МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

О. С. АРХІПОВА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Для студентів 1 курсу денної та заочної форми навчання
за напрямами підготовки *6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)», 6.170202 «Охорона праці»*

ХАРКІВ
ХНУМГ
2014

УДК 517.2+517.51

Архіпова О. С. Вища математика: конспект лекцій. Для студентів 1 курсу денної та заочної форми навчання за напрямами підготовки *6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)», 6.170202 «Охорона праці» /* О. С. Архіпова; Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Х.: ХНУМГ, 2014. – 277 с.

Автор: **О. С. Архіпова**

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, професор А. І. Колосов (ХНУМГ ім. О. М. Бекетова)
д-р фіз.-мат. наук, професор М. В. Новожилова (ХДТУБА)

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 5 від 25.12.2013 р.

Конспект лекцій містить теоретичні відомості з основних розділів вищої математики: лінійної алгебри та аналітичної геометрії, диференціального та інтегрального числення, функції бігатьох змінних, звичайних диференціальних рівнянь, числових та функціональних рядів.

Конспект лекцій складено за діючою програмою з курсу вищої математики для студентів напряму підготовки 6.170202 − «Охорона праці», *6.070101 «Транспортні технології» (за видами транспорту)*

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У посібнику викладені теоретичні відомості з відповідних розділів, систематизовані методи розв’язання практичних задач, що дає змогу студентам досягти навиків в розв’язанні задач з основних розділів вищої математики.

Особливу увагу приділено темам, які важче засвоюються студентами: диференціальні рівняння, кратні та криволінійні інтеграли, числові і функціональні ряди.

Посібник може бути також використаний студентами інших спеціальностей і викладачами для контролю засвоєння матеріалу за основними розділами вищої математики.

РОЗДІЛ 1

МАТРИЧНА АЛГЕБРА, ВИЗНАЧНИКИ, СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Матриці й дії над ними

1.1.1. Матриці та їх класифікація

Систему m чисел, записаних у вигляді прямокутної таблиці, що містить m рядків й n стовпців, називають матрицею розмірності (розміру) m на n. Числа, з яких складена матриця, називаються її елементами. Матриці звичайно позначаються великими буквами *A*, *B*, *C*,…, а їхні елементи – малими: $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, ...$. Перший індекс елемента матриці вказує номер рядка, у якому знаходиться даний елемент, другий індекс – номер стовпця. Так, елемент a_{ij} розташований на перетині *i-й* рядка й *j-го* стовпця матриці *A*. Матриця *A* розмірності m на n записується так:

$$A = A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Такий запис матриці *A* називається розгорненим.

Скорочені форми запису:

$$A = (a_{ij}); \;\; A = [a_{ij}]; \;\; A_{mn} = (a_{ij})_{mn}; \;\; A_{mn} = [a_{ij}]_{mn}.$$

Якщо в матриці A_{mn} число рядків не дорівнює числу стовпців, тобто $m \neq n$, то матрицю *A* називають прямокутною; якщо ж $m = n$ – квадратною матрицею *n-го* порядку.

Матриця, що складається з одного рядка (стовпця) називається матрицею-рядком (матрицею-стовпцем) або вектором-рядком (вектором-стовпцем).

Якщо всі елементи матриці *A* дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0$ для всіх $i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n},$ то матриця називається нульовою.

Елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ квадратної матриці *n-го* порядку називаються діагональними, а вся їхня сукупність – головною діагоналлю або просто діагоналлю матриці *A*.

Квадратна матриця, всі недіагональні елементи якої дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0$ для всіх $i \neq j$, називається діагональною.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Діагональна матриця, у якої $a_{ii}=1,\left(\forall\ i=\overline{1,n}\right)$, називається одиничною матрицею порядку *n*. Одиничні матриці позначаються через *E* або *I*.

Якщо всі елементи матриці, розташовані вище (нижче) головної діагоналі дорівнюють нулю, то матриця називається трикутною (нижньотрикутною або верхньотрикутною). Наприклад,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$ – верхньотрикутна матриця.

