

## Верификация конечно-элементных моделей резинометаллических опор в расчетных программных комплексах

О.В. Мкртычев, А.А. Бунов

*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26*

### АННОТАЦИЯ

**Введение.** При проектировании зданий и сооружений с системой сейсмоизоляции в виде резинометаллических опор (РМО) со свинцовым сердечником необходимо выполнять соответствующие расчетные обоснования эффективности и целесообразности ее применения. Эти требования приводят к необходимости моделирования опор в общей конечно-элементной модели для учета их совместной работы с сооружением. При этом у расчетчика существует множество разных вариантов моделирования РМО, которые связаны с реализованной моделью их работы. Для доказательства достаточности и достоверности полученных результатов расчета, необходимы критерии выбора применяемой модели работы РМО.

**Материалы и методы.** Для получения достоверных выводов сравним диаграммы работы и периоды собственных колебаний РМО при различных вариантах их численного моделирования в программных комплексах с результатами заводских испытаний.

**Результаты.** Исследования показали, что предельные значения горизонтальной силы и сдвига для всех рассматриваемых случаев совпадают, однако периоды собственных колебаний и диаграммы работы опоры отличаются. Данные различия можно объяснить использованием в ПК Ansys/LS-Dyna более достоверной модели работы опоры, что видно при сравнении диаграмм их работ.

**Выводы.** Анализ работы сооружения с РМО работающими по идеализированной линейной модели возможен только для сооружений нормального уровня ответственности. Для сооружений повышенного уровня ответственности необходимо использовать идеализированные нелинейные модели.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** сейсмоизоляция, резинометаллическая опора, сейсмическое воздействие, линейно-спектральный метод, прямой динамический метод, идеализированная линейная модель, идеализированная нелинейная модель, диаграмма, натурный эксперимент, конечно-элементная модель

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Мкртычев О.В., Бунов А.А. Верификация конечно-элементных моделей резинометаллических опор в расчетных программных комплексах // Строительство: наука и образование. 2018. Т. 8. Вып. 4. Ст. 4. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.4

## Verification of elastomeric bearings finite-element models in calculating software packages

Oleg V. Mkrtychev, Artem A. Bunov

*Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU),  
26 Yaroslavlshossee, Moscow, 129337, Russian Federation*

### ABSTRACT

**Introduction.** While designing buildings and constructions with an elastomeric bearing with a lead core as a seismic isolation system, it is necessary to make calculations concerning effectiveness and reasonability of its usage. These demands lead to necessity to construct bearings in a common finite-element model, in order to consider how a bearing and a construction work together. Though a calculator has a lot of different variants of elastomeric bearing's construction, which are connected to their implemented work model. To prove that obtained calculation results are sufficient and accurate, selection criteria of elastomeric bearings implemented work models are necessary.

**Materials and methods.** To get accurate results we will compare elastomeric bearing's work diagrams and free periods of motion when there are different variants of their numerical modelling with the help of software packages with factory tests results.

**Results.** The researches have shown that lateral force's and shear's limit values are the same for all of the observed cases, although free periods of motion and work diagrams differ. Usage of more accurate bearing work model in software package Ansys/LS-Dyna can explain these differences, it can be seen if compare their work's diagrams.

**Conclusions.** Analysis of constructions with elastomeric bearings' work, which function according to the idealized linear model, can be possible only for II level constructions. Idealized nonlinear models should be used for I level constructions.

**KEYWORDS:** seismic isolation, elastomeric bearing, seismic influence, linearly-spectral method, direct dynamic method, an idealized linear model, an idealized nonlinear model, diagram, full-scale experiments, finite-element model

**FOR CITATION:** Mkrtychev O.V., Bunov A.A. Verification of elastomeric bearings finite-element models in calculating software packages. *Stroitel'stvo: nauka i obrazovanie* [Construction: Science and Education]. 2018; 8(4):4. URL: <http://ns-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.4 (rus.).

## ВВЕДЕНИЕ

Как известно, строительные объекты должны удовлетворять требованиям предельных состояний (ГОСТ 27751-2014), выполнение которых необходимо подтверждать достаточными расчетными обоснованиями. Например, при проектировании зданий и сооружений с применением системы сейсмоизоляции в виде РМО [1] расчетные конечно-элементные схемы сооружений необходимо моделировать с учетом опор и нелинейного характера их работы.

