УДК 517.946
DOI: 10.25559/SITITO.14.201803.647-653

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ

И.А. Рудаков[1,2], Е.В. Романенко[2]
[1] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия
[2] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

PERIODIC SOLUTIONS OF A NON-SMALL AMPLITUDE OF THE QUASILINEAR EQUATION FOR OSCILLATIONS OF AN I-BEAM

Igor A. Rudakov[1,2], Elena V. Romanenco[2]
[1] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
[2] Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Ключевые слова

Колебания балки; периодические решения; ряды Фурье; неподвижные точки.

Аннотация

Исследуется задача о периодических по времени решениях квазилинейного уравнения вынужденных колебаний двутавровой балки с шарнирно опертыми концами. Нелинейное слагаемое и правая часть уравнения являются периодическими по времени функциями. В работе изучается случай, когда период времени соизмерим с длиной балки. Решение ищется в виде ряда Фурье. Для доказательства сходимости рядов Фурье и их производных исследуются собственные значения дифференциального оператора, соответствующего линейной части уравнения. Получены условия, при которых ядро дифференциального оператора является конечномерным и обратный оператор является вполне непрерывным на дополнении к ядру. Доказана лемма о существовании и регулярности решений соответствующей линейной задачи. Доказательство опирается на свойства сумм рядов Фурье. Доказана теорема о существовании и регулярности периодического решения, если нелинейное слагаемое удовлетворяет условию нерезонансности на бесконечности. Из условия нерезонансности вытекает тот факт, что при больших по модулю значениях аргумента график нелинейного слагаемого не пересекает прямых, угловой коэффициент которых является собственным значением линейной части уравнения. При доказательстве теоремы проводится априорная оценка решений соответствующего операторного уравнения и применяется принцип Лере-Шаудера о неподвижной точке. Получены дополнительные условия, при которых найденное в основной теореме периодическое решение является единственным.

Keywords

Wave equation; periodic solutions; variation method; critical points of the functional; mountain pass theorem.

Abstract

The problem of time-periodic solutions of the quasilinear equation of forced oscillations of an I-beam with hinged ends is investigated. The nonlinear summand and the right side of the equation are time periodic functions. The paper studies the case when the time period is commensurate with the length of the beam. The solution is sought in the form of a Fourier series. To prove the convergence of the Fourier series and their derivatives, we study the eigenvalues of the differential operator corresponding to the linear part of the equation. Conditions are obtained under which the kernel of a differential operator is finite-dimensional and the inverse operator is completely continuous on the complement of the kernel. A lemma on the existence

Об авторах:

Рудаков Игорь Алексеевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры ФН-2, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1); Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4669-0532, rudakov_ia@mail.ru

Романенко Елена Владимировна, студент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4), eeeee_rmn@mail.ru

and regularity of solutions of the corresponding linear problem is proved. The proof is based on the properties of the sums of the Fourier series. A theorem on the existence and regularity of a periodic solution is proved if the nonlinear term satisfies the non-resonance condition at infinity. The non-resonance condition implies the fact that, for large values of the argument, the graph of the non-linear term does not intersect the straight lines whose slope is an eigenvalue of the linear part of the equation. In the proof of the theorem, an a priori estimate is made of the solutions of the corresponding operator equation and the Leray-Schauder principle of a fixed point is applied. Additional conditions are obtained under which the periodic solution found in the main theorem is unique.

Введение

Рассматривается задача о периодических решениях квазилинейного уравнения колебаний балки с шарнирно опертыми концами

$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} - g(u) = f(x,t), 0 < x < \pi, t \in R$; (1)

$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(\pi,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0, t \epsilon R$; (2)

$u(x,t+T) = u(x,t), 0 < x < \pi, t \epsilon R$. (3)

В уравнении (1) правая часть $f(x,t)$ является T–периодической функцией, a есть положительная константа. Данная задача представляет собой математическую модель продольных колебаний проводов (стержней), способных сопротивляться изгибу и растяжению при воздействии внешней силы, а также колебаний двутавровой балки [1], [2]. Задаче о периодических и квазипериодических решениях для нелинейных эволюционных уравнений, таких как волновое уравнение и уравнение колебаний балки, посвящено большое количество работ. В статьях [2]-[15] получены условия существования периодических решений для волнового уравнения. При исследовании задачи о периодических решениях разработано большое количество методов. Это и применение теорем о неподвижных точках (принцип Банаха о сжимающих отображениях, принцип Браудера, принцип Лере-Шаудера и др.), вариационные методы, применение КАМ теории и другие. В данной статье метод работ [3],[11], разработанный для волнового уравнения, применяется при исследовании уравнения колебаний балки.

