível calcular qualquer termo de uma P.A., conhecendo-se o primeiro termo e a razão (LOPES, 1998). Além disso, esse teorema permite estabelecer uma relação entre progressões aritméticas e polinômios, a partir do momento em que o termo geral é escrito como:

$$a_n = rn + a_1 - r \qquad (2)$$

Assim, percebe-se que toda P.A. pode ser representada por um polinômio de grau 1 em n, sendo a razão r o coeficiente de n e $a_1 - r$ o termo independente. Por exemplo, seja o polinômio $P(n) = 5n - 8$. Ele representa uma P.A. cuja razão é o coeficiente de n, ou seja, 5 e o primeiro termo é calculado a partir da expressão $a_1 - r = -8$. Sabendo-se que $r = 5$, então é imediato que $a_1 = -3$. De fato, substituindo-se n pelos primeiros números naturais, encontra-se a P.A.: (-3, 2, 7, 12, ...).

2.2. Progressões Aritméticas de Ordem Superior

As progressões apresentadas anteriormente são todas de primeira ordem, pois a diferença $a_n - a_{n-1}$ de quaisquer dois termos consecutivos resulta em uma constante, que nada mais é do que a razão da P.A.

Porém, existem também as progressões de ordem superior a 1, ou, então, progressões aritméticas de *k*-ésima ordem, definidas por Lopes (1998, p. 8) como "[...] uma sequência de números tais que, após uma operação de diferença entre termos consecutivos da sequência, obtemos uma P.A. de ordem $k - 1$ [...]".

Por exemplo, a sequência (2, 4, 11, 26, 52, 92) é uma P.A. de ordem 3, pois: fazendo-se as diferenças entre os termos consecutivos encontra-se a sequência (2, 7, 15, 26, 40) que, de acordo com a definição, é uma P.A. de ordem $k - 1$, ou seja, ordem 2. Calculando-se as diferenças novamente, obtém-se a sequência (5, 8, 11, 14), que é uma P.A. de primeira ordem, pois a subtração de quaisquer dois termos consecutivos resulta na constante $r = 3$. Assim, conclui-se que a sequência (2, 4, 11, 26, 52, 92) é, de fato, uma P.A. de ordem 3, pois após 3 subtrações sucessivas encontra-se um valor constante.

Assim como para as progressões de primeira ordem, é possível obter o termo geral de progressões de ordem superior, embora sejam escassas as pesquisas científicas referentes ao tema.

Lopes (1998) apresenta uma expressão algébrica que relaciona o primeiro termo e a razão de uma P.A. de ordem 2 com o primeiro termo da P.A. de primeira ordem que resulta das diferenças entre os termos consecutivos. Através dessa expressão, é possível obter um polinômio de grau 2, que é o termo geral para a P.A. de segunda ordem. Assim, essa ideia é estendida para progressões de *k*-ésima ordem, através de um procedimento em que, conhecendo-se os primeiros termos de uma P.A. de ordem *k*, encontra-se como termo geral um polinômio de grau *k*.

Por sua vez, Chagas e Rocha (2012) apresentam uma ideia diferenciada, utilizando número binomiais e a notação de somatório para obter uma expressão para o termo geral de progressões de *k*-ésima ordem. Entretanto, neste artigo será apresentada uma proposta alternativa a essas duas, como explicitado a seguir.

3. Metodologia

Para obter-se o termo geral de uma progressão de ordem *k*, utilizar-se-á o conceito de integral, uma vez que o polinômio que representa uma P.A. também pode ser compreendido como uma função polinomial. Nesse procedimento reside o maior grau de originalidade do presente trabalho, visto que a aplicação da integral não é encontrada na bibliografia referente a progressões aritméticas de ordem superior.

Em um primeiro momento, o cálculo da integral indefinida será amplamente utilizado, enquanto que a parte final da dedução, por sua vez, contará com o emprego de uma lógica de percepção e generalização de padrões para obter-se uma expressão que permita calcular qualquer termo de uma P.A. de *k*-ésima ordem, conhecendo-se, apenas, o seu primeiro termo e o valor da constante encontrada após *k* subtrações, definida aqui como a razão *r* da P.A. de primeira ordem associada à P.A. de ordem *k*.