Расчеты зданий с РМО зачастую выполняют в таких программных комплексах как Лира 10.6, Scad Office 21, Ing+, Stark и т.д., которые позволяют моделировать РМО с помощью специальных конечных элементов (КЭ), описывающих идеализированные линейные [2, 3] или, в лучшем случае, идеализированные билинейные диаграммы работы опор [4]. Однако действительная диаграмма работы РМО существенно нелинейная. В настоящее время существуют программные комплексы, такие как Ansys/LS-Dyna, Abaqus, позволяющие наиболее точно учитывать характер работы РМО за счет использования материалов, реализующих идеализированные нелинейные диаграммы деформирования [5, 6].

В данной статье рассмотрим способы моделирования РМО в ПК Ansys/LS-Dyna и Лира 10.6 и произведем сравнение рассматриваемых моделей с результатами натурных экспериментов.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В ПК Лира 10.6 возможно смоделировать два варианта работы РМО по идеализированной линейной и идеализированной билинейной модели. Однако зачастую используется идеализированная линейная модель [7–9], так как при расчете сооружений с системой сейсмоизоляции в виде РМО линейно-спектральным методом применить идеализированную билинейную модель не представляется возможным. Идеализированная нелинейная модель не реализована.

Диаграмма работы РМО по идеализированной линейной модели представляет собой наклонную прямую, соединяющую нижний и верхний пики гистерезисной петли (рис. 1).

Горизонтальная жесткость РМО в одном направлении является величиной постоянной и определяется следующим образом:

$$k_{eff} = \frac{F^+ - F^-}{D^+ - D^-}, \quad (1)$$

где  $F^+$ ,  $F^-$  — положительная и отрицательная силы при пиковых перемещениях  $D^+$  и  $D^-$  соответственно.

В ПК Ansys/LS-Dyna реализованы все три модели работы, однако наибольший интерес представляет идеализированная нелинейная модель работы РМО (Bouc-Wen). Данная модель используется для более полного и точного анализа работы опор. Дей-

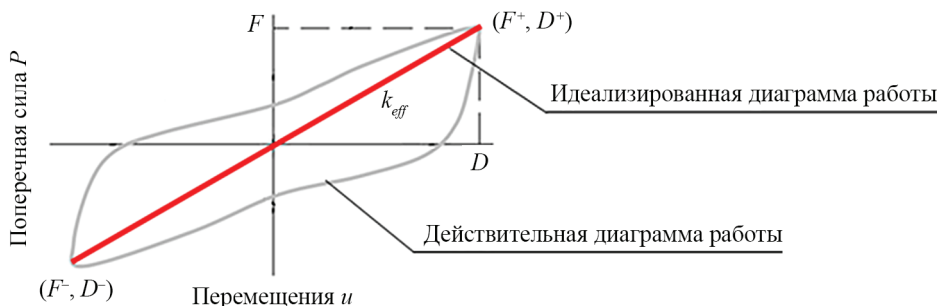


Рис. 1. Идеализированная линейная диаграмма работы

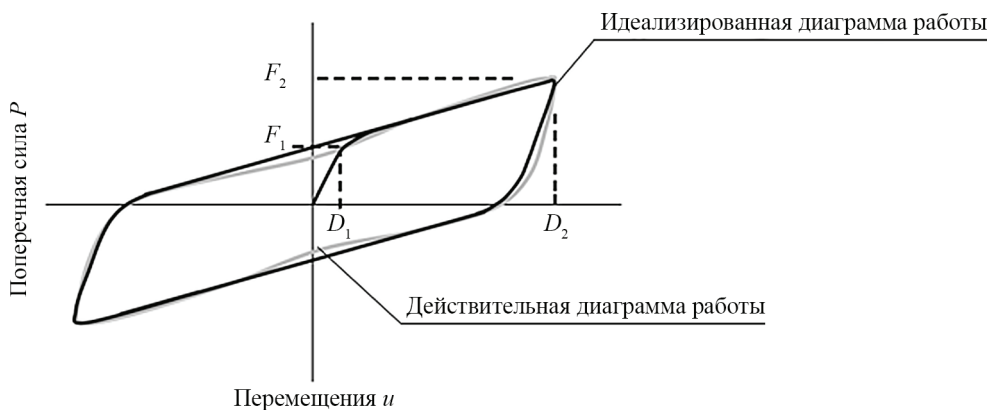


Рис. 2. Идеализованная нелинейная диаграмма работы

Табл. 1. Основные характеристики опоры

Номер	Характеристики	Единицы измерений	LRB-D600
1	Расчетная несущая способность	кН	3393
2	Расчетные горизонтальные перемещения $D_1$	м	0,124
3	Максимальные горизонтальные перемещения $D_2$	м	0,330
4	Вертикальная жесткость	кН/м	2 500 000
5	Значение горизонтальной силы в точке начала пластичности $F_1$	кН	90
6	Жесткость в упругой стадии нагружения $k_1$	кН/м	11 600
7	Жесткость в пластической стадии нагружения $k_2$	кН/м	2360
8	Эквивалентная горизонтальная жесткость $k_{eff}$	кН/м	2570

ствительная диаграмма РМО (рис. 2) в этом случае описывается эволюционными переменными.

