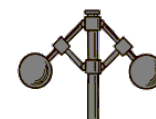




# Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial

Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 15 (2018) 384-390



Crossref  
Similarity Check  
Powered by iThenticate

[www.revista-riai.org](http://www.revista-riai.org)

## Obtención de un Modelo Dinámico Para un Robot 3RRR Basado en Teoría de Screws

Fernando E. Serrano<sup>a,\*</sup>, Benigno A. Rodríguez-Gómez<sup>b</sup>, Manuel Cardona<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Universidad Tecnológica Centroamericana (UNITEC), Zona Jacaleapa, Tegucigalpa, Honduras C.A.

<sup>b</sup>Universidade da Coruña, Departamento de Ingeniería Industrial, La Coruña, España

<sup>c</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Don Bosco, San Salvador, El Salvador C.A.

### Resumen

En este artículo se propone una nueva técnica para la obtención de un modelo dinámico de robots 3RRR a partir de un modelo cinemático basado en teoría de screws, la cual permite obtener la cinemática de un robot ya sea ésta abierta o cerrada. Primero se obtiene el modelo cinemático de una forma compacta y a partir de éste se llega al modelo dinámico aplicando el método de Euler Lagrange, con ello se transfieren las características de simplicidad y compacidad del modelo cinemático al dinámico. El modelo dinámico se obtiene inicialmente para las juntas actuadas y luego para las coordenadas del efector a través de sus interrelaciones. Para comprobar la efectividad de este desarrollo teórico se prueba el modelo obtenido con un controlador proporcional-derivativo (PD) ya que provee de una estrategia de control simple que luego puede ser extendida a controladores más efectivos.

*Palabras Clave:*

Cinemática, Dinámica, Robot Paralelo, Teoría de Screws, Robot 3RRR.

### Dynamic Model Derivation of a 3RRR Robot Based in Screw Theory

#### Abstract

In this article a technique to obtain a dynamic model of a 3RRR robot from its kinematic model based on screw theory is proposed, which allows to obtain the open or closed robot kinematics. First the kinematic model is obtained in a compact form and then the dynamic model is obtained from the Euler Lagrange method, with this the simplicity and compactness characteristics are transferred to the dynamic model. The dynamic model is obtained initially for the actuated joints and then for the effector coordinates through its interrelations. To prove the effectiveness of this theoretical derivation the obtained model is tested with a proportional-derivative controller (PD) because it provides a simple control strategy that can be extended later to more effective controllers.

*Keywords:*

Kinematics, Dynamics, Parallel Robot, Screw Theory, 3 RRR Robot

### 1. Introducción

Los robots paralelos o de cadena cinemática cerrada poseen mayor precisión, rigidez, capacidad de carga y desarrollan mayores velocidades que los robots serie o de cadena cinemática abierta, estas ventajas los hacen especialmente atractivos para aplicaciones industriales como la manipulación y almacenaje de piezas. En su contra está el inconveniente de la complejidad en la obtención de sus modelos cinemático y dinámico, así como la dificultad de lograr una representación simple y compacta

de los mismos. En la literatura abundan modelos orientados al control cinemático, y es mucho menor el número de publicaciones que abordan el enfoque del control dinámico del robot, siendo éste el que provee mayor robustez y rechazo a perturbaciones. En este trabajo se presenta un procedimiento orientado al control dinámico haciendo uso de la teoría de screws en la fase de modelado. Dicha teoría se ha aplicado en la obtención de modelos cinemáticos compactos para varios tipos de robots paralelos consiguiendo resultados satisfactorios, tal como

\*Autor para correspondencia: [serranofer@eclipseo.eu](mailto:serranofer@eclipseo.eu)

**To cite this article:** Fernando E. Serrano, Benigno A. Rodríguez-Gómez, Manuel N. Cardona. 2018. Dynamic Model Derivation of a 3RRR Robot Based in Screw Theory. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 15, 384-390. <https://doi.org/10.4995/riai.2018.8725>

Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4,0 International (CC BY-NC-ND 4,0)

mo se pone de manifiesto en Mejia et al. (2016), Bartkowiak and Woernle (2016), Xu et al. (2017), Zhao et al. (2017), Sun et al. (2016) y Lopez-Custodio et al. (2017). Para el caso de los robots 3RRR, Chen et al. (2015) presentan la cinemática directa y la matriz jacobiana basada en teoría de screws obteniendo un modelo simple que describe las características relevantes y puede extenderse al modelo dinámico, incluyendo las relaciones entre las variables de las juntas actuadas, y las variables del efector final. Otras alternativas importantes para la obtención de modelos cinemáticos se presentan en Wu and Carricato (2017), Liping et al. (2016), Wu et al. (2015) y Xiong et al. (2016) donde se obtiene la cinemática de varios robots paralelos. Partiendo de los modelos cinemáticos de Cardona (2009), Cardona (2015) se formula un modelo dinámico compacto basado en la formulación de Euler Lagrange considerando, por medio de los jacobianos, las relaciones entre las variables de las juntas actuadas y las variable del actuador final. Es objetivo de este trabajo, verificar el modelo dinámico del robot 3RRR mediante una estrategia de control simple, por ello se elige un controlador proporcional-derivativo (PD) ya que un modelo dinámico mal diseñado provocaría que tal controlador no funcione adecuadamente, y por otra parte garantiza que otros estrategias de control más completas resultarán realizables. Los resultados de este trabajo se pueden extender a otros estudios relacionados con el control de este mecanismo tal como aparece en Zubizarreta et al. (2012). Debe tenerse en cuenta que el modelo dinámico obtenido considera las variables de las juntas actuadas (al menos en las variables de estado), pero también pueden obtenerse los valores para las juntas pasivas. A partir de aquí, el artículo se estructura de la siguiente manera: en la Sección 2 se presenta el modelo cinemático del robot 3RRR comenzando por una breve introducción de la teoría de screws. En la Sección 3 se muestra el modelo dinámico para el robot 3RRR tanto relacionado a las juntas activas como a las variables del efector final. En la Sección 4 se introduce un controlador proporcional-derivativo (PD) como una estrategia de control simple que puede extenderse a técnicas de control más complejas. Finalmente, en la Sección 5 se realiza una simulación numérica para comprobar la eficiencia del controlador PD aplicado en el modelo dinámico del robot 3RRR y en la Sección 6 se exponen las conclusiones del estudio.

## 2. Cinemática del Robot 3RRR Basada en Teoría de Screws

La teoría de screws se aplica a la obtención de modelos cinemáticos para diferentes mecanismos debido a que permite obtener una representación simple y compacta de los mismos Mejia et al. (2016), Bartkowiak and Woernle (2016), Xu et al. (2017), Zhao et al. (2017). A continuación se desarrolla la cinemática de velocidad de un robot 3RRR con el objeto de posteriormente desarrollar un modelo dinámico del mismo, partiendo de las definiciones de los twist y los wrench, para luego obtener los jacobianos.

### 2.1. Definición de los Twists, Wrenches y sus Productos

Para la representación de un screw seguimos el formalismo usado en Chen et al. (2015)

$$\$ = s + \epsilon s_0 \tag{1}$$

donde la parte real  $s$  es un vector unitario en la dirección del eje screw,  $s_0$  denota el momento del screw respecto al origen y  $\epsilon$  denota la unidad dual que se define como

$$\begin{aligned} \epsilon &\neq 0 \\ \epsilon^2 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

un screw unitario para juntas de revolución se define como:

$$\begin{aligned} \hat{\$} &= \begin{pmatrix} s \\ s_0 \times s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

donde  $s = [S_1, S_2, S_3]^T$  y  $s_0 \times s = [S_4, S_5, S_6]^T$ . Un twist puede ser escrito como  $\$ = \dot{q}\hat{\$}$ , donde  $\dot{q} = \theta$  es la intensidad del twist (velocidad angular) para juntas de revolución. Un wrench se puede obtener a partir del siguiente screw unitario:

$$\hat{\$} = \begin{pmatrix} s_r \\ s_{r0} \times s_r \end{pmatrix} \tag{4}$$

por lo que si la intensidad es  $\rho$  y se considera que sólo actúan fuerzas el wrench se define como:

$$\$ = \rho \hat{\$} \tag{5}$$

a continuación se definirán los productos de screws necesarios para obtener un modelo cinemático para el robot 3RRR. Para definir el producto interno y recíproco de screws se consideran los siguientes screws  $\$_1$  y  $\$_2$  por lo que el producto interno está definido por:

