RECIBIDO EL 29 DE JULIO DE 2018 - ACEPTADO EL 30 DE SEPTIEMBRE DE 2018

SOLUCIÓN CERRADA PARA FRACCIONES PARCIALES

CLOSED SOLUTION TO PARTIAL FRACTION EXPANSION

William Enrique Londoño Terwes[1]

Juan Pablo Ramírez Ramírez[2]

Guillermo Aguilar Herver[3]

Javier Ramírez Romo[4]

Imelda Karina Salinas Ocegueda[5]

Centro universitario del Norte, CUNorte,

Universidad de Guadalajara, México

RESUMEN

El presente trabajo expone una metodolog\'ia aplicable al estudio generalizado de funciones racionales complejas. En el campo R[C], de funciones racionales sobre los números complejos, es posible dar solución cerrada al problema de separar una función racional en sus términos elementales. Los coeficientes de la expansión en fracciones parciales, se calculan recursivamente con combinatoria y operaciones elementales en C. Primero se estudian casos específicos para familiarizar al lector con los métodos que se generalizan en la última sección.

Palabras clave: función racional, fracción parcial, solución recursiva, campo de funciones.

ABSTRACT

The present work pretends to set forth a general methodology, applicable to the study of rational functions. In the field R[C], of rational functions over the complex

1 Departamento de matemáticas. Centro universitario del Norte, CUNorte, Universidad de Guadalajara. México. E-mail: londono.terwes@gmail.com
2 Centro universitario del Norte, CUNorte, Universidad de Guadalajara. E-mail: juan.rmz236@gmail.com
3 Magister en generación y gestión de la innovación Centro universitario del Norte, CUNorte, Universidad de Guadalajara. E-mail:Guillermo.Aguilar@cunorte.udg.mx
4 Centro universitario del Norte, CUNorte, Universidad de Guadalajara. E-mail: jrromo@cunorte.udg.mx
5 Centro universitario del Norte, CUNorte, Universidad de Guadalajara. E-mail: imekarina@hotmail.com

REVISTA BOLETÍN REDIPE 7 (11): 172-178 - NOVIEMBRE 2018 - ISSN 2266-1536

field, we provide a recursive formula that gives closed form solution to the problem of separating a rational function into its elementary functions. The solution to the coefficients of the partial fraction expansion can be calculated recursively in terms of combinatorics and elementary operations of complex numbers. We deal with specific cases that are studied for the comprehension of the general method, which is used in the last section to find the general formula.

Key Words: Rational Function, Partial Fraction, Recursive Solution, Field of Functions

INTRODUCCIÓN

Una gran familia de funciones complejas pueden ser aproximadas mediante funciones racionales con coeficientes complejos. La ventaja de trabajar con funciones racionales es que se pueden evaluar de manera directa, como los polinomios. Estas funciones describen el comportamiento de funciones con singularidades no esenciales, de manera análoga a las aproximaciones polinomiales de funciones diferenciables. Damos un método para calcular, recursivamente, los coeficientes de la descomposición en fracciones parciales. Si hablamos de soluciones calculadas por máquina, entonces tenemos un conjunto finito de ecuaciones que pueden calcular la solución sin recurrir a la teoría de sistemas de ecuaciones (triangularizamos el sistema).

FUNCIONES RACIONALES

Estructura de Campo. Trabajar en el anillo de polinomios es trabajar en un dominio entero, del cual se puede construir un campo de cocientes, de la misma manera que se procede a construir los números racionales de los enteros. Por tanto, las funciones racionales adquieren una definición formal independiente de su evaluación numérica. Las operaciones de funciones racionales se efectúan al igual las operaciones en un campo general. La expansión en fracciones parciales representa la operación inversa a la suma. Una función racional se puede expresar de manera única en la forma $\frac{P}{Q} = R + \frac{P_1}{Q}$, con grado $P_1 <$ grado Q, con , y R es la parte entera (polinomial).

Derivada Formal. Se puede dar una definición formal de derivada. Se define $\frac{QP'-PQ'}{Q^2}$ como la derivada de $\frac{P}{Q}$.