При $a = 0$ задача о периодических колебаниях балки изучалась в достаточно большом числе работ (см., например, [19]-[26]). В случае $a \neq 0$ в работе [27] доказано существование периодического решения малой амплитуды, если правая часть уравнения (1) имеет вид $\varepsilon f(x,t)$ и ε достаточно мало. В работе [28] при $a \neq 0$ доказано существование бесконечного числа решений задачи (1)-(3) в случае, когда нелинейное слагаемое g имеет степенной рост. В данной работе рассмотрен случай, когда нелинейное слагаемое g растет не быстрее линейной функции. Целью работы является доказательство теоремы о существовании решения задачи (1)-(3) при произвольной периодической по времени правой части f из соответствующего пространства, без предположения малости решения и f.

.

Рассмотрим вначале линейное уравнение ($g \equiv 0$

$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = f(x,t), 0 < x < \pi, t \in R$ (4)

с граничными условиями (2)-(3).
Пусть $T = 2\pi/w$ и выполнено одно из следующих условий:

$a \in R, a > 0, w \in Q, w > 0$; (5)
$a, w \in Q, w > 0, \frac{a}{w} \notin N, a = \frac{p}{q}, p, q \in N$, НОД$(p,q) = 1, q \neq n^2, \forall n \in N$; (6)
$w = \dfrac{p}{2q-1}, p, q \in N$, НОД$(p,q) = 1, a = 2b - 1, b \in N$. (7)

Обозначим $\Omega = [0,\pi] \times R/(TZ)$, $Z_{+N\cup\{0\}.}$ Решения задач (1)-(3) и (4),(2),(3) будем искать в виде ряда Фурье по следующей полной и ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системе

$\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi T}} sin(nx), \frac{2}{\sqrt{\pi T}} sin(nx)cos(wmt), \frac{2}{\sqrt{\pi T}} sin(nx)sin(wmt)\right\}_{n,m\in N}$
. (8)

Обозначим $\lambda_n = n^4 + an^2$, $\mu_{nm} = \lambda_n - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$. Числа μ_{nm} являются собственными значениями дифференциального оператора $A_0 = \partial_{tt} + \partial_{xxxx} - a\partial_{xx}$ с граничными условиями (2),(3).

Функции $e_{nm}^c = \frac{2}{\sqrt{\pi T}} sinnxcoswt$, $e_{nm}^s = \frac{2}{\sqrt{\pi T}} sinnxcoswt, n, m \in N$, $e_{n0}^0 = \frac{2}{\sqrt{\pi T}} sinnx$ из системы (8) являются собственными функциями A_0, соответствующих собственным числам μ_{nm}. Обозначим

$$S =$$

Пусть A есть замыкание по графику в $L_2(\Omega)$ оператора A_0. При этом область определения

$D(A) =$ и

$Au = \sum_{n\in N, m\in Z_{+\mu_{nm}(a_{nm}e_{nm}^c + b_{nm}e_{nm}^s)}}$

для$u = \sum_{n\in N, m\in Z_{+(a_{nm}e_{nm}^c + b_{nm}e_{nm}^s)\in D(A).}}$

Лемма 1. Пусть выполнено одно из условий (5), (6)или(7). Тогда ядро $N(A)$ оператора A конечномерно.
Доказательство. Достаточно проверить, что уравнение

$\mu_{nm} = 0$ (9)

имеет не более, чем конечное число решений при $n \in N, m \in Z_+$.

Обозначим $M_{nm} = \sqrt{\lambda_n} - \omega m$. Если выполнено условие (5), или условие (6), то в [27] доказано существование положительного числа ε_0 такое что

$|M_{nm}| \geq \varepsilon_0 > 0$ (10)

при всех $n \in N, m \in Z_+$. Таким образом, в этих случаях уравнение (9) не имеет решений.