Além disso, empregar-se-á o recurso tecnológico do *software* MATLAB no desenvolvimento de um algoritmo que utiliza os resultados deste trabalho para gerar progressões aritméticas de *k*-ésima ordem.

4. Resultados e Discussão

Para deduzir-se o termo geral de uma P.A. de ordem *k*, inicialmente tomar-se-á como exemplo a sequência (4, 6, 8, 10, ...), representada através da função polinomial $p(n) = 2n + 2$.

Segundo Stewart (2009), pelo cálculo da integral indefinida de uma função *f*(x), encontra-se uma função *F*(*x*), dita primitiva. Portanto, nesse caso calcular-se-á a integral da função *p*(*n*), a fim de encontrar a primitiva *P*(*n*), assim:

$$P(n) = \int (2n + 2)\, dn \tag{3}$$

$$P(n) = n^2 + 2n + C \tag{4}$$

A função primitiva *P*(*n*) representa uma P.A. de ordem 2, o que pode ser comprovado calculando-se os seus primeiros termos. Para isso, inicialmente ignorar-se-á a existência da constante *C*, resultante do processo de integração, mas logo retornar-se-á a ela.

Assim, substituindo-se *n* pelos primeiros números naturais, obtém-se a sequência (3, 8, 15, 24). Calculando-se a diferença entre os termos consecutivos, encontra-se a sequência (5, 7, 9), que é uma P.A. de primeira ordem, comprovando-se, assim, que a P.A. obtida a partir de (4) é realmente de ordem 2.

Entretanto, de acordo com Stewart (2009), uma integral indefinida representa uma família de primitivas, existindo uma para cada valor da constante *C*. Ou seja, obter-se-á uma P.A. diferente para cada valor de *C*, sendo que a razão da P.A. de primeira ordem associada a cada uma delas será a mesma, porém o primeiro termo da P.A. de segunda ordem assumirá valores distintos.

Para o interesse deste estudo, é necessário encontrar um valor para *C* que gere uma P.A. com o valor desejado para o primeiro termo. Ainda utilizando (4), definir-se-á um valor para *C* que gere, por exemplo, uma P.A. de segunda ordem cujo primeiro termo é 8. Para isso, deve-se, simplesmente, substituir *P*(*n*) por 8 e *n* por 1, resultando em $C = 5$. Dessa forma, tem-se a seguinte função polinomial:

$$P(n) = n^2 + 2n + 5 \tag{5}$$

Atribuindo valores a *n*, obtém-se a P.A. de segunda ordem: (8, 13, 20, 29), cujo primeiro termo é 8, assim como se pretendia obter.

De acordo com os teoremas elementares do cálculo de integrais, apresentados por Stewart (2009), a integração de uma função algébrica de grau *n* resulta em uma primitiva cujo grau é $n + 1$. Aplicando-se essa mesma ideia às progressões aritméticas, pode-se afirmar que a cada vez que se integra o termo geral de uma P.A. de ordem *k*, obtém-se uma P.A. de ordem $k + 1$. Assim, conclui-se que a ordem de uma P.A. é indicada pelo grau do polinômio correspondente.

Nessa perspectiva, para obter-se o termo geral de uma P.A. de ordem *k* é necessário fazer *k* – 1 integrações a partir de um polinômio de grau 1; ou, então, obter uma expressão genérica que sirva para qualquer ordem de P.A., como será demonstrado a seguir.

