# Equação do Calor: uma comparação entre soluções analítica e computacional para uma barra de cobre finita e isolada termicamente

# Heat Equation: a comparison between analytical and computational solutions for a finite and thermally insulated copper bar

Jordana Fernandes Costa
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG)
*Campus* Aparecida de Goiânia, Aparecida de Goiânia, GO, Brasil
fernandescostajordana@gmail.com

Diogo Gonçalves Dias
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG)
*Campus* Aparecida de Goiânia, Aparecida de Goiânia, GO, Brasil
diogodias.gd@gmail.com

## Informações do Artigo

**Histórico do Artigo**
Submissão: 30 de Março de 2018.
Aceite: 16 de maio de 2018.

**Palavras-chave**
Métodos Numéricos
Temperatura
Equação do Calor

## Resumo

A Equação do Calor é uma equação que representa a difusão do calor em sólidos, a partir do coeficiente de difusividade térmica, que está em função da condutividade térmica, da densidade e do calor específico do material da barra; e da temperatura, em função da coordenada *x* e do instante *t*. Essa equação é representada por uma equação diferencial parcial que tem como solução exata uma soma de série infinita. Assim, os objetivos desse trabalho são analisar os aspectos teóricos e computacionais do problema da condução do calor; realizar um código computacional, otimizando o cálculo dos valores das temperaturas, via programa computacional *Scilab*, que calcula resultados aproximados para a Equação do Calor, a partir da implementação numérica do método das diferenças finitas; e com isso, aplicar em um exemplo simples da Engenharia Civil, comparando os valores de temperaturas exatas e aproximadas de uma barra uniforme em diferentes tempos e seções dessa barra. Dessa forma, os resultados desse trabalho de iniciação científica foram alcançados, pois foram realizados o algoritmo e os gráficos que demonstram essa proximidade entre os valores das temperaturas exatas e aproximadas.

**Keywords**
Numerical Methods
Temperature
Heat Equation

## Abstract

The Heat Equation is an equation that represents the diffusion of heat in solids, from the coefficient of thermal diffusivity, which is a function of the thermal conductivity, density and specific heat of the bar material; and the temperature, as a function of the x-coordinate and the instant t. This equation is represented by a partial differential equation whose exact solution is an infinite series sum. Thus, the objectives of this work are to analyze the theoretical and computational aspects of the heat conduction problem; to perform a computational code, optimizing the calculation of the temperature values, using Scilab computational program, which calculates approximated results for the Heat Equation, from the numerical implementation of the finite difference method; and with that, apply in a simple example of Civil Engineering, comparing the values of exact and approximate temperatures of an uniform bar in different times and sections of that bar. Thus, the results of this scientific initiation work were achieved, since the algorithm and the graphs that demonstrate this proximity between the values of the exact and approximated temperatures were performed.

## 1. Introdução

Uma equação diferencial (Equação 01) é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas destas funções. Essas equações podem ser classificadas quanto ao tipo, à ordem e à linearidade. Quanto ao tipo, ela será ordinária quando as funções incógnitas forem funções de somente uma variável; e será parcial quando as funções incógnitas forem funções de mais de uma variável, envolvendo as derivadas a cada uma destas variáveis, sendo rara a obtenção de soluções exatas (ZILL; CULLEN, 2001).

As equações diferenciais possuem grande importância, não só na Matemática Aplicada, mas também em outras áreas, como Engenharia, Química, Biologia e Economia. E as equações diferencias parciais (EDPs) constituem outra importante ferramenta para resolução de problemas mais amplos, como os fenômenos de Equação da Onda e Equação do Calor (SILVA; PALMEIRA, 2016).

A Equação da Onda descreve a propagação das ondas, tais como ondas sonoras, luminosas ou aquáticas. A Equação do Calor é uma equação diferencial parcial que descreve o fluxo do calor em um corpo sólido.

No caso de equações de segunda ordem em duas dimensões da forma:

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)y_{yy} + d\big(x,y,u_x,u_y,u\big) = 0, \qquad (01)$$

onde $u_x$ denota a derivada de $u$ em relação à variável $x$, $u_{xx}$ denota a derivada de segunda ordem de $u$ em relação à variável $x$; e $a(x,y), b(x,y), c(x,y)$ e $d(x,y)$ são funções conhecidas; a classificação é feita em função do discriminante, que é calculado a partir dos coeficientes da equação:

- Equação Parabólica: $\Delta = 0$;
- Equação Elíptica: $\Delta < 0$;
- Equação Hiperbólica: $\Delta > 0$.