Ejemplo. Demuestre que esta definición es estable bajo la relación de equivalencia que hace dos fracciones P/Q y R/S, como equivalentes cuando PR=QS. Se asume que P y Q son primos entre sí, de manera que PR=QS implica R=P y S=Q. De esto, se sigue que

$$(\frac{R}{S})' = \frac{\lambda Q(\lambda' P + \lambda P') - \lambda P(\lambda' Q + \lambda Q')}{\lambda^2 Q^2} = \frac{\lambda^2 (QP' - PQ')}{\lambda^2 Q^2}$$

Por lo tanto, la derivada de R/S es igual a la derivada de P/Q. Luego, se puede derivar una fracción, término a término; el resultado es igual a la derivada de la suma de las fracciones.

Ejercicio 1. Sea P(x) un polinomio con n raíces distintas $\{x_i\}_{i=1}^n$. Encuentre expresiones para las siguientes sumas, en términos de P y sus derivadas.

$$, \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{x-x_i} . \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\mathrm{x}-x_i)^2}, \quad \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{(\mathrm{x}-x_i)(\mathrm{x}-x_j)}.$$

Tenemos $P = \lambda(x-x_1)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, y, calculando P', encontramos $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathrm{x}-x_i} = \frac{P'}{P}$.

Derivando con respecto a x, se tiene $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x-x_i)^2} = \frac{(\ ')^2 - \ ''}{P^2}$. (1)

Elevando (1), a la segunda potencia: $2\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{(x-x_i)(x-x_j)} = (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-x_i})^2 - \sum_{i=1}^{n} (x-x_i)^2 = \frac{P''}{P}$

REVISTA BOLETÍN REDIPE 7 (11): 172-178 - NOVIEMBRE 2018 - ISSN 2266-1536

Descomposición de Fracciones. Ahora vemos los teoremas que describen las descomposiciones de las funciones racionales.

Teorema 1. Toda función racional se puede expresar, de manera única, como la suma de una parte entera y una suma de la forma (7).

Los dos resultados siguientes, demuestran el anterior.

Teorema 2. Sea P/Q una fracción irreducible, si $Q = Q_1 Q_2$, dondeQ_1, Q_2 , son primos entre sí,

entonces $\frac{P}{Q}$ =R $+\frac{P_1}{Q_1}+\frac{P_2}{Q_2}$ con $grado\ P_1 < grado\ Q_1$ $grado\ P_2 < grado\ Q_2$ y . (2)

Esta representación es única. M\'as generalmente, el lector puede probar esto para el caso donde Q es producto de n factores.

De (2) se obtiene $P = RQ + P_1Q_2 + P_2Q_1 = P_1Q_2 + Q_1(P_2 + RQ_2)$. P_1 P_1Q_2 P_1

se determina expresando que P_1Q_2 y P dan el mismo resto al dividirlos por Q_1 .

En particular, si Q_1 es de grado 1 , entonce Q_1 = x-c, y P_1 es una constante que vale $\frac{P(c)}{Q_2(x)}$.

Ejercicio 2. Descomponga .$F = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$.

Resp: $F = \frac{C_n^0}{x} - \frac{C_n^1}{x+1} + \cdots + \frac{(-1)^n C_n^n}{x+n}$ donde C_n^k es el número de combinaciones de *n* tomando *k.*

Teorema 3. Consideramos una fracción$\frac{P}{Q(x)^\alpha}$ con Q un polinomio primo.

Entonces, $\frac{P}{Q(x)^\alpha} = R(x) + \frac{p_1}{Q} + \frac{p_2}{Q^2} + \cdots + \frac{p_\alpha}{Q^\alpha}$

todos los polinomios $p_i(x)$ con grado <grado Q, y *R* siendo parte entera.

La descomposición es única y $p_\alpha \neq 0.$.

Ejercicio 3. Demuestra que los polinomios $p_\alpha, p_{\alpha-1},$ son los restos de sucesivas divisiones.