Пусть выполнено условие (7). Рассмотрим вначале случай $a = 2b-1, w = 1, b \geq 2$. Легко видеть, что $M_{(b-1),(b-1)b} = 0$.

Если $m \geq (n+b-1)^2$, то

$|M_{nm}| = m - \sqrt{n^4 + (2b-1)n^2} \geq (n+b-1)^2 - \sqrt{n^4 + (2b-1)n^2} =$

$$\frac{4n^3(b-1) + (6b^2 - 14b + 7)n^2 + 4n(b-1)^3 + (b-1)^4}{(n+b-1)^2 + \sqrt{n^4 + (2b-1)n^2}} >$$

$$\frac{4(b-1)n}{\left(1 + \frac{b-1}{n}\right)^2 + \sqrt{1 + \frac{2b-1}{n^2}}} \geq \frac{4(b-1)}{b^2 + \sqrt{2b}}$$

Если $n^2 + b \leq m \leq (n+b-1)^2$, то $m^2 - n^4 - (2b-1)n^2 \geq n^2$ и

$|M_{nm}| = \frac{m^2 - n^4 - (2b-1)n^2}{m + \sqrt{n^4 - (2b-1)n^2}} > \frac{n^2}{(n+b-1)^2 + \sqrt{n^4 + (2b-1)n^2}} =$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{b-1}{n}\right)^2 + \sqrt{1 + \frac{(2b-1)}{n^2}}} \geq \frac{1}{b^2 + \sqrt{2b}}.$$

Если $m \leq n^2 + b - 1$ и $n \geq b$, то

$|M_{nm}| = \sqrt{n^4 - (2b-1)n^2} - m \geq \sqrt{n^4 - (2b-1)n^2} - (n^2 + b - 1) =$

$$\frac{n^2 - (b-1)^2}{\sqrt{n^4 + \frac{2b-1}{n^2}} + n^2 + b - 1} = \frac{1 - \left(\frac{b-1}{n}\right)^2}{\sqrt{1 + \frac{2b-1}{n^2}} + 1 + \frac{b-1}{n^2}} \geq$$

$$\geq \frac{1 - \left(\frac{b-1}{b}\right)^2}{\sqrt{1 + \frac{2b-1}{b^2}} + 1 + \frac{b-1}{b^2}} = \frac{2b-1}{b\sqrt{b^2 + 2b - 1} + b^2 + b - 1}.$$

Если $n \leq b-1$, то M_{nm} может иметь не более конечного числа нулей. Отсюда и из предыдущих оценок вытекает утверждение леммы при $w = 1, b \geq 2$.

Рассмотрим случай $a = 1 (b = 1), w = 1$. Тогда $M_{nm} = \left|\sqrt{n^4 + n^2} - m\right|$.

Если $m \geq (n+1)^2$, то

$$M_{nm} = m - \sqrt{n^4 + n^2} \geq (n+1)^2 - \sqrt{n^4 + n^2} = \frac{4n^3 + 5n^2 + 4n + 1}{(n+1)^2 + \sqrt{n^4 + n^2}} > \frac{4n + 5}{4 + \sqrt{2}} > 1.$$

При $n^2 + 1 \leq m \leq (n+1)^2$ имеем

$$M_{nm} = m - \sqrt{n^4 + n^2} = \frac{m^2 - n^4 - n^2}{m + \sqrt{n^4 + n^2}} \geq$$

$$\geq \frac{(n^2+1)^2 - n^4 - n^2}{(n^2+1)^2 + \sqrt{n^4 + n^2}} > \frac{1}{1 + \frac{2n}{n^2+1} + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}} > \frac{1}{3}.$$

Если $m \leq n^2$, то

$$M_{nm} = \frac{n^4 + n^2 - m^2}{m + \sqrt{n^4 + n^2}} \geq \frac{n^2}{m + n^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{m}{n^2} + \sqrt{2}} \geq \sqrt{2} - 1.$$

Таким образом, $\left|\sqrt{n^4 + n^2} - m\right| > \frac{1}{3}$ при $n, m \in N$.

