DETERMINATION DE LA VITESSE D'ECOULEMENT D'UN MILIEU GRANULAIRE PAR LA METHODE DE GALERKINE

Victor S. GBAGUIDI, Eustache ALODEHOU, Villévo ADANHOUNME , Gérard Aissè GBAGUIDI

Laboratoire d'énergétique et de mécanique appliquée (LEMA) , Ecole Polytechnique d'Abomey-Calavi / Université d'Abomey-Calavi Bp 2009 Cotonou (République du Bénin)

The difficulties bound to the transport of the granular materials in the industry brought numerous authors to propose some models in order to control the out-flow of these materials. The works of POLDERMAN permit to determine the field of velocity of the out-flow in mass of the unalterable granular materials from a mathematical model based on hypothesis according to which the angle ψ between the major main axis of the constraint and the half angle θ at the summit of a conical hopper is a linear function of θ with the following form: $\psi = C_1\theta$. For a given value of the ray r, he determines the out-flow velocity of the continuity equation by means of the unknown velocity for $\psi = 0$. Using the approached solution of the continuity equation calculated by the GALERKINE method, we determine the absolute error depending of the unknown velocity. With the given approximation precision the constraint on the unknown velocity is calculated.

Mots clés : *1- matériaux granulaires indéformables- 2 champ de vitesse -3 axe majeur*
Keywords: *1 - unalterable granular surroundings - 2 field of speed -3 major axis*

I- Introduction

L'usage des silos pour le stockage de certains matériaux granulaires et leur transport sont très mal maîtrisés dans l'industrie. D'énormes efforts ont été consentis ces dernières années pour développer des études expérimentales sur ces matériaux granulaires afin de mieux contrôler leur comportement à l'écoulement. Ces études expérimentales ont pour objectif la détermination des paramètres physico- mécaniques. Des modèles mathématiques ont été proposés afin de bien simuler leur écoulement. Ainsi POLDERMAN a proposé un modèle mathématique pour la détermination du champ de vitesse de l'écoulement en masse des matériaux granulaires indéformables. Il formule les hypothèses selon lesquelles l'angle ψ entre l'axe principal majeur de la contrainte et le demi angle θ au sommet d'une trémie conique est une fonction linéaire de θ de la forme $\psi = C_1\theta$ et pour une valeur fixée du rayon r , il détermine le champ de vitesse d'écoulement de l'équation de continuité à l'aide de la vitesse inconnue $u(0)$ au centre de la trémie pour l'angle ψ nul . En supposant pour notre part, l'angle $\psi = C_1\theta + C_2$ et grâce à la solution approchée de l'équation de continuité déterminée par la méthode de GALERKINE , nous déterminons l'expression de l'erreur absolue contenant la vitesse inconnue. Avec la précision d'approximation voulue nous déterminons la contrainte sur cette vitesse.

II- Position du probleme

Des études théoriques faites ont permis de déterminer le champ de vitesse d'écoulement en masse des matériaux granulaires.

Ainsi, dans ses travaux, POLDERMAN a déterminé le champ de vitesse dans le cas d'un écoulement en masse des matériaux granulaires en utilisant un modèle mathématique dans lequel il fait les hypothèses suivantes:

- l'angle ψ entre l'axe principal majeur de la contrainte et la direction θ est une fonction linéaire du demi angle au sommet θ de la forme

$$\psi = C_1\theta + C_2$$

avec

$$C_1 = \frac{1}{2\theta_w}\left[\delta + \arcsin\left(\frac{\sin\delta}{\sin\varphi}\right)\right]$$

et C_2 une constante [1], [2], [3], [4] ; [5] ;[6];

- la valeur du rayon r étant fixée, il détermine la vitesse dans une certaine direction θ en fonction de la vitesse inconnue u(o) telle que avec $C_2 = 0$

$$\frac{u(\theta)}{u(0)} = (\cos 2C_1\theta)^{\frac{3}{2C_1}},$$

avec u(θ) la solution de l'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} = 0 \qquad (1)$$

et $u(0)$ la vitesse des grains au centre de la trémie.

Pour notre part, en nous servant des hypothèses de POLDERMAN et en considérant que $C_2 \neq 0$, nous déterminons la solution exacte $u(\theta)$ de l'équation de continuité (1)

$$\frac{u(\theta)}{u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)} = [\cos 2(C_1\theta + C_2)]^{\frac{3}{2C_1}}.$$

Notre objectif est de déterminer une solution approchée de l'équation de continuité par la méthode de GALERKINE, de préciser l'erreur absolue contenant $u(-C_2/C_1)$. Avec la précision d'approximation voulue, nous établissons une contrainte sur la vitesse inconnue $u(-C_2/C_1)$.

III- L'expression de la vitesse d'écoulement d'un milieu granulaire par la methode de Galerkine

L'équation de continuité (1) est équivalente à l'équation suivante :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0, \qquad (2)$$

avec $x = r\cos(C_1\theta + C_2)$; $y = r\sin(C_1\theta + C_2)$.

Désignons par Ω l'ensemble défini par:

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 < y < x;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

et par : $S = \{(x, y) \in R^2 : y = 0; y = x; x^2 + y^2 = 1\}$ le bord du domaine Ω.