Для варианта работы опоры в одном направлении данная модель была описана в работах [10, 11] и разработана в [12]. Диаграмма работы РМО задается уравнением:

$$P = \alpha k_1 u + (1 - \alpha) F_1 z, \quad (2)$$

где  $P$  — восстанавливающая сила (внутренняя сила, возникающая в опоре);  $\alpha$  — отношение горизонтальной жесткости опоры в пластической стадии ( $k_2 = F_2/D_2$ ) работы к жесткости в начальной упругой стадии  $k_1$ ;  $k_1$  — горизонтальная жесткость опоры в начальной упругой стадии работы ( $k_1 = F_1/D_1$ );  $u$  — горизонтальное перемещение опоры;  $F_1$  — нагрузка, соответствующая пределу текучести;  $z$  — эволюционная безразмерная переменная (гистерезисное смещение), учитывающая направление восстанавливающей силы и удовлетворяющая условию ( $|z| \leq 1$ ).

Переменные  $P$ ,  $u$  и  $z$  зависят от времени.

Переменная  $z$  определяется из эволюционного уравнения:

$$D_1 \dot{z} = A \dot{u} - \gamma |\dot{u}| |z| |z|^{n-1} - \beta \dot{u} |z|^n, \quad (3)$$

где  $\dot{z}$  — производная от  $z$  по времени;  $A$  — параметр, принимаемый равным 1 [13];  $\gamma$ ,  $\beta$  — параме-

тры, определяющие форму петли гистерезиса;  $\eta$  — параметр, который контролирует переход упругой стадии к пост-упругой (при больших значениях переход становится резким и приближается к билинейной диаграмме).

Для РМО обычно принимается  $A = 1$ ;  $\gamma = 0,5$ ;  $\beta = 0,5$ ;  $\eta = 2$  [14]. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\dot{z} = \frac{1}{D_1} \begin{cases} \dot{u}(1 - z^2), & \text{при } \dot{u}z > 0, \\ \dot{u}, & \text{при } \dot{u}z \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Для исследований выбрана резинометаллическая опора со свинцовым сердечником LRB-D600 (табл. 1).

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для получения достоверных выводов сравним диаграммы работы и периоды собственных колебаний РМО при их численном моделировании в программных комплексах с результатами заводских испытаний.

Ниже приведены диаграммы работы для РМО LRB-D600 для разных случаев (рис. 3).

Основные результаты исследований представлены в табл. 2.