Пусть a, w удовлетворяют условию (7). Тогда

$$M_{nm} = \left|\sqrt{n^4 + an^2} - \frac{p}{2q-1} m\right| =$$

$$\frac{1}{(2q-1)^2}\left|\sqrt{\left((2q-1)n\right)^4 + a(2q-1)^2\left((2q-1)n\right)^2} - p(2q-1)m\right|.$$

Число $a(2q-1)^2$ является нечетным. Поэтому из предыдущих рассуждений вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Поскольку $\mu_{nm} = M_{nm}\left(\sqrt{\lambda_n} + \omega m\right)$ и при выполнение одного из условий (5), (6)или(7) имеет место неравенство (10) при всех $\forall n \in N, m \in Z_+$ таких, что $\mu_{nm} \neq 0$, то

$|\mu_{nm}| \geq \varepsilon_0(n^2 + wm) \forall n \in N, m \in Z_+$ (10)

таких, что $\mu_{nm} \neq 0$. Обозначим

$$D_0 = \left\{\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\left(a_{nm}e_{nm}^c + b_{nm}e_{nm}^s\right) \middle| N, M \in N; a_{nm}, b_{nm} \in R\right\},$$

$H_k(\Omega) = W_2^k(\Omega), H_k = W_2^k([0,\pi]) (k \in N) -$ пространства Соболева.

Оператор $A: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$является самосопряженным и $L_2(\Omega) = R(A) \oplus N(A)$.

Пусть $f(x,t) \in L_2(\Omega)$.

Определение. Обобщенным решением задачи (4), (2), (3) называется функция $u \in L_2(\Omega)$ такая, что

$$\int_\Omega uA\varphi dxdt = \int_\Omega f(x,t)\varphi dxdt, \forall \varphi \in D_0.$$

Лемма 2. Предположим выполнено одно из условий (5), (6), или(7), функция $f(x,t) \in H_1(\Omega) \cap R(A)$. Тогда существует единственное обобщенное решение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega) \cap R(A)$ задачи (4), (2), (3), такое, что $u_{xx} \in C(\Omega)$ и граничные условия (2) выполнены в классическом смысле. Доказательство вытекает из леммы 2 работы [28].

Квазилинейное уравнение

Будем предполагать, что нелинейное слагаемое $g(u)$ удовлетворяет следующему условию: существуют константы $k_1, k_2 \in R$ такие, что

$k_1 \leq \underline{\lim}_{u\to\infty} \frac{g(u)}{u} \leq \overline{\lim}_{u\to\infty} \frac{g(u)}{u} \leq k_2.$ (11)

Определение. Обобщенным решением задачи (1) – (3) называется функция $u \in L_2(\Omega)$ такая, что

$$\int_\Omega (u(u_{tt} + \varphi_{xxxx} - a\varphi_{xx}) - g(u)\varphi)dxdt$$
$$= \int_\Omega f(x,t)\varphi dxdt\, \forall\varphi \in D_0.$$

Теорема. Пусть $g \in C^1(R)$ выполнено одно из условий (5), (6)или(7), условие (11) и $[k_1, k_2] \cap S = \emptyset$.
Тогда для любой функции $f(x,t) \in H_1(\Omega)$ задача (1) – (3) имеет обобщенное решение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ такое, что $u_{xx} \in C(\Omega)$ и граничные условия (2) выполнены в классическом смысле. Если дополнительно условиям теоремы

$k_1 \leq g'(u) \leq k_2 \forall u \in R,$ (12)

то решение задачи (1)-(3) единственно.
Доказательство. Из леммы 1 и неравенства (10) вытекает существование собственных значений $\lambda_1, \lambda_2 \in S$ оператора A, таких, что $(\lambda_1, \lambda_2) \cap S = \emptyset$ и $[k_1, k_2] \subset (\lambda_1, \lambda_2)$. Возьмём произвольное $k \in (\lambda_1, \lambda_2)$ и рассмотрим ряд

$I = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu_{nm}-k)^2}.$ (13)

Из неравенства (10) следует существование $K \in N$ такого, что $\frac{k}{\mu_{nm} \vee \leq \frac{1}{2} \text{при} n \geq K, m \geq K.}$
Поэтому

$$I = \frac{dimN(A)}{k^2} + \sum_{\mu_{nm}\neq 0} \frac{1}{(\mu_{nm}-k)^2} =$$
$$\frac{dimN(A)}{k^2} + \sum_{\mu_{nm}\neq 0} \frac{1}{{\mu_{nm}}^2\left(1-\frac{k}{\mu_{nm}}\right)^2} \leq$$
$$\leq \frac{dimN(A)}{k^2} + \sum_{\substack{n,m\leq K\\ \mu_{nm}\neq 0}} \frac{1}{(\mu_{nm}-k)^2} + 4\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{1}{{\mu_{nm}}^2}.$$