Durante os dois últimos séculos, foram desenvolvidos diversos métodos para se resolver equações diferenciais parciais. O método de separação de variáveis é o método sistemático mais antigo, tendo sido usado por D'Alembert, Daniel Bernoulli e Euler, em torno de 1750, em suas investigações sobre ondas e vibrações.

A ideia geral do método de separação de variáveis é a discretização do domínio e a substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações envolvendo somente valores numéricos da função. Dessa forma, para a obtenção das soluções numéricas das EDPs, são utilizadas discretizações. Viabilizando o uso dos computadores no tratamento numérico das equações diferenciais, por meio dos métodos numéricos.

Assim, o objetivo principal desse trabalho de iniciação científica é demonstrar os aspectos teóricos e computacionais do problema de condução do calor. Sendo assim, os objetivos são elaborar um algoritmo, via programa computacional *Scilab*, que implementa o método de diferenças finitas na Equação do Calor, chegando em soluções aproximadas; comparar esses valores com as soluções exatas, usando tabelas e gráficos; e com isso resolver um exemplo simples e aplicado à Engenharia Civil.

## 2. Referencial Teórico

### 2.1. Equação do Calor

A Equação do Calor (Equação 2) é uma equação parabólica, e é representada por:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t \tag{02}$$

onde $u$ é a temperatura, em que depende da coordenada $x$ e do instante $t$; $\alpha^2$ é uma constante conhecida como difusividade térmica (Equação 3), sendo definida por:

$$\alpha^2 = \frac{k}{\rho s} \tag{03}$$

em que, $k$ é a condutividade térmica, $\rho$ é a densidade e $s$ é o calor específico do material na barra (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

Dessa forma, considere uma barra uniforme isolada termicamente nas superfícies laterais, de modo que o calor só pode fluir na direção do eixo. Sabendo que as temperaturas em duas seções paralelas de mesma área são diferentes e separadas por uma pequena distância, uma quantidade de calor por unidade de tempo vai passar da seção mais quente para a seção mais fria.

A quantidade de calor por unidade de tempo (Equação 4) é:

$$Q = \frac{kA|T_2 - T_1|}{d}, \tag{04}$$

onde $A$ é a área da seção reta paralela da barra; $T_2$ e $T_1$ são as temperaturas em pontos ao longo do eixo de condução do calor; e $d$ é a distância que separa essas superfícies laterais (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

Sabendo que as extremidades da barra são $x = 0$ e $x = L$, e supondo que os lados da barra estão perfeitamente isolados, de modo que não há fluxo de calor através deles. A equação diferencial que governa a temperatura na barra expressa um equilíbrio físico fundamental: a taxa segundo a qual o calor entra em qualquer parte da barra é igual à taxa segundo a qual o calor é absorvido naquela parte da barra.

Essas taxas são chamadas de termo de fluxo e termo de absorção, respectivamente. Para calcular o termo de fluxo, considere uma parte da barra entre as seções retas $x = x_o$ e $x = x_o + \Delta x$, onde $x_o$ é arbitrário e $\Delta x$ é um valor pequeno. A taxa instantânea de transferência de calor $H(x_o, t)$ da esquerda para a direita através da seção reta $x = x_o$ é dada por:

$$H(x_o) = \lim_{d \to 0} kA \frac{u\left(x_o + \frac{d}{2}, t\right) - u\left(x_o - \frac{d}{2}, t\right)}{d} = -kAu_x(x_o, t) \tag{05}$$

Então, a taxa segundo a qual o calor entra no trecho da barra entre $x = x_o$ e $x = x_o + \Delta x$ é dada por:

$$Q_1 = H(x_o, t) + H(x_o + \Delta x, t) = kA[u_x(x_o + \Delta x, t) - u_x(x_o, t)], \tag{06}$$

e a quantidade de calor entrando nesse trecho da barra no intervalo de tempo Δt é:

$$Q_1 \Delta t = kA[u_x(x_o + \Delta x, t) - u_x(x_o, t)]\Delta t \tag{07}$$

Já para calcular o termo de absorção, considere que a variação média de temperatura $\Delta u$ no intervalo de tempo $\Delta t$ é diretamente proporcional à quantidade de calor $Q\Delta t$ introduzida e inversamente proporcional à massa $\Delta m$ do trecho da barra. Logo,

$$\Delta u = \frac{1}{s} \frac{Q_2 \Delta t}{\Delta m} = \frac{Q_2 \Delta t}{s\rho A \Delta x}, \tag{08}$$

onde a constante de proporcionalidade $s$ é o calor específico do material da barra e $\rho$ é sua densidade.