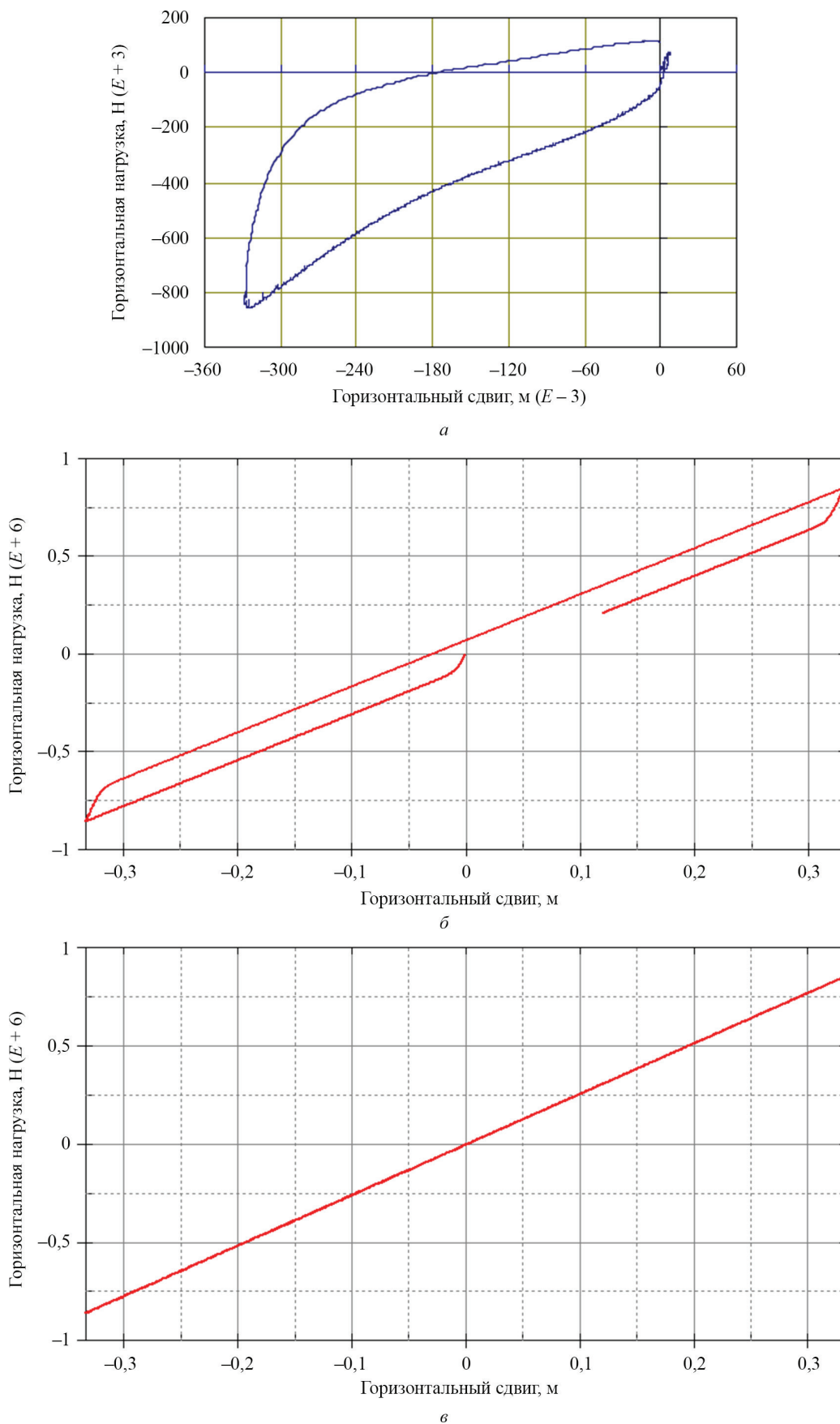


Рис. 3. Диаграммы работ: *a* — по результатам заводских испытаний опоры LRB-D600; *б* — по результатам численного моделирования в ПК Ansys/LS-Dyna по идеализированной нелинейной модели; *в* — по результатам численного моделирования в ПК Ansys/LS-Dyna и ПК Лира 10.6 по идеализированной линейной модели

Табл. 2. Результаты сравнительного исследования работы РМО

Тип РМО	Результаты исследований		Период собственных колебаний, с	Горизонтальная сила, кН / соответствующий горизонтальный сдвиг, м
LRB-D600	ПК Лира 10.6*	идеализированная линейная модель	2,3	850/0,331
	ПК Ansys/LS-Dyna*	идеализированная линейная модель	2,28	850/0,331
		идеализированная нелинейная модель	1,81	850/0,330
	Данные завода изготовителя*		2,28**	850/0,330

\* Результаты получены при вертикальной нагрузке на опору LRB-D600 — 3393 кН;

\*\* Эквивалентный период при соответствующей нагрузке  $T = 2\pi\sqrt{M/k_{eff}}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Как видно из результатов, предельные значения горизонтальной силы и сдвига для всех случаев совпадают, однако периоды собственных колебаний и диаграммы работы опоры (рис. 3) отличаются. Данные различия можно объяснить использованием в ПК Ansys/LS-Dyna более достоверной модели

работы опоры, что видно при сравнении диаграмм их работ (рис. 3).