Матриця, отримана з матриці *A*, заміною рядків стовпцями зі збереженням їхнього порядку, називається транспонованою стосовно матриці *A* матрицею й позначається $A^T\ или\ A'$.

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Наприклад, $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 8 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

1.1.2. Дії над матрицями

1) Матриці А и В називають рівними й пишуть $A=B$, якщо:

а) ці матриці однієї розмірності: $A=A_{mn},\ B=B_{mn}$;

б) $a_{ij}=b_{ij}$ для всіх $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

2) Для матриць однакової розмірності визначена операція (дія) алгебраїчного додавання: $A=A_{mn}=\left(a_{ij}\right)_{mn}$, $B=B_{mn}=\left(b_{ij}\right)_{mn}$;

$A\pm B=A_{mn}\pm B_{mn}=\left(a_{ij}\pm b_{ij}\right)_{mn}$, $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ – сума або різниця матриць.

3) Добутком матриці *A* на число *a* або числа *a* на матрицю *A* називають матрицю, елементи якої одержують множенням всіх елементів матриці *A* на число *a:*

$A\cdot a=a\cdot A=\left(a\cdot a_{ij}\right),\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$.

4) Якщо число стовпців матриці $A=A_{mk}$ дорівнює числу рядків матриці $B=B_{kn}$, то тоді (і тільки тоді!) визначається добуток матриці A_{mk} на матрицю B_{kn}:

$A_{mk}\cdot B_{kn}=C_{mn}=\left(c_{ij}\right)_{mn}$.

Елемент c_{ij} матриці $C=AB$ обчислюється як скалярний добуток *i-й* рядка матриці *A* на *j-й* стовпець матриці *B*:

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\dots+a_{ik}\cdot b_{kj}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}\cdot b_{sj},\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}.$$

Якщо A і B – квадратні матриці одного порядку, то в цьому випадку мають сенс добутки AB і BA. Необхідно пам'ятати, що в загальному випадку $AB \neq BA$. Якщо ж $AB = BA$, то такі квадратні матриці називають переставними або комутативними.

Для операцій додавання, множення матриць на число й множення матриць справедливі наступні властивості:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
5. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
6. $(AB)C = A(BC)$;
7. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$;
8. $(A + B)C = AC + BC$;
9. $C(A + B) = CA + CB$
10. $AE = EA = A$;

Приклад 1. Обчислити матрицю $D = 3A - 4B$,

якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

$3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 21 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, $\quad 4B = \begin{pmatrix} -4 & 36 & 0 \\ 8 & 16 & -32 \end{pmatrix}$

$D = 3A - 4B = \begin{pmatrix} 10 & -33 & -9 \\ 13 & -16 & 44 \end{pmatrix}$

Приклад 2.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}_{2,3} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3,2}$

Число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B.

$D = AB = (d_{ij})_{2,2.}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.2. Визначники і їх властивості

Визначником n-го порядку називається число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[i_1, i_2, \dots, i_n]} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n},$$

де підсумовування поширюється на всілякі перестановки $i_1, i_2, \dots, i_n$ із n чисел $1, 2, \dots, n$; $[i_1, i_2, \dots, i_n]$ – число інверсій у перестановці перших індексів $i_1, i_2, \dots, i_n$.

З означення визначника виходить, що визначник другого порядку дорівнює числу: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Визначник третього порядку дорівнює:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Наприклад, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1(-5)(-1) + 3\cdot 7\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 2 - 2\cdot(-5)\cdot 1 - 7\cdot 3\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot(-1) = 33$.