Используя неравенство (10) при $\mu_{nm} \neq 0$, выведем

$$\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{1}{{\mu_{nm}}^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{1}{\left(\sqrt{\lambda_n}-\omega m\right)^2} =$$
$$\frac{\pi^4}{90\omega^2}\sum_{m\neq\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\omega}}\frac{1}{\left(m-\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\omega}\right)^2} \leq \frac{\pi^4}{45\omega^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\left(m-\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\omega}\right)\right)^2} < \infty.$$

Следовательно, ряд (13) сходится и оператор $(A - kI): L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ является вполне непрерывным.
Решение задачи (1) – (3) найдем как решение операторного уравнения

$Au - g(u) = f$ (14)

Доказательство существования решения уравнения (14) проведем, опираясь на метод Н. Брезиса, Л. Ниренберга [3]. Из условия (11) вытекает существование положительных констант $D_1, D_2, k \in (\lambda_1, k)$и$\gamma \in (0, \lambda_2 - k)$ таких, что

$$(g(u) - ku)u + D_1 \geq 0, (15)$$
$$|g(u) - ku| \leq \gamma|u| + D_2 \forall u \in R\ (16)$$

Из неравенств (15), (16) при любой функции $u \in L_2(\Omega)$ выведем

$$(g(u) - ku, u) = \int_\Omega (g(u) - ku)udxdt =$$
$$\int_\Omega |(g(u) - ku)u + D_1|dxdt - \pi T D_1 \geq$$
$$\geq \int_\Omega |g(u) - ku|\cdot|u|dxdt - 2\pi T D_1 \geq$$
$$\geq \frac{1}{\gamma}\int_\Omega (g(u) - ku)^2dxdt - \frac{D_2}{\gamma}\int_\Omega |g(u) - ku|dxdt - 2\pi T D_1 \geq$$
$$\geq \frac{1}{\gamma}\|g(u) - ku\|^2 - D_3\|g(u) - ku\| - 2\pi T D_1 \geq$$
$$\geq \left(\frac{1}{\gamma} - \varepsilon\right)\|g(u) - k\|^2 - 2\pi T D_1 - \frac{1}{\varepsilon}D_4.$$

Здесь $D_3, D_4 \in (0, +\infty)$ и ε есть положительная константа. Таким образом, оператор $g: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ удовлетворяет условиям (15), (17) теоремы 2 работы [11]. Из теоремы 2 вытекает существования решения уравнения (14).
Включения $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega), u_{xx} \in C(\Omega)$ вытекают из леммы 2.
Пусть выполнено условие (12). Предположим, что u, v являются решениями уравнения (14), то есть

$Au - g(u) = f, Av - g(v) = f.$

Вычтем из второго равенства первое и полученное соотношение умножим на $(u - v)$ скалярно в $L_2(\Omega)$:

$$\left((k_1 I - A)(u - v), u - v\right) + (g_1(u) - g_2(v), u - v) = 0. (17)$$

Здесь $g_1(u) = g(u) - k_1 u$. Из условия (12) выведем

$$\left(g_1(u) - g_2(v)\right)^2 = |g_1(u) - g_2(v)|\cdot|g_1'(u_1)| \cdot\vee u - v \vee\leq$$
$$\leq (k_2 - k_1)\left(g_1(u) - g_2(v)\right)(u - v)\forall u, v \in R.$$

Легко видеть, что $k_1 - \lambda_2$ есть наименьшее по модулю отрицательное собственное значение оператора $k_1 I - A$. Поэтому из (17) выведем

$$0 \geq \big((k_1 I - A)(u - v), u - v\big) + \frac{1}{k_2 - k_1} \|g_1(u) - g_2(v)\|^2 \geq$$

$$\geq -\frac{1}{\lambda_2 - k_1} \|(k_1 I - A)(u - v)\|^2 + \frac{1}{k_2 - k_1} \|g_1(u) - g_2(v)\|^2 =$$

$$\left(\frac{1}{k_2 - k_1} - \frac{1}{\lambda_2 - k_1}\right) \|(k_1 I - A)(u - v)\|^2.$$

Таким образом, $(k_1 I - A)(u - v) = 0, u - v = 0$. Теорема доказана.