Анализ работы сооружения с РМО работающими по идеализированной линейной модели возможен только для сооружений нормального уровня ответственности. Для сооружений повышенного уровня ответственности использование идеализированной линейной модели допустимо только в первом приближении.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kelly T.E., Skinner R.I., Robinson B. "Isolator devices and systems" in seismic isolation for designers and structural engineers, 1st ed. Kanpur : NICEE, 2010. Pp. 41–87.
2. Муравьев Н.П. Современный метод сейсмоизоляции зданий на примере РМО // Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного комплекса. 2013. № 1. С. 212–218.
3. Гузев Р.Н., Петров В.А., Полинкевич К.Ю. Расчет сейсмоизолированного здания пассажирского терминала на ст. Адлер // Природные и техногенные риски. Безопасность сооружений. 2013. № 5. С. 41–43.
4. Абакаров А.Д., Омаров Х.М. Аппроксимация зависимости «сила-перемещение» для сейсмоизолирующих резинометаллических опор со свинцовым сердечником // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2012. № 4 (27). С. 60–68.
5. Mkrtychev O.V., Dzinchvelashvili G.A., Bunov A.A. Study of lead rubber bearings operation with varying height buildings at earthquake // Procedia Engineering. 2014. Vol. 91. Pp. 48–53. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.12.010
6. Mathai A., Manasa M.S. Performance of lead rubber bearing as a base isolator // International Journal of Science Technology & Engineering. 2017. Vol. 3. Issue 11. Pp. 33–36.
7. Айзенберг Я.М., Смирнов В.И., Акбиев Р.Т. Методические рекомендации по проектированию сейсмоизоляции с применением резинометаллических опор. М. : РАСС, 2008. 46 с.
8. Hwang J.S., Chiou J.M. An equivalent linear model of lead-rubber seismic isolation bearings // Engineering Structures. 1996. Vol. 18. Issue 7. Pp. 528–536. DOI: 10.1016/0141-0296(95)00132-8
9. Michael D. Symans. Seismic protective systems: Seismic isolation // Instructional Material Complementing FEMA 451, Design Examples. Seismic isolation 15-7-12.
10. Bouc R. Forced vibration of a mechanical system with hysteresis // Proceedings of the 4th Conference on Non-linear Oscillations. Prague, 5–9 September 1967. 1967. P. 315.
11. Bouc R. Modèle mathématique d'hystérésis: application aux systèmes à un degré de liberté // Acustica (in French). 1971. No. 24. Pp. 16–25.
12. Wen Y.K. Method for random vibration of hysteretic system // Journal of the Engineering Mechanics Division (American Society of Civil Engineers). 1976. No. 102 (2). Pp. 249–263.
13. Ma F., Zhang H., Bockstedte A., Foliente G.C., Paevere P. Parameter analysis of the differential model of hysteresis // Journal of Applied Mechanics. 2004. Vol. 71. Issue 3. Pp. 342–349. DOI: 10.1115/1.1668082
14. Sandip K.S., Matsagar V.A., Jain A.K. Comparison of base-isolated liquid storage tank models under bi-directional earthquakes // Natural Science. 2013. Vol. 05. Issue 08. Pp. 27–37. DOI: 10.4236/ns.2013.58a1004

Поступила в редакцию 29 сентября 2017 г.  
 Принята в доработанном виде 12 октября 2018 г.  
 Одобрена для публикации 28 ноября 2018 г.

О Б АВТОРАХ: Мкртычев Олег Вартавович — доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, mkrtychev@yandex.ru;

Бунов Артем Анатольевич — кандидат технических наук, инженер научно-исследовательской лаборатории «Надежность и сейсмостойкость сооружений», Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, a\_bunov@mail.ru.

## INTRODUCTION

It is well known that construction projects must fulfil the requirements of extreme limit state (All Union State standard 27751-2014), fulfilment of these requirements should be proved by sufficient calculating justifications. For example at the time of designing buildings and constructions with elastomeric bearing as seismic isolation system [1], while constructions' calculating finite-element schemes are modeled, bearings and their nonlinear response should be taken into consideration.

Calculations of constructions with elastomeric bearings are often made with such software packages, as Lira 10.6, Scad Office 21, Ing+, Stark etc, which design elastomeric bearings with the help of special finite elements, that describe idealized linear [2, 3] or (at the best case) idealized bilinear bearings' work diagrams [4]. However an actual elastomeric bearings' work diagram is significantly nonlinear. Nowadays there are such software packages, as Ansys/LS-Dyna, Abaqus, which let us consider elastomeric bearings' response more accurately, because of usage of materials, that implement idealized nonlinear deformation diagrams [5, 6].

In this article we will observe elastomeric bearings' modelling practices with software packages Ansys/LS-Dyna and Lira 10.6 and compare the observed models with the results of full-scale experiences.

## MATERIALS AND METHODS

With software package Lira 10.6 two variants of elastomeric bearings' work can be modeled: according to idealized linear model and according to idealized bilinear model. Though idealized linear model is often used [7–9], because it is impossible to use idealized bilinear model while calculating constructions with an elastomeric bearing as a seismic isolation system using linearly-spectral method. Idealized nonlinear model is not implemented.

According to idealized linear model, elastomeric bearing's work diagram is represented by an inclined line, which connects the lower and the upper peaks of a hysteresis loop (Fig. 1).

Elastomeric bearing's horizontal stiffness in the same direction is a constant quantity, it is defined as follows:

$$k_{eff} = \frac{F^+ - F^-}{D^+ - D^-}, \quad (1)$$

where  $F^+$ ,  $F^-$  are positive and negative forces, when  $D^+$  and  $D^-$  are respectively peak movements.