Означення. *Мінором (M_{ij}) елемента a_{ij} називається визначник порядку n-1, отриманий з визначника n-го порядку викреслюванням рядка й стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.*

Означення. *Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника називається число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} – мінор елемента a_{ij}.*

Основні властивості визначників:

1. Визначник не зміниться при транспонуванні, тобто якщо його рядки й стовпці поміняти місцями.
2. При перестановці місцями будь-яких двох рядків (стовпців) визначник змінить знак на протилежний.
3. Загальний множник всіх елементів рядка (стовпця) виноситься за знак визначника.
4. Визначник, у якого два рядки (стовпця) пропорційні, дорівнює нулю.

   Наслідки властивості 4:

   a) визначник, у якого 2 рядка (2 стовпці) однакові, дорівнює нулю;

   b) визначник дорівнює нулю, якщо рядок (стовпець) дорівнює нулю.
5. Якщо до елементів рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помноженого на будь-яке число, то визначник не зміниться.
6. Визначник дорівнює сумі добутків елементів рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення. При обчисленні визначників порядку вище третього користуються властивістю 5, попередньо одержуючи нулі в рядку або стовпці.

Наприклад, обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_2 - a_1\cdot 1 \to a_2 \\ = a_3 + a_1\cdot(-3) \to a_3 = \\ a_4 + a_1\cdot(-1) \to a_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -7 & 10 & -12 \\ 0 & 3 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 10 & -12 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 12 \cdot (30 + 7 - 12 - 21) = 12 \cdot 4 = 48.$$

1.3. Обернена матриця. Ранг матриці

Квадратна матриця називається невиродженою, якщо її визначник не дорівнює нулю, інакше вона називається виродженою.

Означення. *Матриця* A^{-1} *називається оберненою стосовно матриці A, якщо*

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де *E – одинична матриця*; $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$.

Квадратна матриця має обернену.

Обернена матриця знаходиться за формулою: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{21} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$,

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A;
det A – визначник матриці *A*.

Приклад 5. Знайти матрицю, обернену матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв’язання. Знайдемо визначник даної матриці: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33 \neq 0,$

виходить, обернена матриця існує.
Алгебраїчні доповнення елементів матриці *A*:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -16; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 31; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -11.$$

Одержимо: $A^{-1} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$

Перевірка: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Аналогічно, $A^{-1}A = E$.

1.3.1. Елементарні перетворення матриць

Елементарними перетвореннями матриць називаються:

1. перестановка місцями рядків (стовпців) матриці;
2. множення всіх елементів рядка (стовпця) на те саме число;
3. додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на те саме число;
4. відкидання рядків (стовпців), всі елементи яких дорівнюють нулю;

Матриці, отримані одна з іншої при елементарних перетвореннях, називаються еквівалентними.

1.3.2. Ранг матриці

Рангом (r або $rang$) матриці називають найвищий порядок її мінору, відмінного від нуля; під мінором *k-го* порядку матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{m;n}$ розуміють визначник, елементи якого стоять на перетині k рядків й k стовпців матриці.
Для ненульової матриці $1 \le r \le \min(m;n)$.

Можна показати, що елементарні перетворення не змінюють ранг матриці.
За допомогою елементарних перетворень можна привести матрицю до канонічного виду, тобто до матриці, у якої на головній діагоналі стоять одиниці, а інші елементи матриці дорівнюють нулю.

Приклад 1. Обчислити ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{pmatrix}$

Розв’язання.
Поміняємо місцями перший й четвертий рядки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} a_1 \cdot (-4) + a_2 \to a_2 \\ a_1 \cdot (-2) + a_3 \to a_3 \\ a_1 \cdot (-2) + a_4 \to a_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} b_1 \cdot (-8) + b_2 \to b_2 \\ b_1 \cdot (7) + b_3 \to b_3 \\ b_1 \cdot (-12) + b_4 \to b_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{pmatrix} \sim a_2 + a_3 \cdot (-2) \to a_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim a_4 \cdot (-1) + a_3 \to a_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} a_2 \cdot (-3) + a_4 \to a_4 \\ a_2 + a_3 \cdot (-1) \to a_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} a_2 \cdot (-1) \to a_2 \\ a_4 + a_3 \cdot (-1) \to a_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim a_2 \cdot 2 + a_3 \to a_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} a_3 \div 7 \to a_3 \\ b_2 \cdot (-2) + b_3 \to b_3 \\ b_2 \cdot (-4) + b_4 \to b_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim b_3 \cdot (-1) + b_4 \to b_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тому що визначник $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, звідси випливає, що *rang(A)=3*, тобто число одиниць на головній діагоналі дорівнює рангу матриці.