Заключение

В доказанных теоремах для нелинейного уравнения колебаний двутавровой балки с шарнирно опертыми концами получены условия существования, единственности и гладкости периодических решений.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.3843.2017/4.6).

Список использованных источников

[1] *Ванько В.И.* О собственных частотах колебаний проводов воздушных ЛЭП // Энергетика. Известия ВУЗ. 1987. № 8. С. 7-12.

[2] *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.

[3] *Brezis H., Nirenberg L.* Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Série 4. 1978. Vol. 5, no. 2. Pp. 225-326. URL: http://www.numdam.org/item/ASNSP_1978_4_5_2_225_0/ (дата обращения: 11.07.2018).

[4] *Tanaka K.* Infinitely many periodic solutions for the equation: II. // Transactions of the American Mathematical Society. 1988. Vol. 307, no. 2. Pp. 615-645. DOI: 10.2307/2001191

[5] *Feireisl E.* On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term // Czechoslovak Mathematical Journal. 1988. Vol. 38, no. 1. Pp. 78-87. URL: http://eudml.org/doc/13683 (дата обращения: 11.07.2018).

[6] *Barby V., Pavel N.H.* Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with x - dependent coefficients // Transactions of the American Mathematical Society. 1997. Vol. 349, no. 5. Pp. 2035-2048. DOI: 10.1090/S0002-9947-97-01714-5

[7] *Berti M., Biasco L.* Forced vibrations of wave equations with non-monotone nonlinearities // Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire. 2006. Vol. 23, no. 4. Pp. 439-474. DOI: 10.1016/j.anihpc.2005.05.004

[8] *Baldi P., Berti M.* Forced Vibrations of a Nongomogeneous String // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2008. Vol. 40, issue 1. Pp. 382-412. DOI: 10.1137/060665038

[9] *Berti M., Bolle P.* Cantor families of periodic solutions of wave equations with nonlinearities // Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA. 2008. Vol. 15, issue 1-2. Pp. 247-276. DOI: 10.1007/s00030-007-7025-5

[10] *Berti M., Biasco L.* Procesi M. KAM for reversible derivative wave equations // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2014. Vol. 212, issue 3. Pp. 905-955. DOI: 10.1007/s00205-014-0726-0

[11] *Рудаков И.А.* Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами // Математический сборник. 2007. Т. 198, вып. 7. С. 91-108. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=9541673 (дата обращения: 11.07.2018).

[12] *Ji S.* Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with - dependet coefficients // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. 2008. Vol. 32, issue 2. Pp. 137-153. DOI: 10.1007/s00526-007-0132-7

[13] *Ji S.* Periodic solutions for one dimensional wave equation with bounded nonlinearity // Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 264, issue 9. Pp. 5527-5540. DOI: 10.1016/j.jde.2018.02.001

[14] *Ji S., Li Y.* Time periodic solutions to the one-dimensional nonlinear wave equation // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2011. Vol. 199, issue 2. Pp. 435-451. DOI: 10.1007/s00205-010-0328-4

[15] *Ji S., Gao Y., Zhu W.* Existence and multiplicity of periodic solutions for Dirichlet-Neumann boundary value problem of a variable coefficient wave equation // Advanced Nonlinear Studies. 2016. Vol. 16, issue 4. Pp. 765 -773. DOI: 10.1515/ans-2015-5058

[16] *Chen J.* Periodic solutions to nonlinear wave equations with spatially dependent coefficients // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2015. Vol. 66, issue 5. Pp. 2095 -2107. DOI: 10.1007/s00033-015-0497-y

[17] *Chen J., Zhang Z.* Existence of periodic solutions to asymptotically linear wave equations in a ball // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. 2017. Vol. 56, issue 58. Pp. 3-27. DOI: 10.1007/s00526-017-1154-4