$$\$_1 \cdot \$_2 = s_1 s_2 + \epsilon(s_1 s_{02} + s_{01} s_2) \tag{6}$$

ahora considerando un wrench  $\$_1 = \rho(f + \epsilon\tau)$  y un twist dado por  $\$_2 = \omega(w + \epsilon v)$  su producto recíproco viene dado por:

$$\$_1 \circ \$_2 = \rho\omega(f \cdot v + \tau \cdot w) \tag{7}$$

dos screws son recíprocos si se cumple la siguiente condición:

$$\$_1 \circ \$_2 = 0 \tag{8}$$

cuando se cumple esta condición, estamos ante una singularidad y el trabajo es igual a cero. Por último la traspuesta de un screw tal como aparece en (3) es igual a:

$$S^T = \begin{pmatrix} S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

2.2. Cinemática del Robot 3RRR

En la Figura 1 se presenta el esquema del robot 3RRR que tiene 3 juntas de revolución actuadas  $P, Q, R$  y el efector final el cual tiene movimientos en los ejes  $x, y$  y una rotación alrededor del eje  $z$ . Antes de definir un modelo cinemático es importante establecer la reciprocidad de las juntas pasivas  $D, E, F$  definiendo primero los screws unitarios para la primera cadena cinemática Cardona (2015).

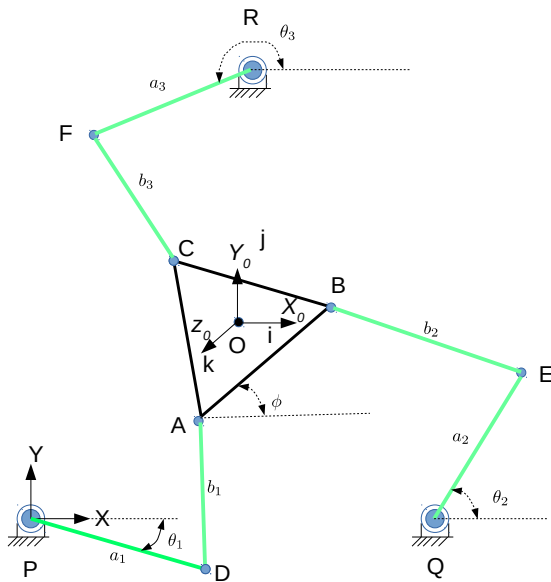


Figura 1: Robot 3RRR.

$$\begin{aligned} \hat{S}_{1,i} &= \begin{pmatrix} s_{1,i} \\ p_1 \times s_{1,i} \end{pmatrix} \\ \hat{S}_{2,i} &= \begin{pmatrix} s_{2,i} \\ l_1 \times s_{2,i} \end{pmatrix} \\ \hat{S}_{3,i} &= \begin{pmatrix} s_{3,i} \\ a_1 \times s_{3,i} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

donde están definidas a lo largo del eje  $j$  de la  $i$ -ésima cadena cinemática y

$$\begin{aligned} p_1 &= \vec{OP} \\ l_1 &= \vec{OD} \\ a_1 &= \vec{OA} \\ s_{1,i}, s_{2,i}, s_{3,i} &= \hat{k} \end{aligned} \quad (11)$$

los vectores que están en (11) están definidos por

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OD} + \vec{DP} \\ \vec{OA} &= a_x i + a_y j \\ \vec{OD} &= \vec{OA} + \vec{AD} \end{aligned} \quad (12)$$

donde estos vectores se encuentran en el Apéndice A. Cada cadena cinemática puede considerarse como una cadena abierta por lo que el twist instantáneo para la primera cadena es:

$$S_{p1} = \dot{\theta}_1 \hat{S}_{1,i} + \dot{\theta}_2 \hat{S}_{2,i} + \dot{\theta}_3 \hat{S}_{3,i} \quad (13)$$

A partir de la Figura 1 se puede deducir que el único screw recíproco se encuentra a lo largo del segundo eslabón y viene dado por:

$$\hat{S}_r = \begin{pmatrix} s_{r1} \\ a_i \times s_{r1} \end{pmatrix} \quad (14)$$

tomando el producto ortogonal entre (13) y (14) se obtiene:

$$\hat{S}_{r1}^T S_{p1} = \dot{\theta}_{1,i} (\hat{S}_{r1}^T S_{1,i}) \quad (15)$$

considerando las tres cadenas cinemáticas se puede escribir (15):

$$\hat{S}_{r,i}^T S_p = \dot{q}_{1,i} (\hat{S}_{r,i}^T S_{1,i}) \quad (16)$$

por lo que se puede obtener los Jacobianos con la siguiente relación  $J_x \dot{x} = J_q \dot{q}$  los cuales están definidos como

$$\begin{aligned} J_x &= \begin{pmatrix} (a_1 \times s_{r1})^T & s_{r1}^T \\ (a_2 \times s_{r2})^T & s_{r2}^T \\ (a_3 \times s_{r3})^T & s_{r3}^T \end{pmatrix} \\ J_q &= \begin{pmatrix} S_{r1}^T S_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & S_{r2}^T S_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & S_{r3}^T S_{1,3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