P es dividido por Q, lo que da $\mathrm{P} = \mathrm{Q}\, W_1 + p_\alpha$; luego *W*1 es dividido por Q, lo que da ,

$W_1 = QW_2 + p_{\alpha-1}$ etc.

El proceso termina en α pasos.

$P = Q\, W_1 + P_\alpha = Q^2 W_2 + p_{\alpha-1}\, Q + p_\alpha = Q^\alpha W_\alpha + p_1 Q^{\alpha-1} + p_2 Q^{\alpha-2} + \cdots + p_\alpha$

O lo que es igual . $\frac{P}{Q^\alpha} = W_\alpha + \frac{p_1}{Q} + \frac{p_2}{Q^2} + \cdots + \frac{p_\alpha}{Q^\alpha}$.

Las condiciones relativas a los grados se satisfacen. Por otro lado, $p_\alpha \neq 0$ si la fracción dada es irreducible.

Ejercicio 4. $F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^n Q(x}$ Sea una fracción irreducible con $Q(a) \neq 0$

Demuestra que se puede expresar en la forma $F = \frac{p_1}{x-a} + \frac{p_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{p_n}{(x-a)^n} + \frac{P_1}{Q}$,

donde p_i son constantes dadas por $(n-i)!\, p\ = f^{(n-i)}(a)$, y *f=P/Q.*

REVISTA BOLETÍN REDIPE 7 (11): 172-178 - NOVIEMBRE 2018 - ISSN 2266-1536

Los coeficientes se determinan fijando

$x = a$ en $f(x) = p_1(x-a)^{n-1} + p_2(x-a)^{n-2} + \cdots + p_n + \frac{P_1(x-a)^n}{Q}$

en y en sus derivadas respecto a X . Por lo que

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{P_1(x-a)^n}{Q}.$$

Descomposición Sobre el Cuerpo de Números Reales.

Una iteración de los resultados anteriores nos permite llegar a la forma general de descomposición sobre los números reales. Si el denominador se factoriza en el campo de los números reales entonces

$$\frac{P}{Q} = R + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{\beta_l} \frac{\mu_{ij}x + \nu_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}$$

con $\lambda_{ij} \neq 0$ para $j = \alpha_i$ y $\mu_{ij},\nu_{ij} \neq 0$ para $j = \beta_i$

En la práctica, los coeficientes se encuentran fijando x , en esta igualdad.

SOLUCIÓN GENERAL

Ahora estamos en posición de aplicar estos métodos al caso general y dar un número finito de fórmulas recursivas como solución cerrada al cálculo de los coeficientes. Usamos los mismos procedimientos y resultados ya expuestos, ahora aplicados en C. El denominador es factorizado sobre C; el polinomio en el denominador puede ser expresado como producto de factores primos (posiblemente repetidos). Luego, usamos el hecho de que una raíz con multiplicidad n es reducida a multiplicidad n-1 después de aplicar el operador derivada; la raíz desaparece después de n derivadas. Se deben eliminar términos que se hacen cero después de derivar y evaluar. Gracias a esos términos nulos se puede dar forma triangular a nuestro sistema de ecuaciones para dar solución recursiva.

Ecuación de Coeficientes. Por simplicidad comenzamos con una fracción propia sobre C.

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{h=0}^{p} A_h x^h}{\sum_{i=0}^{q} B_i x^i} \qquad (3)$$

Dada la factorización en factores primos, de Q, es posible calcular la solución general.

Sea $Q(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-x_i)^{m_i}$ dicha factorización con r raices distintas.

Se propone la expansión: $R(x) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_r} \frac{a_{kj}}{(x-x_k)^j}$ (4)

Igualando (3) y (4): $$\frac{\sum_{h=0}^{p} A_h x^h}{\prod_{i=1}^{r}(x-x_i)^{m_i}} = \sum_{k=1} \sum_{j=1} \frac{a_{kj}}{(x-x_k)^j}$$

Quitando singularidades $\sum_{h=0}^{p} A_h x^h = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_r} \frac{a_{kj}}{(x-x_k)^j} \prod_{i=1}^{r}(x-x_i)^{m_i}.$ (5)

Evaluamos las derivadas de esta ecuación para encontrar los coeficientes .