La condition $0 < y < x$ implique :

soit $\frac{-C_2}{C_1} \prec \theta \prec \frac{\pi}{4C_1} - \frac{C_2}{C_1}$, $C_1\theta + C_2 = Arc\tan\frac{y}{x} \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$, avec $C_1 > 0$.

En utilisant la méthode de GALERKINE, déterminons une solution approchée de l'équation (2) avec les conditions aux limites:

$$u(x;y)|_S = u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right), \quad u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right) = \frac{f\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)}{r^2}$$

où f est une fonction arbitraire. En faisant le changement:

$$v = u - u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right), \quad x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} + 2v + 2u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right) = 0. \qquad (3)$$

En multipliant l'équation (3) par une fonction φ et en intégrant sur Ω, on obtient:

$$\iint_\Omega [x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} + 2v + 2u(-\frac{C_2}{C_1})]\varphi dxdy = 0 \qquad (4)$$

soit

$$-\iint_\Omega v\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dxdy + 2u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)\iint_\Omega \varphi dxdy = 0. \qquad (5)$$

Choisissons une solution approchée v_1 de la forme :

$$v_1(x;y) = \alpha_1 y(x-y)\left(1-x^2-y^2\right)$$

prenant la valeur nulle sur le bord S, avec α_1 une constante arbitraire à déterminer.

Posons $\varphi(x,y) = v_1(x,y) = v(x,y)$ et prenant en compte

$$\frac{-C_2}{C_1} < \theta < \frac{\pi}{4C_1} - \frac{C_2}{C_1} \tag{6}$$

alors l'équation (5) donne: $\alpha_1 = -10\,\dfrac{4-\pi}{\pi-3}\,u\left(\dfrac{-C_2}{C_1}\right)$

donc $$v_1(x;y) = -10\frac{4-\pi}{\pi-3}u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)y(x-y)\left(1-x^2-y^2\right). \tag{7}$$

Enfin $$u_1(x;y) = u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)\left[1-10\frac{4-\pi}{\pi-3}y(x-y)\left(1-x^2-y^2\right)\right]. \tag{8}$$

IV- Evaluation de l'erreur

On peut constater que: $$u(x,y) = u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2C_1}} \tag{9}$$

est la solution exacte de l'équation (2) où f est une fonction arbitraire et

$$u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right) = \frac{f\left(-C_2/C_1\right)}{x^2+y^2}. \tag{10}$$

Présentons un tableau comparatif des valeurs prises par u_1 et u avec l'erreur absolue qui dépend de $u(-C_2/C_1)$.

V- Analyse des resultats

Comme on peut le constater l'erreur absolue est de la forme $u(-C_2/C_1)$. Ainsi avec une précision d'approximation voulue 10^{-n}, $n > 0$ nous obtenons un majorant de la vitesse inconnue $u(-C_2/C_1)$ qui est de la forme $10^{-n}/\gamma$.

VI- Conclusion

Le présent travail a permis de proposer une solution approchée par la méthode de GALERKINE de l'équation de continuité en prenant en compte les paramètres r, θ ,ψ, C_1 et C_2 . Ainsi nous avons pu évaluer l'erreur absolue qui dépend de la vitesse inconnue. Avec la précision d'approximation voulue nous déterminons un majorant de la vitesse inconnue. Avec le majorant déterminé sur la vitesse l'on peut procéder facilement à la vérification des résultats expérimentaux. Nous avons donc mis en évidence que la vitesse inconnue $u(-C_2/C_1)$ est limitée par une constante $10^{-n}/\gamma$.

x	y	u	u_1	$\lvert u-u_1\rvert$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$0{,}108u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)$	$0{,}127u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)$	$0{,}019u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$0{,}0284u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)$	$0{,}6408u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)$	$0{,}6124u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$0{,}0284u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)$	$0{,}7942u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)$	$0{,}7658u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)$
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$0{,}011u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)$	$0{,}922u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)$	$0{,}911u\left(\frac{-C_2}{C_1}\right)$

Bibliographie

[1] *B Yacoub, JC ROTH*, en 1996, Modélisation du comportement de l'interface matériau granulaire-paroi dans un écoulement gravitaire .

[2] *Abriak N.E Gouvres R*, 1992, Ecoulement d'un matériau granulaire à travers un orifice Passage du milieu discontinu au milieu continu. Approche expérimentale Rev. Franç Géotech. N°65, pp 29-35.

[3] *Cambou B* . , Analyse du comportement des milieux granulaires basées sur leur nature discontinue Revue Française de Géotechnique n° 14, pp. 5-24.

[4] *Darves F. Labanieh S.*, 1980, Comportement mécanique des milieux granulaires en liaison avec leur structure CR 15ième coll. GFR., Paris, pp. 329-351

[5] *Terzaghi K . Peckb R. B.* , Mécanique des sols appliquée Dunod Ed. , Paris , 565.

[6] *Sid Mohamed* (1998) « Approche analytique de l'écoulement en masse d'un matériau granulaire dans une trémie » . Thèse de Doctorat en Génie-civil soutenu le 18 février 1998.