Las deducciones de  $J_x$  y  $J_q$  se encuentran en Cardona (2015) y Cardona (2009).

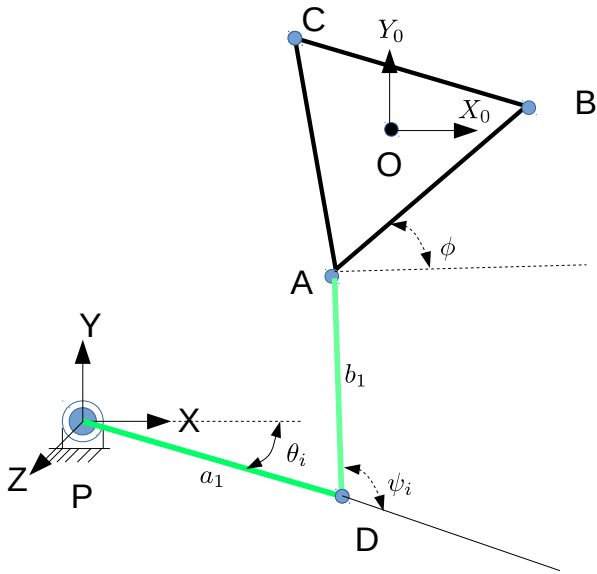


Figura 2: Cadena cinemática del robot 3RRR.

### 3. Obtención del Modelo Dinámico Para el Robot 3RRR

Esta sección está dividida en dos partes, en la primera se presenta la obtención de un modelo dinámico para las variables del efector final, y en la segunda se propone un modelo dinámico para las variables de las juntas actuadas. Para realizar la primera parte se han de definir las variables de estado  $X \in \mathbb{R}^6$  y  $q \in \mathbb{R}^3$  para la posición y orientación del efector final así como las variables de estado para las juntas pasivas. Las variables de estado del modelo dinámico propuesto sólo consideran las juntas actuadas por ser las variables a controlar. Para obtener las variables de las juntas pasivas es necesario resolver un conjunto de ecuaciones no lineales tal como muestra en el Apéndice B obtenidas a partir de la Figura 2

$$\begin{aligned} X &= (\theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ x \ y \ z)^T \\ q &= (\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3)^T \end{aligned} \tag{18}$$

Tomando en cuenta que a partir de los Jacobianos que se muestran en (17) se pueden obtener las siguientes transformaciones entre las variables  $q$  y  $X$

$$\begin{aligned} X &= J_x^{-1} J_q q \\ q &= J_q^{-1} J_x X \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \dot{X} &= J_x^{-1} J_q \dot{q} \\ \dot{q} &= J_q^{-1} J_x \dot{X} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= J_x^{-1} J_q \ddot{q} \\ \ddot{q} &= J_q^{-1} J_x \ddot{X} \end{aligned} \tag{21}$$

Para poder derivar e integrar  $J_x \dot{x} = J_q \dot{q}$  los Jacobianos  $J_x$  y  $J_q$  se consideran constantes.  $J_x$  es constante debido a que el vector  $\vec{OA}$  que se muestra en (12) es constante y  $J_q$  se asume que es constante, ya que es importante considerar que los ángulos  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$  que se muestran en (18) se obtienen del modelo dinámico (variables de estado) que se muestra en (31) obtenidos al integrar el sistema dinámico del robot con un solver de ecuaciones diferenciales no-lineales adecuado y no del modelo cinemático, de esta forma estos ángulos se pueden considerar constantes y por lo tanto  $J_q$  se puede asumir constante aunque esta depende de  $\$_{1,i}$  y por lo tanto de  $p_1$  que se muestra en (11). Las transformaciones que se muestran en (19), (20) y (21) se aplican para la obtención de los modelos dinámicos para el robot 3RRR que se obtienen con la formula de Euler Lagrange.