Assim, a variação média de temperatura $\Delta u$ no trecho da barra em consideração é igual à variação de temperatura em algum ponto intermediário $x = x_o + \theta \Delta x$ , onde $0 < \theta < 1$. Portanto:

$$\frac{Q_2 \Delta t}{s\rho A \Delta x} = u(x_o + \theta \Delta x, t + \Delta t) - u(x_o + \theta \Delta x, t). \tag{09}$$

Dessa forma, devido ao equilíbrio físico fundamental, o termo de fluxo será igual ao termo de absorção.

$$Q_1\Delta t = Q_2\Delta t$$
$$[u(x_o+\theta\Delta x, t+\Delta t) - u(x_o+\theta\Delta x, t)]s\rho A\Delta x = kA[u_x(x_o+\Delta x, t) - u_x(x_o, t)]\Delta t$$
$$s\rho\frac{[u(x_o+\theta\Delta x, t+\Delta t) - u(x_o+\theta\Delta x, t)]}{\Delta t} = k\frac{[u_x(x_o+\Delta x, t) - u_x(x_o, t)]}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta t\to 0} s\rho\frac{[u(x_o+\theta\Delta x, t+\Delta t) - u(x_o+\theta\Delta x, t)]}{\Delta t} = s\rho u_t \tag{10}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0} k\frac{[u_x(x_o+\Delta x, t) - u_x(x_o, t)]}{\Delta x} = ku_{xx}$$
$$ku_{xx} = s\rho u_t$$
$$\boldsymbol{\alpha^2 u_{xx} = u_t}$$

Com isso, chega-se à Equação do Calor (Equação 2) (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

### 2.2. Solução Analítica da Equação do Calor

Para calcular o valor exato da solução da Equação do Calor, considere as condições iniciais: uma barra de seção reta uniforme feita com material homogêneo, em que as extremidades da barra são $x = 0$ e $x = L$, e supondo que os lados da barra estão perfeitamente isolados, de modo que não há fluxo de calor através deles e que as dimensões da seção reta são tão pequenas que a temperatura $u$ pode ser considerada constante em qualquer seção reta.

Para $u(x,0) = f(x)$, em que $0 \le x \le L$, supõe-se que $u(x,t)$ é um produto de duas outras funções: $u(x,t) = X(x)T(t)$. Então a partir de uma EDP, chega-se em duas equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + \alpha^2\lambda T = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Resolvendo esse problema de valor inicial formando combinações lineares de um conjunto fundamental de soluções (BOYCE; DIPRIMA, 2010) e depois, formando coeficientes que satisfazem as condições iniciais, chega-se em (Equação 12, 13 e 14):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{12}$$
$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx. \tag{13}$$
$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) \tag{14}$$

Portanto, a solução do problema de condução de calor, para $0 < x < L,\ t > 0$ é $u(x,0) = f(x)$, e já para $0 \le x \le L$, $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$ e $t > 0$, a solução é dada pela série $u(x,t)$ com os coeficientes calculados por $c_n$ (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

### 2.3. Solução Numérica da Equação do Calor

Para alcançar soluções aproximadas da Equação do Calor utiliza-se métodos numéricos. O método das diferenças finitas, por exemplo, tem como base o processo da discretização. Este processo reduz o problema com número infinito de variáveis num problema discreto com número finito de variáveis, através da substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações utilizando apenas os valores numéricos da função (BURDEN; FAIRES, 2010).

Esse método utiliza uma ferramenta básica matemática no cálculo de aproximações das derivadas: a série de Taylor. Ela relaciona valores da função e suas derivadas num ponto com valores dessa mesma função numa vizinhança desse ponto (FRANCO, 2006).