Integrando-se (2) em relação a *n*, ou seja, considerando o primeiro termo e a razão constantes, obtém-se:

$$P(n) = a_1 n + \frac{n^2 r}{2} - nr + C \tag{6}$$

Portanto, (6) é o termo geral para uma P.A. de segunda ordem, que, colocando-se *n* em evidência, pode ser escrito da seguinte forma:

$$a_n^{(2)} = n\left(a_1 + \frac{nr}{2} - r\right) + C \tag{7}$$

Analogamente, pode-se integrar (6) a fim de encontrar-se o termo geral de uma P.A. de terceira ordem. Assim:

$$P_2(n) = \int a_1 n \, dn + \int \frac{n^2 r}{2} dn - \int nr \, dn \tag{8}$$

$$a_n^{(3)} = \frac{n^2}{2}\left(a_1 + \frac{nr}{3} - r\right) + C \tag{9}$$

Continuando o processo de integração, obter-se-á os termos gerais para progressões aritméticas de quarta e quinta ordem, representados pelas expressões (10) e (11), respectivamente:

$$a_n^{(4)} = \frac{n^3}{6}\left(a_1 + \frac{nr}{4} - r\right) + C \tag{10}$$

$$a_n^{(5)} = \frac{n^4}{24}\left(a_1 + \frac{nr}{5} - r\right) + C \tag{11}$$

As expressões (7), (9), (10) e (11), que representam termos gerais de progressões de ordem superior, são suficientes para que se perceba algumas regularidades importantes para a obtenção de um termo geral para a *k*-ésima ordem.

Inicialmente, pode-se afirmar que a parte da expressão que se encontra entre parênteses é a mesma em todos os casos, exceto pelo número que divide *nr*, que é sempre igual ao grau *k* da P.A. Além disso, pode-se afirmar que o grau de *n*, em evidência, *é k* – 1 e o número que o divide é (k – 1)! em todas as expressões. Desse modo, o termo geral pode ser escrito como:

$$a_n^{(k)} = \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}\left(a_1 + \frac{nr}{k} - r\right) + C \tag{12}$$

Se (12) é válido para qualquer ordem de P.A., deve ser para a ordem 1 também. Então, substituindo-se *k* por 1 em (12) e ignorando a existência da constante, obtém-se:

$$a_n = \frac{n^0}{0!}\left(a_1 + \frac{nr}{1} - r\right) \tag{13}$$

$$a_n = a_1 + nr - r \tag{14}$$

Assim, percebe-se que (14) é equivalente à (1) e à (2), ou seja, é igual ao conhecido termo geral de uma P.A. de primeira ordem. Portanto, fica comprovado que (12) também é válido quando $k = 1$.

Entretanto, a constante C de (12) implica que a expressão algébrica fornece não apenas uma determinada P.A., mas uma família de progressões de ordem k. Isso significa que, mesmo definindo-se um valor para a_1, a P.A. encontrada não terá como primeiro termo o valor que foi definido, a menos que se descubra qual é o valor de C que produz o resultado desejado.

Tal valor pode ser definido algebricamente, de modo que valha para todos os casos possíveis. Para isso, basta substituir a_n por a_1 e n por 1 em (12) e isolar C, da seguinte forma:

$$a_1 = \frac{1^{k-1}}{(k-1)!}\left(a_1 + \frac{r}{k} - r\right) + C \tag{15}$$

$$a_1 - \frac{a_1}{(k-1)!} - \frac{r}{k(k-1)!} + \frac{r}{(k-1)!} = C \tag{16}$$

$$\frac{a_1(k! - k) + r(k-1)}{k!} = C \tag{17}$$

Assim, uma vez definido o valor genérico de C, somar-se-á esse resultado à (12), obtendo-se o termo geral definitivo de uma P.A. de k-ésima ordem:

$$a_n^{(k)} = \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}\left(a_1 + \frac{nr}{k} - r\right) + \frac{a_1(k! - k) + r(k-1)}{k!} \tag{18}$$

Uma das características do trabalho com progressões de ordem superior é a presença de números muito grandes e não inteiros, o que, inclusive, justifica-se pela complexidade de (18). Portanto, torna-se interessante a possibilidade de desenvolver um programa no *software* MATLAB para calcular os termos de progressões de ordem superior, evitando-se, assim, a realização de cálculos trabalhosos manualmente.

A partir do resultado obtido em (18), desenvolveu-se um algoritmo muito simples, em poucas linhas de programação, com uma condição e dois laços de repetição; como pode ser observado na Figura 1, que apresenta o código do algoritmo.