#### 3.1. Obtención de un Modelo Dinámico Para las Variables del Efector Final

Partiendo de las expresiones para la energía cinética  $K$  y la energía potencial  $P$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \dot{X}^T D \dot{X} \\ P &= mgX^T (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) \end{aligned} \tag{22}$$

donde  $m$  es la masa de la plataforma,  $g$  es la constante de gravedad y  $D$  es la matriz de inercia Zubizarreta et al. (2012).

$$D = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_p \end{pmatrix} \tag{23}$$

donde  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  e  $I_{zz}$  son las inercias y  $m_p$  es la masa de la plataforma. El Lagrangiano  $L$  está dado por:

$$L = \frac{1}{2} \dot{X}^T D \dot{X} - mgX^T (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T \tag{24}$$

y la formulación de Euler Lagrange está dada por

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right] - \frac{\partial L}{\partial X} = \tau_x \tag{25}$$

donde  $\tau_x \in \mathbb{R}^6$  es la variable de fuerzas y pares de entrada. El modelo dinámico para el efector final está dado por:

$$D \ddot{X} + mg (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T = \tau_x \tag{26}$$

en la próxima subsección se muestra la obtención del modelo dinámico para las juntas actuadas.

### 3.2. Modelo Dinámico para las Juntas Actuadas

Considerando la energía cinética y potencial para las juntas actuadas usando la transformación (19)

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \dot{q}^T D_q \dot{q} \\
 P &= mgq^T (J_x^{-1} J_q)^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

donde  $D_q$  es

$$D_q = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}
 \tag{28}$$

donde  $I_1, I_2$  e  $I_3$  son las inercias relacionadas a los actuadores. Con el siguiente Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T D_q \dot{q} - mgq^T (J_x^{-1} J_q)^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T
 \tag{29}$$

Haciendo uso de la formulación de Euler Lagrange para las juntas actuadas:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau_q
 \tag{30}$$

donde  $\tau_q \in \mathbb{R}^3$  es la variable de los pares de entrada por lo que el modelo dinámico para las juntas actuadas es:

$$D_q \ddot{q} + mg(J_x^{-1} J_q)^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \tau_q
 \tag{31}$$

### 4. Controlador Proporcional Derivativo PD para el Robot 3RRR

En la Figura 3 se muestra una estructura de control proporcional derivativo con retroalimentación de estados para el robot 3RRR. La dinámica del robot 3RRR se establece en forma de variables de estado de (26) y (31)

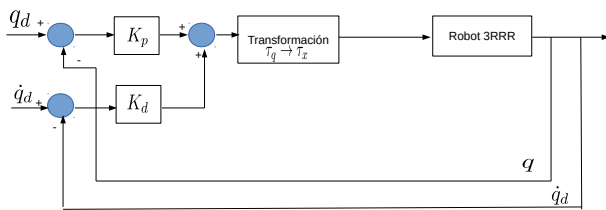


Figura 3: Controlador PD para el robot 3RRR.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= J_q^{-1} J_x D^{-1} \tau_x - J_q^{-1} J_x D^{-1} mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

donde  $x_1 = q$  y  $x_2 = \dot{q}$  y tal como se puede ver en la Figura 3 hay una transformación de  $\tau_q \rightarrow \tau_x$  de modo que el siguiente modelo dinámico equivalente obtenido a partir de (26) y (31), (19), (20) y (21) es

$$\ddot{X} = (J_x^{-1} J_q D_q^{-1}) \tau_q - mg (J_x^{-1} J_q D_q^{-1}) J_x^{-1} J_q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \tag{33}$$

La transformación  $\tau_q \rightarrow \tau_x$  permite convertir la variable de entrada para las variables  $q$  a las variables de entrada para las variables  $X$

$$\tau_x = (J_x^{-1} J_q D_q^{-1}) \tau_q
 \tag{34}$$

El objetivo de proponer un controlador PD para los modelos dinámicos obtenidos es probar que dichos modelos son apropiados para diseñar estrategias de control tanto simples como avanzadas. Por ello se elige el controlador más simple y básico de modo que sirva como referencia para el diseño de estrategias de otros tipos de control, como controladores en modo deslizante, controladores robustos y control de dinámica inversa Zubizarreta et al. (2012).