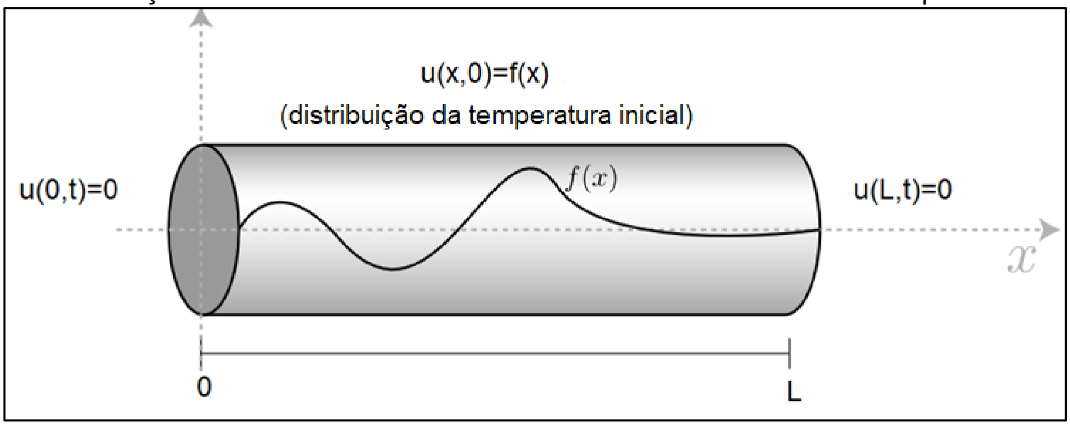
## 3. Metodologia

Dessa forma, a partir do estudo da Equação do Calor e de sua solução analítica e numérica, foi realizado um algoritmo, via programa computacional *Scilab*, em que gera o valor aproximado das temperaturas, a partir do método das diferenças finitas, quando $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$ e $u(x,0) = f(x)$, para $\mathrm{t} > 0$. Esse algoritmo foi utilizado para resolver um exemplo simples e aplicado à Engenharia Civil e o resultado aproximado das temperaturas foi comparado ao resultado exato da Equação do Calor.

Assim, para caracterizar uma aplicação desse algoritmo em um exemplo simples da Engenharia, foi considerado uma barra uniforme, isolada termicamente nas superfícies laterais (Figura 1), em que a condução do calor é calculada a partir da Equação 2; e também que o material utilizado seja o cobre, que tem como valor de difusividade térmica $1{,}153 * (10^{-4})\ m^2/s$ (PROTOLAB, 2018), devido ao seu grande uso em construções civis, como em tubos condutores de corrente elétrica.

Com isso, outros materiais também podem ser utilizados, como concreto, água, gesso, cobre, e entre outros. Porém, o cobre foi utilizado, devido ter um coeficiente de difusividade maior, o que acelera o aquecimento das barras e, assim, diminui o tempo de aquecimento.

Figura 1 – Condição de calor em uma barra uniforme isolada termicamente nas superfícies laterais.




Fonte: Adaptado de Wikipédia. Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/97/Temp_Rod_homobc.svg. Acesso em: 15 maio 2018.

## 4. Resultados e Discussão

O algoritmo, como demonstrado na Figura 2, gera resultados aproximados da temperatura $(w)$ da barra uniforme isolada termicamente nas superfícies laterais, a partir da utilização do método de diferenças finitas aplicado à Equação do Calor, utilizando os seguintes dados de entrada: comprimento da barra $(L)$, tempo total $(T)$, número de intervalos do comprimento da barra $(m)$, número de intervalos do tempo $(n)$, constante de difusividade térmica $(\alpha)$ e a função que descreve a condição inicial da temperatura da barra $[u(x,0) = f(x)]$.

Figura 2 – Código *Scilab*.

```
L=input ('Entre com o comprimento da barra, em m.');
T=input ('Entre com o valor do tempo total, em s.');
m=input ('Entre com o valor do número de intervalos do comprimento da barra.');
n=input ('Entre com o valor do número de intervalos de tempo.');
e=input ('Entre com a constante de difusividade térmica.');
f=input ('Entre com a função que descreve a condição inicial da temperatura da barra.','string');
deff('[f]=f(x)','f='+f')
h=L/m;
k=T/n;
o=((e^2)*k)/(h^2);
for i=1:(m-1)
  w(1,i)=f(i*h);
end
l(1)=1+(2*o)
u(1)=(-o)/l(1)
for i=2:(m-2)
   l(i)=1+(2*o)+(o*u(i-1))
   u(i)=-o/(l(i))
end
l(m-1)=1+(2*o)+(o*u(m-2))
t=1
for j=1:n
   t=t+1
   z(1,t)=w(1,1)/l(1);
   for i=2:m-1
      z(i,t)=w(1,i)+(o*z(i-1,t))/l(i)
   end
   w(1,m-1)=z(m-1,t);
   Indice=flipdim(1:(m-2),2);
   for i=1:(m-2)
      w(1,Indice(i))=z(Indice(i),t)-(u(Indice(i))*w(1,Indice(i)+1))
   end
end
disp(w)
```