1.4. Розв'язування систем лінійних рівнянь

1.4.1. Загальні поняття

Система *n* лінійних рівнянь із *n* невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.4.)$$

2)

де $a_{ij}\left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}\right), b_i$ – коефіцієнти, x_i – невідомі.

Системи рівнянь називаються еквівалентними, якщо будь-який розв'язок однієї з них є розв'язком іншої.

Ввівши в розгляд матриці-стовпці $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$

систему рівнянь можна переписати в матричному виді $AX = B$.

Якщо $b_j\left(j = \overline{1,n}\right)$ дорівнюють нулю, система називається *однорідною*, інакше система називається *неоднорідною*.

1.4.2. Правило Крамера

Нехай $\det A = \Delta \neq 0$, тоді розв’язок системи рівнянь (1.4) має вигляд $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}\left(j = \overline{1,n}\right)$, де Δ_j – визначник, отриманий із визначника Δ системи заміною *j-го* стовпця при невідомому x_j стовпцем правих частин *B*.

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один з $\Delta_j \neq 0$, то система несумісна, тобто розв’язків не має.

Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n = 0$, то система рівнянь або несумісна, або невизначена, тобто має нескінченну множину розв’язків.

Приклад 1. Розв’язати систему рівнянь за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

Розв’язання.

Визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33;$

знаходимо $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33;$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33;$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 33;$

тоді $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{33}{33} = 1,$ $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{33}{33} = 1,$ $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{33}{33} = 1.$

1.4.3. Розв’язування систем рівнянь матричним способом (за допомогою оберненої матриці)

Лінійна система рівнянь у матричному виді $AX = B$. Домножимо на A^{-1} матричне рівняння, одержимо розв’язок $X = A^{-1}B.$

Приклад 1. Розв’язати систему рівнянь матричним способом (за допомогою оберненої матриці):

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

Розв'язання.

Нехай $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 8\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$,

тоді система рівнянь прийме вид $AX=B$ й її розв'язок $X=A^{-1}B$.

Обернена матриця, обчислена раніше, дорівнює $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{11} & \frac{-1}{11} & 0\\ \frac{31}{33} & \frac{-1}{11} & \frac{-1}{3}\end{pmatrix}$, звідси:

$$X=\begin{pmatrix}\frac{-16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{11} & \frac{-1}{11} & 0\\ \frac{31}{33} & \frac{-1}{11} & \frac{-1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},$$

$$x=\frac{-16}{33}\cdot 4+\frac{3}{11}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 8=1,$$

де $$y=\frac{3}{11}\cdot 4-\frac{1}{11}\cdot 1+0\cdot 8=1,$$

$$z=\frac{31}{33}\cdot 4-\frac{1}{11}\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot 8=1.$$

1.4.4. Системи *m* лінійних рівнянь із *n* невідомими

Теорема Кронекера - Капеллі.

Теорема 1. Для того щоб система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ ....\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

була сумісною, необхідно й достатньо, щоб ранг розширеної матриці системи був рівний рангу її основної матриці, тобто $r\left(A_{розш}\right)=r\left(A\right)$. Тут

$$A_{ðî\,çø\,.}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Системи лінійних однорідних рівнянь $\left(b_i=0;\ i=\overline{1,m}\right)$**.**

Система лінійних однорідних рівнянь завжди сумісна, має очевидний нульовий (тривіальний) розв'язок $x_i=0;\ i=\overline{1,n};\ r(A)=r\left(A_{розш}\right)$, оскільки додавання нульового стовпця не збільшує рангу матриці.