$a_{(k,m_k-n)}$ Podemos resolver para estas constantes si evaluamos (5) en sus polos.

Para encontrar a_{k,m_k} evaluamos (5) en x_k . En general, el coeficiente $a_{(k,m_k-n)}$ se encuentra con la *n*-sima derivada. Los términos $(x-x_k)^N$ con ***N***>n, se hacen 0 si evaluamos en x_k

REVISTA BOLETÍN REDIPE 7 (11): 172-178 - NOVIEMBRE 2018 - ISSN 2266-1536

Esto quiere decir que basta derivar n veces, y evalular en x_k la siguiente ecuación:

$\sum_{h=0}^{p} A_h x^h = \sum_{j=0}^{n} a_{k,m_{k-j}(x-x_k)^j} \prod_{i=1}^{r}(x - x_i)^{m_i}$ (9) donde el índice ***i*** toma valores distintos de k.

Evaluación y Derivada. Evaluamos los términos que no dependen de :

$$\sum_{h=n}^{p} P(h,n)A_h x^{h-n} = \sum_{j=0}^{n} a_{k,m_k-j} \sum_{\alpha=n-j} \frac{(n-j)!}{\prod_{i=1}^{r} a_i} P(n,j) \prod_{i=1}^{r} P(m_i, a_i)(x - x_i)^{m_i - a_i}$$

donde el índice i se toma sobre valores distintos de k. El índice es notación multi índice para las posibles particiones de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ tales que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \alpha$.

Recursividad. Evalúa, simplifica, y resuelve para a_{k,m_k-n}, en términos de $a_{k,m_k-(n-1)}, \dots, a_{k,m_k}$

Es decir, los coeficientes son calculados recursivamente en el orden $a_{k,m_k}, a_{k,m_k-1}, \dots, a_{k,1}$ usando la relación

$$a_{k,m_k-n} = \frac{\sum_{h=n} P(h,n)A_h x_k^{h-} \quad - n! \sum_{j=0}^{-1} a_{k,m_k-j} \sum_{\alpha=n-j} \prod_{i=1} (\ _{\alpha_i}) \ (x_k - x_i)^{(\ \ i- \ \ i)}}{n! \prod_{i=1}^{r}(x_k - x_i)^{m_i}}$$

Por simplicidad abreviamos la fórmula como $a_{k,m_k-n} = \frac{P-n!D}{n!C}$,

para estudiar casos. La suma D y el denominador C no están definidos para fracciones con un sólo polo. Por otro lado, si buscamos los coeficientes del término con la potencia más alta, de un polo dado, entonces D no está definido. Brevemente, $D \neq 0$ para los coeficientes $a_{k,m_k-1}, a_{k,m_k-2}, \dots, a_{k,1}$ de funciones con más de un polo.

Ejercicio 6. Si la fracción es real, entonces las constantes correspondientes a $\frac{p}{(x-z)^\alpha}$ y $\frac{p}{(x-\bar{z})^\alpha}$ y son números complejos conjugados: $p' = \bar{p}$.

Caso 1

$$\frac{9x^2+14\mathrm{x}-53}{(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+2)(\mathrm{x}-3)} = \frac{a_{1,1}}{x-1} + \frac{a_{2,1}}{x+2} + \frac{a_{3,1}}{x-3}$$

donde

$$a_{1,1} = \frac{\sum_{h=0}^{2} P(h,0)A_h(1)^h}{0!\prod_{i=1}^{3}(1-x_i)^{m_i}} = \frac{-53+14+9}{(1-(-2))(1-3)} = \frac{-30}{-6} = 5$$

$$a_{2,1} = \frac{\sum_{h=0}^{2} P(h,0)A_h(-2)^h}{0!\prod_{i=1}^{3}(-2-x_i)^{m_i}} = \frac{-53+(-2)14+(-2)^2 9}{(-2-1)(-2-3)} = \frac{-45}{15} = -3$$

$$a_{3,1} = \frac{\sum_{h=0}^{2} P(h,0)A_h(3)^h}{0!\prod_{i=1}^{3}(3-x_i)^{m_i}} = \frac{-53+(3)14+(3)^2 9}{(3-1)(3-(-2))} = \frac{70}{10} = 7$$