In the software package Ansys/LS-Dyna all of the three work models are implemented, but idealized elastomeric bearing nonlinear work model (Bouc-Wen) is of outstanding interest. This model is used to perform more complete and accurate analysis of bearing's work. In this case elastomeric bearing's actual diagram (Fig. 2) is defined by evolutionary variables.

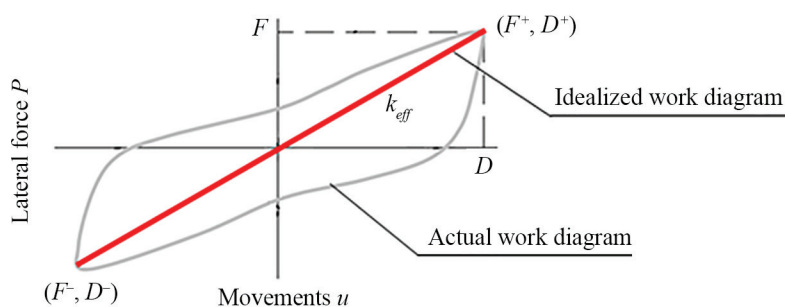


Fig. 1. Idealized linear work diagram

For a variant, when a bearing works in the same direction, this model was described in studies [10, 11] and formulated in the study [12]. Elastomeric work diagram is defined by equation:

$$P = \alpha k_1 u + (1 - \alpha) F_1 z, \quad (2)$$

where  $P$  is restoring force (internal force in a bearing);  $\alpha$  is a ratio of a bearing's horizontal stiffness in plastic stage ( $k_2 = F_2/D_2$ ) to stiffness in primary elastic stage  $k_1$ ;  $k_1$  is a bearing's horizontal stiffness in primary elastic stage of work ( $k_1 = F_1/D_1$ );  $u$  is horizontal movement of a bearing;  $F_1$  is intensity, yield stress;  $z$  is evolutionary nondimensional variable (hysteretic movement), which considers restoring force direction, and satisfies the condition ( $|z| \leq 1$ ).

Variables  $P$ ,  $u$  and  $z$  depend on time.

Variable  $z$  is defined by evolutionary equation:

$$D_1 \dot{z} = A \dot{u} - \gamma |\dot{u}| |z| |z|^{n-1} - \beta \dot{u} |z|^n, \quad (3)$$

where  $\dot{z}$  is time derivative of  $z$ ;  $A$  is an argument, counted equal to 1 [13];  $\gamma$ ,  $\beta$  are arguments, which define hysteresis loop's form;  $\eta$  is an argument, which controls transition from elastic stage to post-elastic stage (at larger values transition is abrupt and comes close to bilinear diagram).

For elastomeric bearings values usually are  $A = 1$ ;  $\gamma = 0.5$ ;  $\beta = 0.5$ ;  $\eta = 2$  [14]. Then the equation (3) is as follows:

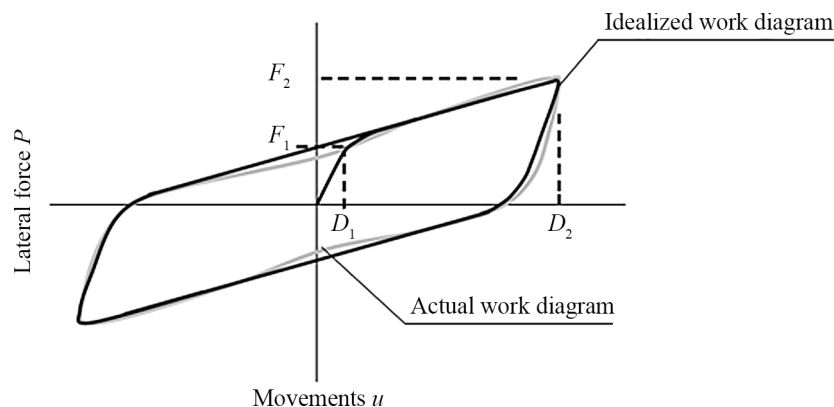


Fig. 2. Idealized nonlinear work diagram

Table 1. Bearing's general characteristics

Number	Characteristics	Unit measures	LRB-D600
1	Calculated bearing capability	kN	3393
2	Calculated horizontal movements $D_1$	m	0.124
3	Maximum horizontal movements $D_2$	m	0.330
4	Vertical stiffness	kN/m	2 500 000
5	Lateral force's value in plasticity point of origin $F_1$	kN	90
6	Stiffness in elastic stage of loading $k_1$	kN/m	11 600
7	Stiffness in plastic stage of loading $k_2$	kN/m	2360
8	Equivalent horizontal stiffness $k_{eff}$	kN/m	2570

$$\dot{z} = \frac{1}{D_1} \begin{cases} \dot{u}(1 - z^2), & \text{at } \dot{u}z > 0, \\ \dot{u}, & \text{at } \dot{u}z \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Elastomeric bearing with a lead core LRB-D600 was chosen for the researches (Table 1).