Теорема 2. *Для того, щоб однорідна система лінійних рівнянь мала ненульовий розв'язок, необхідно й достатньо, щоб ранг r матриці її коефіцієнтів був менше числа невідомих n.*

Наслідок. *Будь-яка система m лінійних однорідних рівнянь, число рівнянь у якій менше числа невідомих, має нетривіальний розв'язок.*

Теорема 3. *Для того, щоб однорідна система n рівнянь із n невідомими мала ненульовий розв'язок, необхідно й достатньо, щоб її визначник був рівний нулю.*

Означення. *Рядки e_1, e_2,…,e_m називаються лінійно залежними, якщо знайдуться такі числа $\alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_m$, з яких хоча б одне не дорівнює нулю, що $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_m e_m = 0$, інакше рядки називаються лінійно незалежними.*

Теорема 4(про базисний мінор). *Якщо ранг матриці дорівнює r, то в цій матриці можна знайти r лінійно незалежних рядків, через які лінійно виражаються всі інші рядки. Зазначені r рядків називаються базисними.*

1.4.5. Правило розв'язування довільної системи *m* лінійних рівнянь із *n* невідомими

Загальним розв'язком системи лінійних рівнянь називається такий розв'язок, у якому базисні невідомі виражені через інші невідомі, які називаються вільними.

Частинним розв'язком називається розв'язок, отриманий із загального розв'язку при деяких числових значеннях вільних невідомих.

Базисним розв'язком називається частинний розв'язок, вільні невідомі якого дорівнюють нулю.

1. Обчислюючи ранги основної й розширеної матриці системи, з'ясовують питання про її сумісність. Якщо система сумісна, то знаходять який-небудь базисний мінор порядку *r*.
2. Береться *r* рівнянь, з коефіцієнтів яких складений базисний мінор; інші рівняння відкидають. Невідомі, коефіцієнти яких входять у базисний мінор, називають головними й залишають ліворуч, а інші *n-r* невідомих називають вільними й переносять у праві частини рівнянь.
3. За правилом Крамера знаходять вирази головних невідомих через вільні. Отримані рівності будуть загальним розв'язком системи.
4. Надаючи вільним невідомим будь-які числові значення, знаходять відповідні значення головних невідомих. Тим самим знаходять частинний розв'язок вихідної системи рівнянь.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

Розв’язання.

Досліджуємо систему на сумісність.

$$A_{розш.}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} a_2+a_1\cdot(-2)\to a_2 \\ a_3+a_1\cdot(-1)\to a_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -22 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} a_3+a_2\cdot(-2)\to a_3 \\ a_2\cdot(-1)\to a_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \end{array}\right).$$

Відкидання нульового рядка не міняє рангу матриці. Оскільки мінор

$\Delta_2=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 11 \end{vmatrix}=55-56=-1\neq 0,$ тобто $r(A)=r\left(A_{розш.}\right)$, система сумісна.

Оскільки перетворення відносилися тільки до рядків, система рівнянь рівносильна наступній системі:

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1 \\ \qquad\qquad 8x_3+11x_4=0 \end{cases}$$

Це базисна система рівнянь. Знайдемо головні невідомі x_3 й x_4, виразивши їх через вільні невідомі x_1 й x_2.

$$\begin{cases} 5x_3+7x_4=1-2x_1+3x_2 \\ 8x_3+11x_4=0 \end{cases}$$

Застосуємо формули Крамера, що дає загальний розв’язок системи

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 11 \end{vmatrix}=-1;\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 1-2x_1+3x_2 & 7 \\ 0 & 11 \end{vmatrix}=-22x_1+33x_2+11;$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 5 & 1-2x_1+3x_2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}=16x_1-24x_2-8\ ;$$

$$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=22x_1-33x_2-11;\quad x_4=\frac{\Delta_4}{\Delta}=-16x_1+24x_2+8,$$

де базисні x_3 й x_4 невідомі виражені через вільні змінні x_1 й x_2.