Fonte: Dados da pesquisa.

A difusividade térmica é uma propriedade do material, que indica como o calor se difunde. Dessa forma, esse algoritmo pode ser utilizado para diversos materiais da construção civil, como concreto, água, gesso, cobre, e entre outros. Para maiores valores de difusividade térmica, as faces se aquecerão de forma mais rápida, por isso foi utilizado o material cobre, para que o tempo fosse reduzido, em que o valor da difusividade térmica é $1{,}153 * (10^{-4})\ m^2/s$ (PROTOLAB, 2018).

Dessa forma, utilizando o algoritmo apresentado e os seguintes parâmetros iniciais:

$$L = 1; T = 0; m = 10;\ n = 150;\ f(x) = \sin(\pi x), \tag{15}$$

chega-se em valores aproximados da temperatura. Já utilizando a solução exata da equação do calor, a série $u(x,t)$, chega-se em valores exatos da temperatura. Esses valores são demonstrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Temperaturas Aproximadas e Exatas.

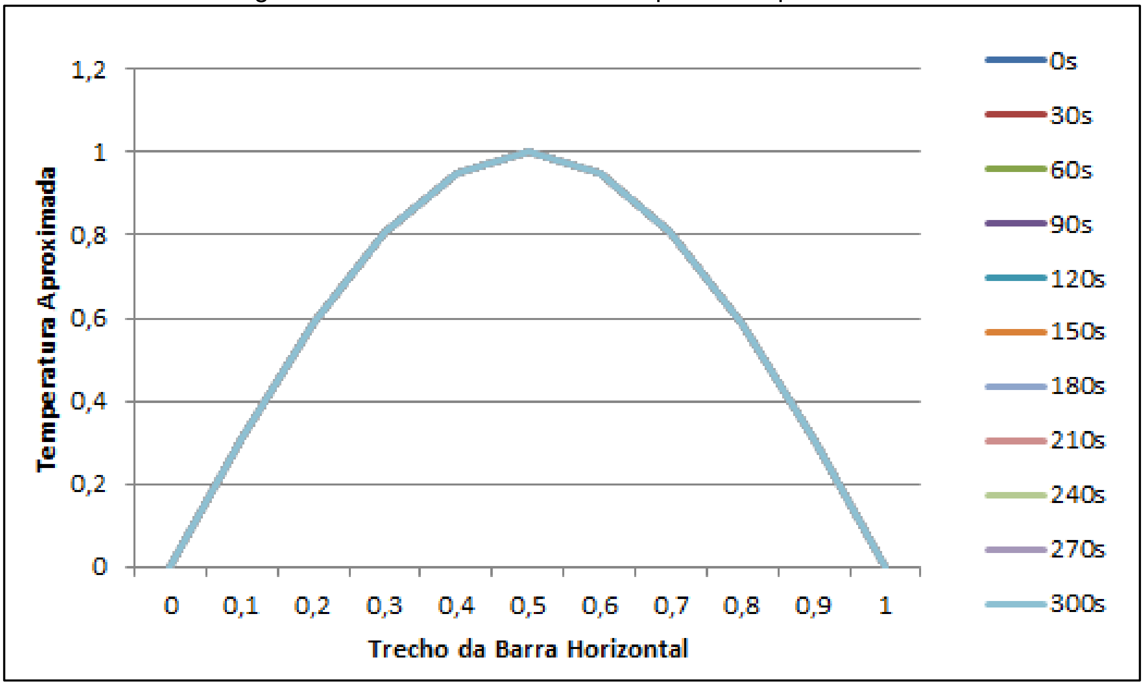
| **Trechos da Barra (L/m)** | **Temperaturas Aproximadas ($T_{AP}$)** | **Temperaturas Exatas ($T_E$)** | $\lvert T_{AP} - T_E \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0000000 | 0,0000000 | 0,0000000 |
| 0,1 | 0,3090170 | 0,3090170 | 0,0000000 |
| 0,2 | 0,5877853 | 0,5877852 | 0,0000001 |
| 0,3 | 0,8090170 | 0,8090170 | 0,0000000 |
| 0,4 | 0,9510565 | 0,9510565 | 0,0000000 |
| 0,5 | 1,0000000 | 1,0000000 | 0,0000000 |
| 0,6 | 0,9510565 | 0,9510565 | 0,0000000 |
| 0,7 | 0,8090170 | 0,8090170 | 0,0000000 |
| 0,8 | 0,5877853 | 0,5877852 | 0,0000001 |
| 0,9 | 0,3090170 | 0,3090171 | 0,0000001 |
| 1,0 | 0,0000000 | -0,0000031 | 0,0000031 |