[18] *Yuan X.* Quasi-periodic solutions of completely resonant nonlinear wave equations // Journal of Differential Equations. 2006. Vol. 230, issue 1. Pp. 213-274. DOI: 10.1016/j.jde.2005.12.012

[19] *Feireisl E.* Time periodic solutions to a semilinear beam equation // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1988. Vol. 12, issue 3. Pp. 279-290. DOI: 10.1016/0362-546X(88)90114-9

[20] *Eliasson L.H., Grebert B., Kuksin S.B.* KAM for the nonlinear beam equation // Geometric and Functional Analysis. 2016. Vol. 26, no. 6. Pp. 1588-1715. DOI: 10.1007/s00039-016-0390-7

[21] *Elishakoff I., Johnson V.* Apparently the first closed-form solution of vibrating inhomogeneous beam with s tip mass // Journal of Sound and Vibration. 2005. Vol. 286, issue 4-5. Pp. 1057-1066. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.01.050

[22] *Elishakoff I., Pentaras D.* Apparently the first closed-form solution of inhomogeneous elastically restrained vibrating

beams // Journal of Sound and Vibration. 2006. Vol. 298, issue 1-2. Pp. 439-445. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.05.028

[23] *Wang Y., Si J.* A result on quasi-periodic solutions of a nonlinear beam equation with a quasi-periodic forcing term //

[24] Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2012. Vol. 63, issue 1. Pp. 189-190. DOI: 10.1007/s00033-011-0172-x

[25] *Chen B., Gao Y., Li Y.* Periodic solutions to nonlinear Euler-Bernoulli beam equations // Dynamical systems (Math. DS). arXiv preprint. Vol. 1. 2018. 29 p. URL: https://arxiv.org/abs/1804.03300v1

[26] *Rudakov I.A.* Periodic Solutions of the Quasilinear Beam Vibration Equation With Homogeneous Boundary Conditions // Differential equations. 2012. Vol. 48, no. 6. Pp. 820-831. DOI: 10.1134/S0012266112060067

[27] *Рудаков И.А.* Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки с однородными граничными условиями // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2015. Т. 79, № 5. С. 215-238. DOI: 10.4213/im8250

[28] *Yamaguchi M.* Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications // Funkcialaj Ekvacioj. 1995. Vol. 38. Pp. 519-538.

[29] *Rudakov I.A.* On periodic solutions of a beam vibration equation / /Differential Equations. 2018. Vol. 54, no. 5. Pp. 687-695. DOI: 10.1134/S0012266118050117

Поступила 11.07.2018; принята в печать 20.08.2018; опубликована онлайн 30.09.2018.

References

[1] Van'ko V.I. On natural oscillation frequencies of overhead transmission conductors. *Energetika. Proceedings of CIS higher education institutions and power engineering associations*. 1987; 8:7-12. (In Russian)

[2] Collatz L. Eigenwertaufgaben mit technishen anwendungen. Akademishe Verlagsgesellschaft. Geest & Portig K.-G. Leipzig, 1963.

[3] Brezis H., Nirenberg L. Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Série 4*. 1978; 5(2);225-326. Available at: http://www.numdam.org/item/ASNSP_1978_4_5_2_225_0/ (accessed 11.07.2018).

[4] Tanaka K. Infinitely many periodic solutions for the equation: II. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1988; 307(2):615-645. DOI: 10.2307/2001191

[5] Feireisl E. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 1988; 38(1):78-87. Available at: http://eudml.org/doc/13683 (accessed 11.07.2018).

[6] Barby V., Pavel N.H. Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with x - dependent coefficients. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1997; 349(5):2035-2048. DOI: 10.1090/S0002-9947-97-01714-5

[7] Berti M., Biasco L. Forced vibrations of wave equations with non-monotone nonlinearities. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*. 2006; 23(4);439-474. DOI: 10.1016/j.anihpc.2005.05.004

[8] Baldi P., Berti M. Forced Vibrations of a Nongomogeneous String. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 2008; 40(1):382-412. DOI: 10.1137/060665038

[9] Berti M., Bolle P. Cantor families of periodic solutions of wave equations with nonlinearities. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*. 2008; 15(1-2):247-276. DOI: 10.1007/s00030-007-7025-5

[10] Berti M., Biasco L. Procesi M. KAM for reversible derivative wave equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2014; 212(3):905-955. DOI: 10.1007/s00205-014-0726-0