### 5. Simulación Numérica

En esta sección se muestran los resultados obtenidos por simulación numérica de la estabilización de las variables de las juntas actuadas para un robot 3RRR, haciendo uso del controlador proporcional derivativo PD de la Figura 3, los parámetros de la simulación están disponibles en el apéndice C. En la Figura 4 se presentan las variables actuadas  $q$  al aplicar una referencia de paso a los 0 segundos y tal como se aprecia que la variable alcanza el valor final de  $q = [0,005, 0,005, 0,005]^T$  en un tiempo de 0,4 s. En la Figura 5 se muestra la variable de error para las variables  $q$ , y tal como se puede notar tienden al origen cuando el tiempo crece probando que el controlador PD estabiliza las variables de modo que se alcance el valor final deseado con un tiempo de asentamiento de 0,4 s y un porcentaje de error sobre el valor deseado de 0% ( $|v_f - v_a|/v_f \%$ ) donde  $v_f$  es el valor final deseado y  $v_a$  es el valor alcanzado para cada variable del sistema. Finalmente, en las Figuras 6 y 7 se muestran las entradas  $\tau_q$  y  $\tau_x$  respectivamente, comprobando que el funcionamiento del controlador proporcional-derivativo es adecuado debido a que el porcentaje de error es de 0%, tiene una alta rapidez de respuesta y no hay oscilaciones.

## 6. Conclusiones

Partiendo de la validez de la teoría de screws para la obtención de modelos cinemáticos compactos para un robot 3RRR, se desarrolla el modelo dinámico para ese tipo de robot que incluye tanto las variables del efector final como las de las juntas actuadas, para ello se ha hecho uso de la formulación de Euler Lagrange. Aunque sólo las variables de las juntas actuadas se incluyen en la variable de estado, también se pueden obtener las variables de las juntas no actuadas. Se ha propuesto el control del robot 3RRR con un algoritmo básico proporcional derivativo comprobando mediante simulación numérica el buen rendimiento del sistema, ello hace evidente que formas de control más sofisticadas pueden aprovechar este mismo modelo para mejorar los resultados.

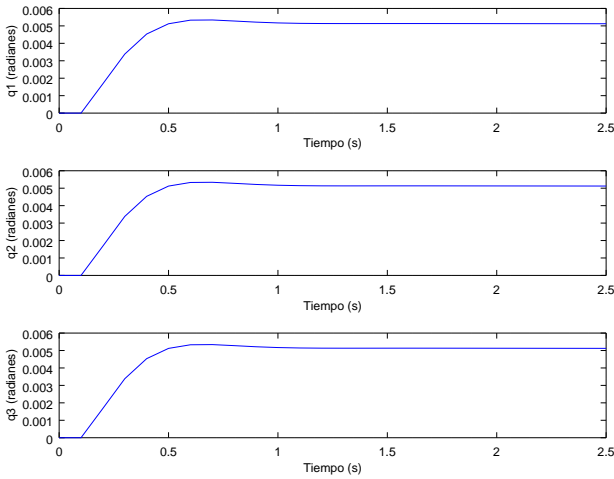


Figura 4: Variable  $q$ .

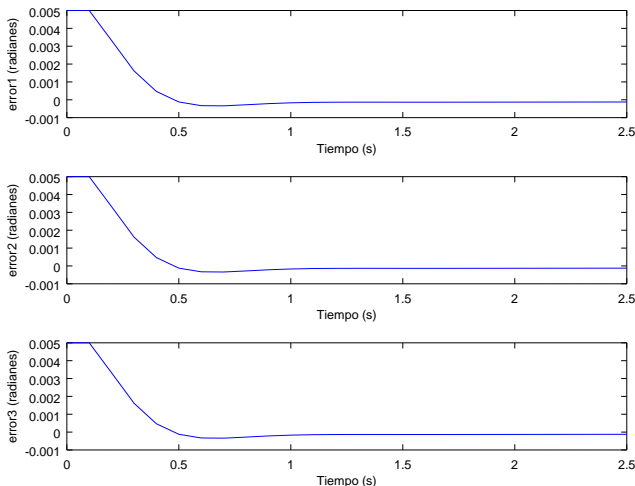


Figura 5: Variable de error para  $q$ .