Отримано загальний розв’язок системи

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 22x_1-33x_2-11 \\ -16x_1+24x_2+8 \end{pmatrix}$$

Візьмемо частинний розв’язок, вважаючи $x_1=1,\ x_2=1$, тоді $x_3=-22;\ x_4=16$, тобто $X_r^T=(1;1;-22;16)$.

Перевіримо розв’язок, підставивши частинний розв’язок у вихідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2-3-22\cdot 5+7\cdot 16=1 \\ 4-6-22\cdot 2+3\cdot 16=2 \\ 2-3-11\cdot(-22)-15\cdot 16=1 \end{cases}$$

Всі рівняння системи перетворюються в тотожності. Розв’язок знайдено.

Контрольні завдання до розділу 1

Завдання 1. Обчислити визначники

1.1.1. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	1.1.2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$	1.1.3. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
1.1.4. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$	1.1.5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	1.1.6. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
1.1.7. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$	1.1.8. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	1.1.9. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
1.1.10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$	1.1.11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	1.1.12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$
1.1.13. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	1.1.14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$	1.1.15. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
1.1.16. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$	1.1.17. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$	1.1.18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
1.1.19. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	1.1.20. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	1.1.21. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & -4 & 3 \end{vmatrix}$
1.1.22. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 7 & -4 \\ 2 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$	1.1.23. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$	1.1.24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -13 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{vmatrix}$
1.1.25. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	1.1.26. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$	1.1.27. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
1.1.28. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$	1.1.29. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 2 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$	1.1.30. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

РОЗДІЛ 2

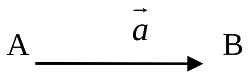
ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

2.1. Основні поняття

Багато фізичних величин (сила, швидкість, прискорення й ін.) характеризуються не тільки числовим значенням, але й напрямом. Такі величини називаються *векторними*.

Векторну величину геометрично зображують за допомогою відрізка певної довжини й певного напряму.

Вектором будемо називати *напрямлений відрізок* (рис. 2.1). Напрям вектора вказується стрілкою. Точка A називається *початком*, а точка B – *кінцем*. Вектори позначаються буквами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ...$, а також $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}, ...$ (на першому місці ставиться початок вектора).



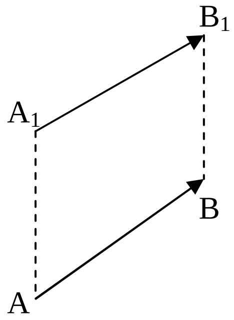


Рис. 2.1 Рис. 2.2

Відстань між початком і кінцем вектора називається *довжиною* або *модулем* вектора. Довжина вектора $\vec{a}$ позначається $|\vec{a}|$.

Вектори, розташовані на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*.

Два вектори називаються *рівними,* якщо вони збігаються при паралельному переносі. Паралельний перенос переводить початок і кінець одного вектора відповідно в початок і кінець іншого вектора, тобто $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 2.2).

Два вектори називаються *однаково напрямленими (протилежно напрямленими)*, якщо вони *колінеарні* й у рівних їм векторів, що мають загальний початок, кінці розташовуються по одну сторону від початку (відповідно по різні сторони від початку).

Рівні вектори однаково *напрямлені* й мають рівні довжини. І обернено, якщо вектори однаково *напрямлені* й мають рівні довжини, то вони рівні. Від будь-якої точки можна відкласти вектор, рівний даному, і притому тільки один.

До векторів будемо відносити й нульовий вектор, початок і кінець якого збігаються.

Нульовий вектор позначається $\vec{0}$. Його довжина дорівнює нулю. Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору, тому що він не має певного напряму. Всі нульові вектори рівні.