## RESULTS OF THE RESEARCH

To get accurate results we will compare elastomeric bearing's work diagrams and free periods of motion when numerical modelling with the help of software packages with factory tests results.

Elastomeric bearing LRB-D600 work diagrams for different cases are listed below (Fig. 3).

Key research results are shown in table 2.

## CONCLUSION AND DISCUSSION

The results show that lateral force's and shear's limit values are the same for all of the observed cases, although free periods of motion and work diagrams differ (Fig. 3). Usage of more accurate bearing work model in software package Ansys/LS-Dyna can explain these differences, it can be seen if compare their work's diagrams (Fig. 3).

Analysis of constructions with elastomeric bearings' work, which function according to idealized linear model, can be possible only for II level constructions. Idealized linear models can be used for I level constructions only as a first approximation.

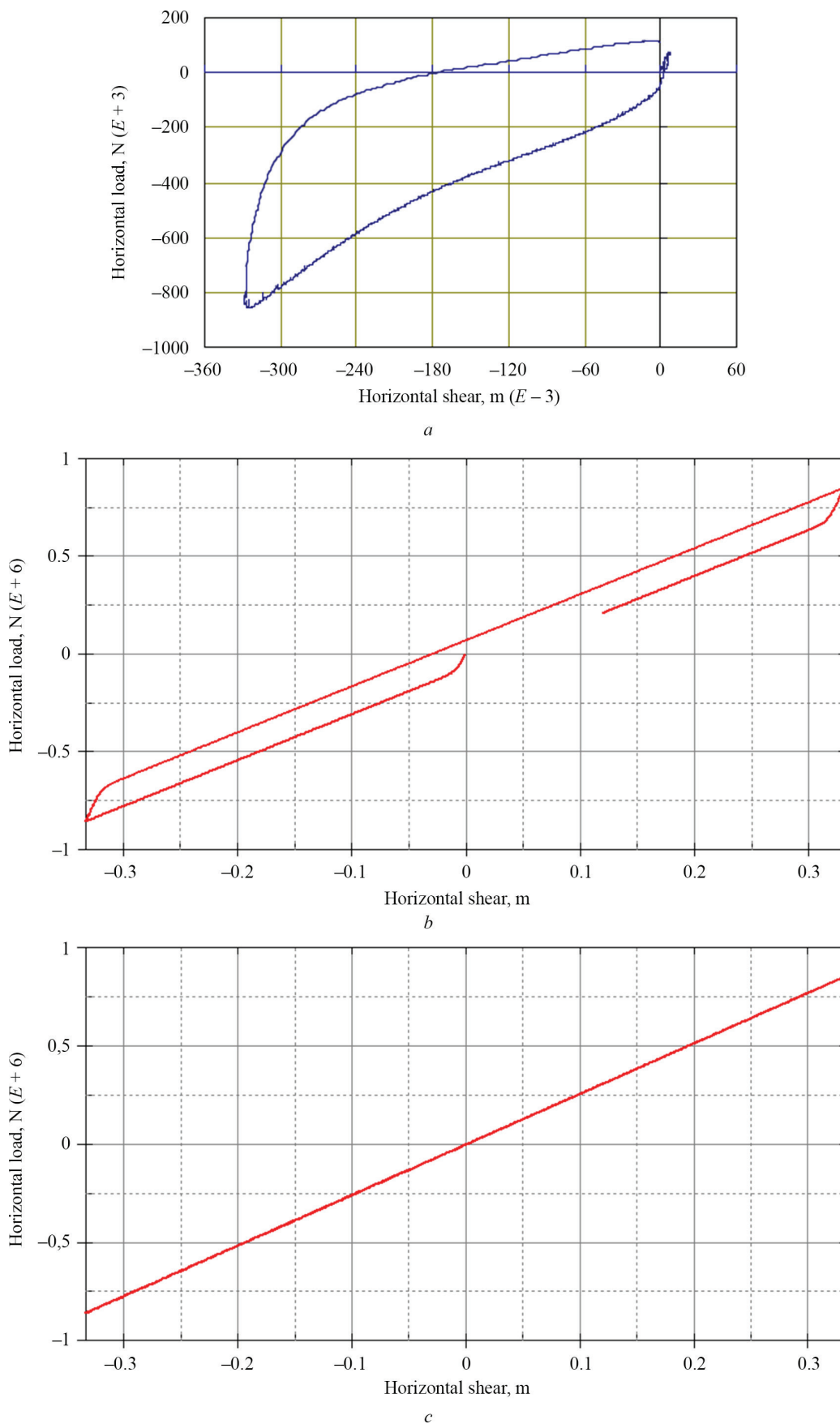


Fig. 3. Work diagrams: *a* — according to the results of bearing LRB-D600's factory tests; *b* — according to the results of numerical modelling with software package Ansys/LS-Dyna, idealized nonlinear model; *c* — according to the results of numerical modelling with software packages Ansys/LS-Dyna and Lira 10.6, idealized linear model