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir dessa tabela, nota-se que a solução encontrada pelo algoritmo se aproxima bastante da solução exata encontrada pela resolução da Equação do Calor. Com isso, gráficos em linhas foram feitos no programa computacional Excel, que mostram a temperatura aproximada (Figura 3) e a temperatura exata (Figura 4) em função do trecho da barra horizontal, de 0s até 300s, com intervalos de 30s.

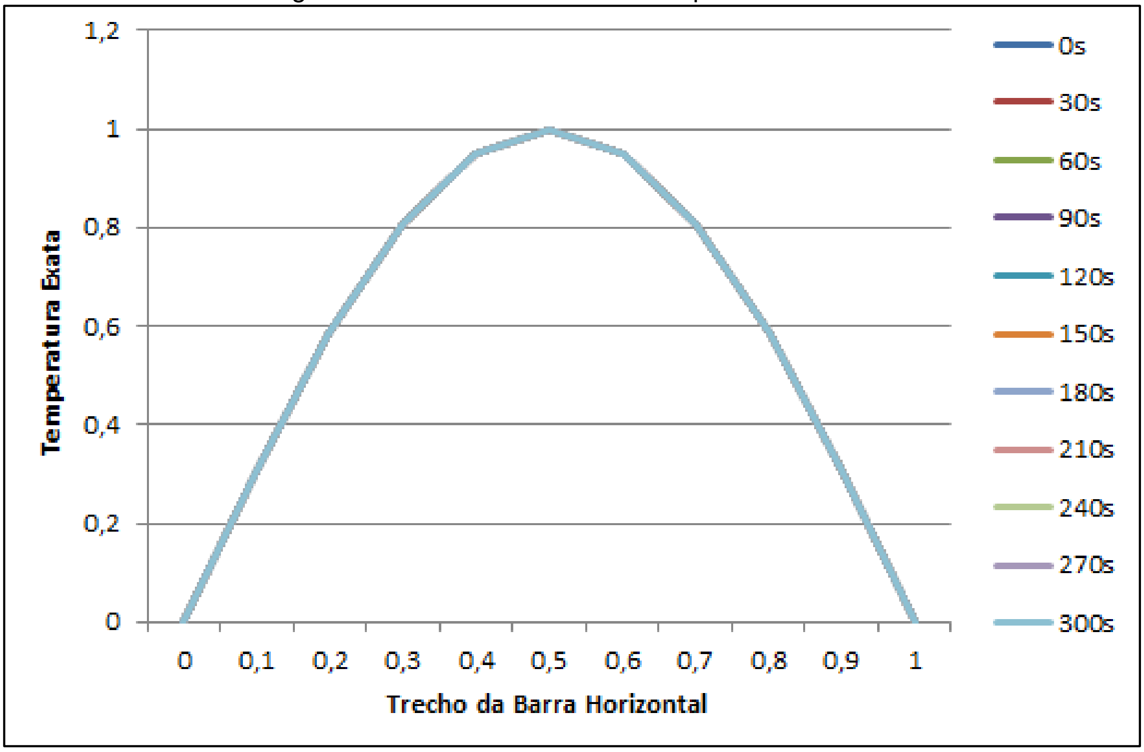
Esses dois gráficos demonstram também que a diferença entre as temperaturas durante o tempo utilizado (de 0s para 300s) é muito pequena, fazendo com que as linhas fiquem sobrepostas. Dessa forma, foi realizado um gráfico de linhas empilhadas que demonstram a função $u(x,t)$ para valores de temperaturas aproximados, em função do tempo e do trecho da barra horizontal, como é demonstrado na Figura 5, e também um gráfico de linhas empilhadas para soluções exatas da temperatura, demonstrado na Figura 6.