2.2. Лінійні операції над векторами

Означення. *Сумою* вектора $\overrightarrow{AB}$ й вектора $\overrightarrow{BC}$ називається вектор $\overrightarrow{AC}$*:* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Сумою вектора $\overrightarrow{AB}$ й довільного вектора $\overrightarrow{PQ}$ називається сума вектора $\overrightarrow{AB}$ й вектора $\overrightarrow{BC}$, рівного $\overrightarrow{PQ}$ (рис. 2.3) (правило трикутника).

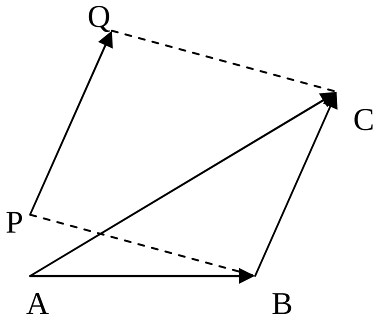


Рис. 2.3

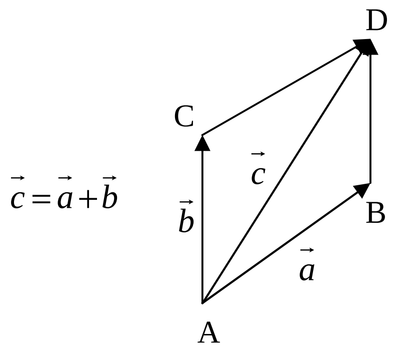


Рис. 2.4

За означенням для будь-якого вектора $\vec{a}$ й нульового вектора $\vec{0}$
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.
Якщо $\vec{a} = \vec{a}_1$, $\vec{b} = \vec{b}_1$ то $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$. Це випливає з означення суми векторів і рівності векторів.

Властивості додавання векторів.

1) *Сполучна властивість:* $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

2) *Переставна властивість*: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Додавання двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна виконувати за правилом паралелограма: вектори $\vec{a}$ й $\vec{b}$ відкладаються від однієї точки A (рис. 2.4) і будується паралелограм зі сторонами $\overrightarrow{AB}$ й $\overrightarrow{AC}$.Тоді $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$. .

Правило для побудови вектора суми: «з початку одного вектора в кінець іншого».

Вектором, *протилежним* вектору $\overrightarrow{AB}$, називається вектор $\overrightarrow{BA}$*:* $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. За означенням вектор, протилежний нульовому вектору, є нульовий вектор. Очевидно, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Різницею векторів $\vec{a}$ й $\vec{b}$ (позначається $\vec{a} - \vec{b}$) називається сума вектора $\vec{a}$ й вектора $-\vec{b}$, протилежного $\vec{b}$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Кутом між ненульовими векторами $\overrightarrow{AB}$ й $\overrightarrow{AC}$ називається кут *BAC*. *Кутом між будь-якими двома векторами* $\vec{a}$ *й* $\vec{b}$ *називається кут між рівними їм векторами із загальним початком*. Кут між однаково напрямленими векторами вважається рівним нулю.

Таким чином, якщо φ – градусна міра кута між векторами $\vec{a}$ й $\vec{b}$, $0^0 \le \varphi$

$\le \le 180^0$. Означення. *Добутком ненульового вектора* $\vec{a}$ *на дійсне число* $\lambda \ne 0$ *називається вектор, довжина якого дорівнює добутку довжини вектора* $\vec{a}$ *на модуль числа* λ, *а напрям збігається з напрямом вектора* $\vec{a}$ *при* $\lambda > 0$ *і протилежно напряму* $\vec{a}$ *при* $\lambda < 0$.

Добуток вектора $\vec{a}$ на число λ позначається $\lambda\vec{a}$ (числовий множник пишеться ліворуч). За означенням

$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| . |\vec{a}|$.

Якщо вектор $\vec{a}$ – нульовий або число λ дорівнює нулю, то покладають

$\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ для будь-якого числа λ,

$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$.

Властивості множення вектора на число.

1) *Сполучна властивість:* $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$.

2) *Перша розподільна властивість:* $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a} = (\lambda+\mu)\vec{a}$.