Resulta

$$\frac{9x^2+14\mathrm{x}-53}{\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+2)(\mathrm{x}-3)} = \frac{5}{x-1} - \frac{3}{x+2} + \frac{7}{x-3}$$

Caso 2

$$\frac{x^2+\mathrm{x}-6}{(\mathrm{x}-1)^3} = \frac{a_{1,1}}{x-1} + \frac{a_{2,1}}{(\mathrm{x}-1)^2} + \frac{a_{3,1}}{(\mathrm{x}-1)^3}$$

REVISTA BOLETÍN REDIPE 7 (11): 172-178 - NOVIEMBRE 2018 - ISSN 2266-1536

donde

$$a_{1,3} = \frac{1}{0!}\sum_{h=0}^{2} P(h,0)A_h 1^h = -6+1+1 = 4$$

$$a_{1,2} = \frac{1}{1!}\sum_{h=1}^{2} P(h,1)A_h 1^{h-1} = A_1 + 2A_2 = 3$$

$$a_{1,1} = \frac{1}{2!}\sum_{h=2}^{2} P(h,2)A_h 1^{h-2} = \frac{1}{2!}P(2,2)A_2 = 1$$

Resulta

$$\frac{{}^{\wedge}2+\mathrm{x}-6}{(\mathrm{x}-1)^3} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(\mathrm{x}-1)^2} + \frac{4}{(\mathrm{x}-1)^3}$$

Caso 3

Debemos tener cuidado en no confundir la unidad imaginaria con el índice i.

$$\frac{x^3-x^2+7\mathrm{x}+2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{a_{1,1}}{x+i} + \frac{a_{2,1}}{x-i} + \frac{a_{3,1}}{x+2i} + \frac{a_{4,1}}{x-2i}$$

donde

$$a_{1,1} = \frac{\sum_{h=0}^{3} P(h,0)A_h(-i)^h}{0!\prod_{i=1}^{4}(-i-x_i)} = \frac{A_0-A_1 i-A_2+A_3 i}{(-i-i)(-i-(-2i))(-i-2i)} = \frac{2-7i-(-1)+4i}{(-2i)i(-3i)} = \frac{3-3i}{-6i} = \frac{i-1}{2i} = \frac{1+i}{2}$$

$$a_{2,1} = \frac{\sum_{h=0}^{3} P(h,0)A_h(i)^h}{0!\prod_{i=1}^{4}(i-x_i)} = \frac{A_0+A_1 i-A_2-A_3 i}{(i-(-i))(i-(-2i))(i-2i)} = \frac{2+7i-(-1)-4i}{(2i)(3i)(-i)} = \frac{3+3i}{6i} = \frac{1+i}{2i} = \frac{1-i}{2}$$

$$a_{3,1} = \frac{\sum_{h=0}^{3} P(h,0)A_h(-2i)^h}{0!\prod_{i=1}^{4}(-2i-x_i)} = \frac{A_0-2iA_1-4A_2+8iA_3}{(-2i-(-i))(-2i-i)(-2i-2i)} = \frac{2-14i+4+32i}{(-i)(-3i)(-4i)} = \frac{6+18i}{12i} = \frac{1+3i}{2i} = \frac{3-i}{2}$$

$$a_{4,1} = \frac{\sum_{h=0}^{3} P(h,0)A_h(2i)^h}{0!\prod_{i=1}^{4}(2i-x_i)} = \frac{A_0+2iA_1-4A_2-8iA_3}{(2i-(-i))(2i-i)(2i-(-2i))} = \frac{2+14i+4-32i}{(3i)(i)(4i)} = \frac{6-18i}{-12i} = \frac{1-3i}{2i} = \frac{3+i}{2}$$