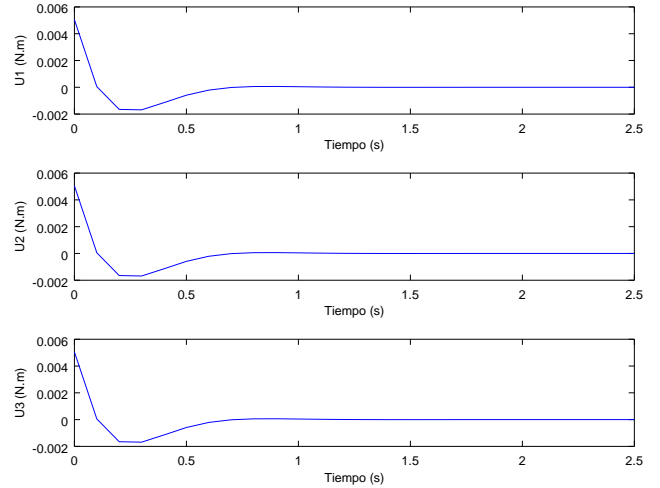


Figura 6: Variable de entrada  $\tau_q$ .

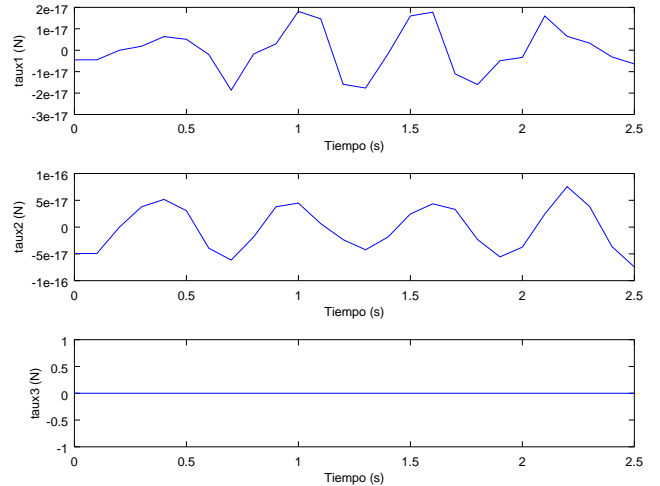


Figura 7: Variable de entrada  $\tau_x$ .

## Agradecimientos

Los autores agradecen a las autoridades de la Universidad Don Bosco San Salvador, El Salvador junto al departamento de ingeniería industrial de la Universidad de la Coruña, España, por su apoyo en la ejecución de este proyecto y la preparación de este artículo.

## Referencias

Bartkowiak, R., Woernle, C., 2016. Necessary and sufficient mobility conditions for single-loop overconstrained nh mechanisms. *Mechanism and Machine Theory* 103, 65 – 84.

Cardona, M. N., 2009. Analisis cinematico de robots paralelos planares 3rrr. *Vigesimo novena convencion de centroamerica y panama del IEEE CON-CAPAN XXIX*.

Cardona, M. N., Feb 2015. Dimensional synthesis of 3rrr planar parallel robots for well-conditioned workspace. *IEEE Latin America Transactions* 13 (2), 409–415.

DOI: 10.1109/TLA.2015.7055557

- Chen, X., Liu, X.-J., Xie, F., 2015. Screw theory based singularity analysis of lower-mobility parallel robots considering the motion/force transmissibility and constrainability. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Liping, W., Huayang, X., Liwen, G., Yu, Z., 2016. A novel 3-puu parallel mechanism and its kinematic issues. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 42, 86 – 102.
- Lopez-Custodio, P., Rico, J., Cervantes-Sánchez, J., Páez-Soto, G., Dáez-Martínez, C., 2017. Verification of the higher order kinematic analyses equations. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 61, 198 – 215.
- Mejía, L., Simas, H., Martins, D., 2016. Wrench capability in redundant planar parallel manipulators with net degree of constraint equal to four, five or six. *Mechanism and Machine Theory* 105, 58 – 79.
- Sun, T., Zhai, Y., Song, Y., Zhang, J., 2016. Kinematic calibration of a 3-dof rotational parallel manipulator using laser tracker. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 41, 78 – 91.
- Wu, A., Shi, Z., Li, Y., 2015. Formal kinematic analysis of a general 6r manipulator using the screw theory. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Wu, Y., Carricato, M., 2017. Identification and geometric characterization of lie triple screw systems and their exponential images. *Mechanism and Machine Theory* 107, 305 – 323.
- Xiong, T., Chen, L., Ding, J., Wu, Y., Hou, W., 2016. Recognition of kinematic joints of 3d assembly models based on reciprocal screw theory. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Xu, Y., Zhang, D., Yao, J., Zhao, Y., 2017. Type synthesis of the 2r1t parallel mechanism with two continuous rotational axes and study on the principle of its motion decoupling. *Mechanism and Machine Theory* 108, 27 – 40.
- Zhao, T., Li, E., Bian, H., Wang, C., Geng, M., 2017. Type synthesis and analysis of rotational parallel mechanisms with a virtual continuous axis. *Mechanism and Machine Theory* 109, 139 – 154.
- Zubizarreta, A., Marcos, M., Cabanes, I., Pinto, C., Portillo, E., 2012. Redundant sensor based control of the 3rrr parallel robot. *Mechanism and Machine Theory* 54, 1 – 17.