Figura 3 – Gráfico em linhas da temperatura aproximada.



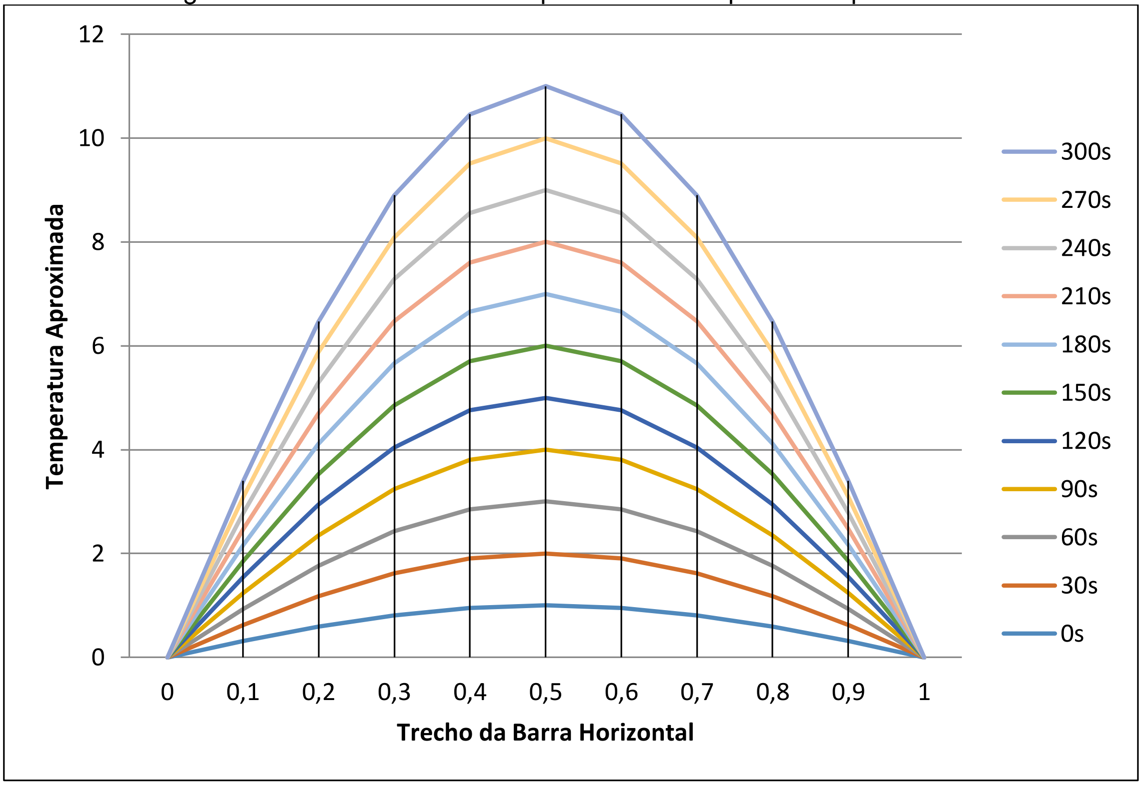

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 4 – Gráfico em linhas da temperatura exata.