Resulta

$$\frac{x^3-x^2+7\mathrm{x}+2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+i}{x+i} + \frac{1-i}{x-i} + \frac{3-i}{x+2i} + \frac{3+i}{x-2i}\right)$$

Caso 4

$$\frac{3x^2-2\mathrm{x}+1}{(x^2+1)^3} = \frac{a_{1,1}}{x+i} + \frac{a_{1,2}}{(x+i)^2} + \frac{a_{1,3}}{(x+i)^3} + \frac{a_{2,1}}{x-i} + \frac{a_{2,2}}{(x-i)^2} + \frac{a_{2,3}}{(x-i)^3}$$

Donde

$$a_{1,3} = \frac{\sum_{h=0}^{2} P(h,0)A_h(-i)^h}{0!(-i-i)^3} = \frac{A_0-A_1 i-A_2}{(-2i)^3} = \frac{1+2i-3}{8i} = \frac{-2+2i}{8i} = \frac{1+i}{4}$$

$$a_{1,2} = \frac{\sum_{h=1}^{2} P(h,1)A_h(-i)^{h-1} - a_{1,3}\frac{3!}{1!(3-1)!}(-i-i)^{3-1}}{1!(-i-i)^3} = \frac{A_1-2iA_2-(\frac{1+i}{4})(3(-2i)^2)}{(-2i)^3} = \frac{-2-6i+3(1+i)}{8i} = \frac{1-3i}{8i} = \frac{3+i}{8}$$

$$a_{1,1} = \frac{\sum_{h=2}^{2} P(h,2)A_h(-i)^{h-2} - 2!\{a_{1,3}[\frac{3!}{2!(3-2)!}(-i-i)^{3-2}] + a_{1,2}[\frac{3!}{1!(3-1)!}(-i-i)^{3-1}]\}}{2!(-i-i)^3} = \frac{2A_2-2[\frac{1}{4}(1+i)(-6i)-\frac{1}{8}(3+i)(-12)]}{2(-2i)^3} = \frac{3i}{8}$$

Similarmente, encontramos las constantes correspondientes a la raíz i (porque la función racional es real), y resulta $\frac{3x^2-2\mathrm{x}+1}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{4}\left(\frac{3i}{2(x+i)} + \frac{3+i}{2(x+i)^2} + \frac{1+i}{(x+i)^3} - \frac{3i}{2(x-i)} - \frac{3-i}{2(x-i)^2} + \frac{1-i}{(x-i)^3}\right.$

REVISTA BOLETÍN REDIPE 7 (11): 172-178 - NOVIEMBRE 2018 - ISSN 2266-1536

DISCUSIÓN

Proponemos esta solución como la primera de varias soluciones cerradas de naturaleza recursiva, que se proponen para problemas básicos del cálculo. Los métodos aquí expuestos se han encuentran en la literatura. En el caso de la fórmula general, se sabía que los coeficientes son el resultado de evaluar $a_{k,m_k-n} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}R(x)(x-x_k)^{m_k}$ en $x = x_k$.

Sin embargo, no encontramos en la literatura una expresión más reducida. Aquí exponemos la expresión explícita de las constantes.

CONCLUSIONES

Se cuenta con una solución programable del problema de fracciones parciales que usa operaciones básicas y elementos de combinatoria. Con esto se reducen expresiones y cálculos de funciones complejas que pueden ser aproximadas por funciones racionales.

BIBLIOGRAFÍA

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1983), Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo. 2 Ed. Trillas: México.

Bautista, A. (2002). Las nuevas Tecnologías en la Capacitación Docente, Aprendizaje Visor, Madrid, España.

Howson G. y Kahane J. P. (1990). Mathematics and Cognition, A research Synthesis by Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education. ICMI Study Series USA: Cambridge University Press.

Polia, G. (1989). Como plantear y resolver problemas. México, D: F: Trillas

Dr. Konrad Knopp (1945) Theory of Functions. Part One: Elements of the General Theory of Analytic Functions. New York, Dover Publications.

REVISTA BOLETÍN REDIPE 7 (11): 172-178 - NOVIEMBRE 2018 - ISSN 2266-1536