### Apéndice A. Vectores Utilizados en el Cálculo de los Screws

En este apéndice se calcula el vector  $p_1$  utilizado en el cálculo del Jacobiano tomando en cuenta que este se calcula de la misma manera para el resto de las cadenas cinemáticas. Primero considere las longitudes de los eslabones para la  $i$ -ésima cadena cinemática  $l_{1,i}$  y  $l_{2,i}$  con los vectores que aparecen en (12), donde  $a_{x,i}$  y  $a_{y,i}$  son las distancias hasta el origen de los ejes  $X_0$  y  $Y_0$ . El vector  $\vec{AD}$  está dado por

$$\vec{AD} = l_{2,i}\cos(\theta_{1,i} + \theta_{3,i})i + l_{2,i}\sin(\theta_{1,i} + \theta_{3,i})j \quad (\text{A.1})$$

El vector  $\vec{DP}$  es

$$\vec{DP} = l_{1,i}\cos(\theta_{1,i})i + l_{1,i}\sin(\theta_{1,i})j \quad (\text{A.2})$$

Por lo que  $p_1 = \vec{OP}$  tal como aparece en (12) y está definido de la siguiente manera

$$p_1 = [a_{x,i} + l_{1,i}\cos(\theta_{1,i}) + l_{2,i}\cos(\theta_{1,i} + \theta_{3,i})]i + [a_{y,i} + l_{1,i}\sin(\theta_{1,i}) + l_{2,i}\sin(\theta_{1,i} + \theta_{3,i})]j \quad (\text{A.3})$$

### Apéndice B. Cálculo de los Angulos de Juntas Pasivas

En este apéndice se muestra la forma de calcular los ángulos de las juntas pasivas que son  $\psi$  y  $\phi$  tal como se muestra en

la Figura 2 resolviendo sistemas de ecuaciones no lineales con un solver adecuado. En este apéndice sólo se muestran los resultados para la cadena cinemática 1 y fácilmente se pueden encontrar los ángulos de las juntas pasivas para las otras cadenas cinemáticas. El primer sistema de ecuaciones no lineales para encontrar  $\psi$  está dado por Cardona (2015), Cardona (2009):

$$\begin{aligned} x_a - l_{2,1}\cos(\psi) &= l_{1,1}\cos(\theta_1) \\ y_a - l_{2,1}\sin(\psi) &= l_{1,1}\sin(\theta_1) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Ya que  $\theta_1$  es el ángulo obtenido de la junta actuada por medio de las variables de estado. El sistema de ecuaciones no lineales para encontrar  $\phi$  es

$$\begin{aligned} x_b - h\cos(\phi) &= x_a \\ y_b - h\sin(\phi) &= y_a \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

donde  $h$  es la longitud de uno de los lados del efector final (triángulo equilátero).

### Apéndice C. Parámetros de la Simulación

Los parámetros de la simulación son

$$D = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 \end{pmatrix} \quad D_q = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Con los siguientes parámetros  $l_{1,i} = 0,4$ ,  $l_{2,i} = 0,4$ ,  $h = 0,6$  y  $m_p = 0,3$ . Las ganancias proporcional y derivativas que se implementan en esta simulación son:

$$K_p = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$K_d = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Las cuales se seleccionan con prueba y error tomando en cuenta que un controlador PD sin un método de sintonía en específico estabiliza el sistema aunque no se tenga el mejor rendimiento del sistema. Para el propósito de este estudio es suficiente implementar la prueba y error ya que sólo se necesita probar el modelo dinámico del robot 3RRR para luego implementar controladores más complejos.