Para que o usuário possa utilizar o programa, ele deve informar a ordem da P.A., o valor do primeiro termo, a razão e quantos termos deverão ser calculados. Assim, o resultado fornecido é uma P.A. nas condições estipuladas pelo usuário.

Figura 1 – Código do programa desenvolvido no MATLAB.

```
clc
clear
k=input('Entre com a ordem da P.A.: ');
a=input('Entre com o valor do primeiro termo: ');
r=input('Entre com o valor da razão: ');
x=input('Entre com a quantidade de termos a serem obtidos: ');
C=(a*(factorial(k)-k)+r*(k-1))/factorial(k);
for n=1:x
    PA(n)=n^(k-1)*(a+n*r/k-r)/factorial(k-1) + C;
end
fprintf('\nA P.A é:\n')
fprintf('\n');
if x==1
    fprintf('(%2.4f)\n',PA)
else
    fprintf('(%2.4f,',PA(1))
    for n=2:x-1
        fprintf(' %2.4f,',PA(n))
    end
    fprintf(' %2.4f)\n',PA(x))
end
```

Fonte: Elaboração do autor, 2017.

Por exemplo, definindo-se $k = 4$, $a_1 = 6$, $r = 12$ e a quantidade de termos igual a 7, obtém-se a P.A.: (6, 6.5, 20, 70.5, 194, 438.5, 864), como percebe-se na Figura 2, que mostra o resultado fornecido pelo programa no MATLAB.

Figura 2 – Exemplo de P.A. obtida no MATLAB.

```
Command Window
Entre com a ordem da P.A.: 4
Entre com o valor do primeiro termo: 6
Entre com o valor da razão: 12
Entre com a quantidade de termos a serem obtidos: 7

A P.A. é:

fx (6.0000,  6.5000,  20.0000,  70.5000,  194.0000,  438.5000,  864.0000)>>
```

Fonte: Elaboração do autor, 2017.

Para comprovar que a sequência gerada pelo programa é realmente uma P.A. de ordem 4, pode-se calcular as diferenças sucessivas entre os seus termos consecutivos, até que se encontre uma P.A. de primeira ordem. Assim, a primeira diferença resulta na seguinte P.A. de ordem 3: (0.5, 13.5, 50.5, 123.5, 244.5, 425.5). Repetindo-se o procedimento, obtém-se uma P.A. de ordem 2 com os seguintes termos: (13, 37, 73, 121, 181). Por fim, com mais uma diferença, chega-se à P.A. de primeira ordem: (24, 36, 48, 60), com r =12, assim como foi determinado inicialmente.

5. Considerações Finais

Pelas demonstrações e discussões apresentadas nesse artigo, conclui-se que é possível obter um termo geral para progressões de *k*-ésima ordem a partir de um processo de integração, uma vez que toda progressão aritmética pode ser representada por um polinômio cujo grau é equivalente à ordem da P.A.

Por meio da aplicação da integral indefinida de uma função, percebe-se que as progressões aritméticas estão relacionadas a elementos de outros campos de interesse da Matemática Pura. Outra articulação muito importante dá-se através da utilização do MATLAB, demonstrando, assim, que na sociedade contemporânea as tecnologias digitais surgem como excelentes ferramentas de apoio à Matemática.

Certamente, essas relações, que muitas vezes podem parecer inusitadas, contribuem para o enriquecimento dos conhecimentos matemáticos, resultando, assim, em importantes discussões que consideram o estudo de sequências numéricas e padrões.

Referências

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Trad. GOMIDE, Elza Furtado. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CHAGAS, J. K. M.; ROCHA, J. S. Sequências aritméticas de ordem superior e aplicações. In: SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA, 6., 2012, Goiânia. **Anais...** Goiânia: Instituto Federal de Goiás, 2012. p. 1-4.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar 4**: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual, 2012.

LOPES, Luís. **Manual de progressões**. Rio de Janeiro: Interciência, 1998.

STEWART, James. **Cálculo**. v. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2008.