[11] Rudakov I.A. Periodic solutions of a quasi-linear wave equation with variable coefficients. *Matem. Sbornik*. 2007; 198(7):91-108. (In Russian)

[12] Ji S. Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with - dependet coefficients. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. 2008; 32(2):137-153. DOI: 10.1007/s00526-007-0132-7

[13] Ji S. Periodic solutions for one dimensional wave equation with bounded nonlinearity. *Journal of Differential Equations*. 2018; 264(9):5527-5540. DOI: 10.1016/j.jde.2018.02.001

[14] Ji S., Li Y. Time periodic solutions to the one-dimensional nonlinear wave equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2011; 199(2):435-451. DOI: 10.1007/s00205-010-0328-4

[15] Ji S., Gao Y., Zhu W. Existence and multiplicity of periodic solutions for Dirichlet-Neumann boundary value problem of a variable coefficient wave equation. *Advanced Nonlinear Studies*. 2016; 16(4):765 -773. DOI: 10.1515/ans-2015-5058

[16] Chen J. Periodic solutions to nonlinear wave equations with spatially dependent coefficients. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2015; 66(5):2095 -2107. DOI: 10.1007/s00033-015-0497-y

[17] Chen J., Zhang Z. Existence of periodic solutions to asymptotically linear wave equations in a ball. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. 2017; 56(58):3-27. DOI: 10.1007/s00526-017-1154-4

[18] Yuan X. Quasi-periodic solutions of completely resonant nonlinear wave equations. *Journal of Differential Equations*. 2006; 230(1):213-274. DOI: 10.1016/j.jde.2005.12.012

[19] Feireisl E. Time periodic solutions to a semilinear beam equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 1988; 12(3):279-290. DOI: 10.1016/0362-546X(88)90114-9

[20] Eliasson L.H., Grebert B., Kuksin S.B. KAM for the nonlinear beam equation. *Geometric and Functional Analysis*. 2016; 26(6):1588-1715. DOI: 10.1007/s00039-016-0390-7

[21] Elishakoff I., Johnson V. Apparently the first closed-form solution of vibrating inhomogeneous beam with s tip mass *Journal of Sound and Vibration*. 2005; 286(4-5):1057-1066. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.01.050

[22] Elishakoff I., Pentaras D. Apparently the first closed-form solution of inhomogeneous elastically restrained vibrating beams. *Journal of Sound and Vibration*. 2006; 298(1-2):439-445. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.05.028

[23] Wang Y., Si J. A result on quasi-periodic solutions of a nonlinear beam equation with a quasi-periodic forcing ter. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2012; 63(1):189-190. DOI: 10.1007/s00033-011-0172-x

[24] Chen B., Gao Y., Li Y. Periodic solutions to nonlinear Euler-Bernoulli beam equations. *Dynamical systems* (Math. DS). arXiv preprint. Vol. 1. 2018. 29 p. Available at: https://arxiv.org/abs/1804.03300v1 (accessed 11.07.2018).

[25] Rudakov I.A. Periodic Solutions of the Quasilinear Beam Vibration Equation With Homogeneous Boundary Conditions. *Differential equations*. 2012; 48(6):820-831. DOI: 10.1134/S0012266112060067

[26] Rudakov I.A. Periodic solutions of the quasilinear equation of forced beam vibration with homogeneous boundary conditions. *Izvestiya: Mathematics*. 2015; 79(5):1064-1086. DOI 10.1070/IM2015v079n05ABEH002772

[27] Yamaguchi M. Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications. *Funkcialaj Ekvacioj*. 1995; 38:519-538.

[28] Rudakov I.A. On periodic solutions of a beam vibration equation. *Differential Equations*. 2018; 54(5):687-695. DOI: 10.1134/S0012266118050117

Submitted 11.07.2018; revised 20.08.2018; published online 30.09.2018.

About the authors:

Igor A. Rudakov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Bauman Moscow State Technical University (5 2nd Baumanskaya Str., Build. 1, Moscow 105005, Russia); Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamsk highway, Moscow 125993, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4669-0532, rudakov_ia@mail.ru

Elena V. Romanenco, student, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamsk highway, Moscow 125993, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5192-9854, eeeee_rmn@mail.ru