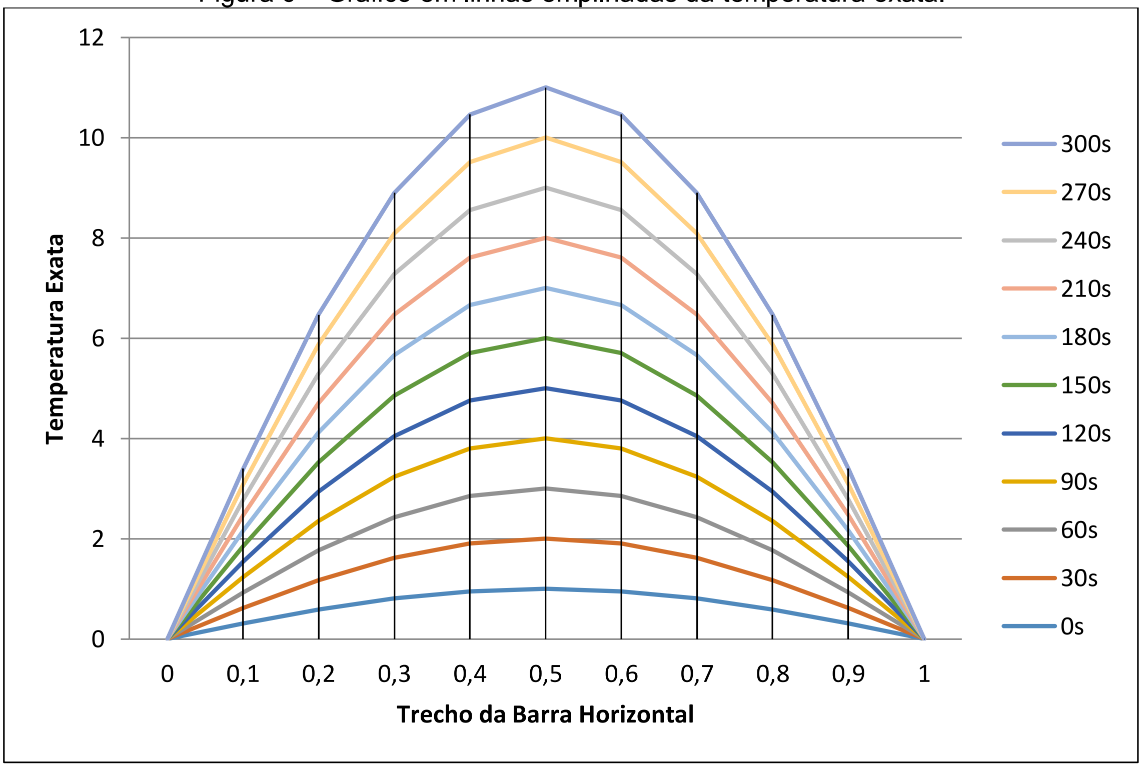

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 5 – Gráfico em linhas empilhadas da temperatura aproximada.




Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 6 – Gráfico em linhas empilhadas da temperatura exata.




Fonte: Dados da pesquisa.

Dessa forma, com a obtenção desses resultados percebe-se que a solução obtida pela implementação do método das diferenças finitas, via programa computacional *Scilab*, se aproxima da solução exata da equação diferencial parcial do problema da condução do calor, calculada pela soma da série infinita $u(x,t)$.

## 5. Considerações Finais

Com isso, conclui-se que os objetivos desse trabalho de iniciação científica foram alcançados. O algoritmo proposto foi implementado no programa computacional *Scilab*, em que a Equação do Calor foi otimizada por meio do método de diferenças finitas, gerando valores aproximados das temperaturas em diferentes tempos e seções da barra uniforme isolada termicamente. Esses valores foram comparados com os valores exatos, obtidos pela resolução da equação diferencial parcial, obtendo um erro muito pequeno.

Esse código computacional foi aplicado em um exemplo simples da Engenharia Civil, em que a barra uniforme é feita de um material utilizado na construção civil, como o cobre que tem sua principal aplicação em tubos condutores de corrente elétrica. Esse material foi utilizado, pois possui um valor mais alto de difusividade térmica, comparado com outros materiais, como o concreto e a água.

Também foram apresentados gráficos que mostram a proximidade entre os valores aproximados e valores exatos da temperatura, em função do tempo e do trecho da seção da barra horizontal.

Dessa forma, os aspectos teóricos e computacionais do problema da condução de calor foram comparados, sendo possível uma aplicação prática para esse trabalho, contribuindo para soluções de problemas da construção civil, como na dilatação dos materiais.

## Referências

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2010.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. 9. ed. Boston: Brooks/Cole, 2010.

FRANCO, N. M. B. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

PROTOLAB. Laboratório de Propriedades Termofísicas. **Difusividade térmica**: A difusividade indica como o calor se difunde através de um material. Disponível em: <http://www.protolab.com.br/Difusividade.htm>. Acesso em: 15 maio 2018.

SILVA, M. C. D.; PALMEIRA, C. F. B. **Equações Diferenciais Parciais e Suas Aplicações**. Departamento de Matemática. Rio de Janeiro: PUC, 2016.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. v. 1, v. 2. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 2001.