**Table 2.** Results of comparative studies of elastomeric bearing's work

Elastomeric bearing's type	Research results		Free period of motion, s	Horizontal force, kN / horizontal shear, m
LRB-D600	Software package Lira 10.6*	Idealized linear model	2,3	850/0.331
	Software package Ansys/LS-Dyna*	Idealized linear model	2.28	850/0.331
		Idealized nonlinear model	1.81	850/0.330
	Producer factory data*		2.28**	850/0.330

\* The results are gained with vertical load to a bearing LRB-D600 — 3393 kN;

\*\* Equivalent period, load  $T = 2\pi\sqrt{(M/k_{eff})}$ .

## REFERENCES

1. Kelly T.E., Skinner R.I., Robinson B. "Isolator devices and systems" in *Seismic isolation for designers and structural engineers, 1st ed.* Kanpur, NICEE, 2010; 41-87.
2. Muravyev N.P. Modern methods of seismic buildings for example EBP. *Far East: Problems of Development of the Architectural and Construction Complex.* 2013; 1:212-218. (rus.).
3. Guzeev R.N., Petrov V.A., Polinkevich K.Ju. Analysis of adler passenger terminal structure with seismic isolation system. *Natural and technogenic risks. Security of construction.* 2013; 5:41-43. (rus.).
4. Abakarov A.D., Omarov Kh.M. Approximating of association "force-transition" for seismoisolating rubber-metal bearers with the lead core. *Bulletin of Dagestan State Technical University. Technical science.* 2012; 4(27):60-68. (rus.).
5. Mkrtychev O.V., Dzinchvelashvili G.A., Bunov A.A. Study of lead rubber bearings operation with varying height buildings at earthquake. *Procedia Engineering.* 2014; 91:48-53. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.12.010
6. Mathai A., Manasa M.S. Performance of lead rubber bearing as a base isolator. *International Journal of Science Technology & Engineering.* 2017; 3(11):33-36.
7. Ayzenberg Ya.M., Smirnov V.I., Akbiev R.T. *Recommended practice for seismic isolation design with elastomeric bearings.* Moscow, RASS Publ., 2008; 46. (rus.).
8. Hwang J.S., Chiou J.M. An equivalent linear model of lead-rubber seismic isolation bearings. *Engineering Structures.* 1996; 18(7):528-536. DOI: 10.1016/0141-0296(95)00132-8
9. Symans M.D. Seismic protective systems: Seismic isolation. *Instructional Material Complementing FEMA 451, Design Examples.* Seismic isolation 15-7-12.
10. Bouc R. Forced vibration of a mechanical systems with hysteresis. *Proceedings of the 4th Conference on Non-linear Oscillations. Prague, 5–9 September 1967.* 1967; 315.
11. Bouc R. Modèle mathématique d'hystérésis: application aux systèmes à un degré de liberté. *Acustica (in French).* 1971; 24:16-25. (fr.).
12. Wen Y.K. Method for random vibration of hysteretic system. *Journal of Engineering Mechanics Division (American Society of Civil Engineers).* 1976; 102(2):249-263.
13. Ma F., Zhang H., Bockstedte A., Foliente G.C., Paevere P. Parameter analysis of the differential model of hysteresis. *Journal of Applied Mechanics.* 2004; 71(3):342-349. DOI: 10.1115/1.1668082
14. Sandip K.S., Matsagar V.A., Jain A.K. Comparison of base-isolated liquid storage tank models under bi-directional earthquakes. *Natural Science.* 2013; 05(08):27-37. DOI: 10.4236/ns.2013.58a1004

Received September 29, 2017

Adopted in a modified form October 12, 2018

Approved for publication November 28, 2018

ABOUT THE AUTHORS: **Oleg V. Mkrtychev** — Doctor of Technical Sciences, Professor of Department of Strength of Materials, **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation, mkrtychev@yandex.ru;

**Artem A. Bunov** — Candidate of Technical Sciences, engineer of the research laboratory "Reliability and seismic stability of structures", **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation, a\_bunov@mail.ru.