3) *Друга розподільна властивість:* $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$.

Теорема. *Ненульові вектори* $\vec{a}$ *й* $\vec{b}$ *колінеарні тоді й тільки тоді, коли існує таке число* λ, *що* $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

2.3. Координати вектора

Вектор, довжина якого прийнята за одиницю виміру довжини, називають *одиничним*. Позначимо через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ одиничні вектори, відкладені від точки *O* в додатних напрямах на осях *Ox*, *Oy*, *Oz* прямокутної системи координат.

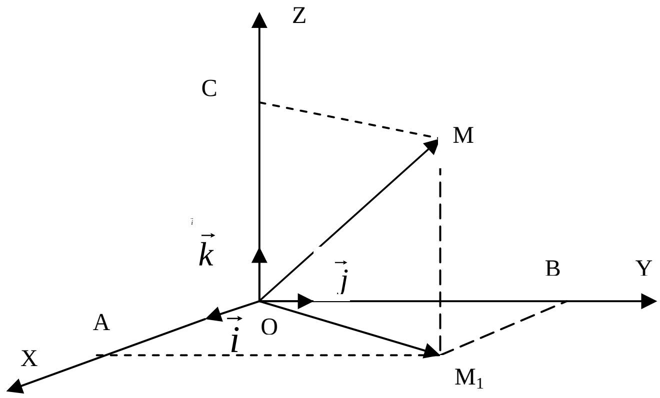


Рис. 2.5

Одиничні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, де $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$ й ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$), що мають напрями додатних координатних півосей, називаються *координатними векторами* або *ортами*.

Теорема 1 (про розкладання вектора по осях координат).

Кожен вектор $\vec{a}$ *можна представити у вигляді:*

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (2.3.1)$$

і *притім єдиним чином*.

Якщо вектор $\vec{a}$ представлений у вигляді (2.3. 1), то говорять, що вектор $\vec{a}$ розкладений по векторах $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Вектори $a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$ і $a_z\vec{k}$ називають *складовими вектора* $\vec{a}$ *по осях* Ox, Oy й Oz. Коефіцієнти a_x, a_y, a_z – розкладання вектора $\vec{a}$ по одиничних векторах $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ називають *координатами вектора* $\vec{a}$ в даній системі координат Oxy й записують $\vec{a}$ $(a_x; a_y; a_z)$. Тоді $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

З єдності розкладання випливає, що рівні вектори мають рівні відповідні координати, і, обернено, якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні.

Нехай дана точка $M(x; y;z)$. (рис. 2.5) Тоді

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \text{– це радіус-вектор точки } M \tag{2.3.2}$$

де x, y, z – координати точки M, тобто $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$, $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.

Формула (2.3.2) представляє собою розкладання вектора $\overrightarrow{OM}$ *по векторах* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Числа x, y, z, що є проекціями вектора $\overrightarrow{OM}$, *називаються координатами вектора* $\vec{r}$ *:*

$x = np_{ox}\vec{r}, \quad y = np_{oy}\vec{r}, \quad z = np_{oz}\vec{r},$

Теорема 2. *Кожна координата суми векторів* $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ *і* $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ *дорівнює сумі відповідних координат цих векторів; кожна координата добутку вектора* $\vec{a}$ *на число* λ *дорівнює добутку відповідної координати цього вектора на число* λ.

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \leftrightarrow \vec{c} = (\lambda a_1 + \mu b_1)\vec{i} + (\lambda a_2 + \mu b_2)\vec{j} + (\lambda a_3 + \mu b_3)\vec{k}$$

Теорема 3. *У колінеарних векторів відповідні координати пропорційні. І обернено, якщо у двох векторів відповідні координати пропорційні, то вектори колінеарні.*

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \leftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a} \leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda .$$

Якщо $\lambda>0$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ *– вектори однаково напрямлені; якщо* $\lambda<0$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ *– вектори протилежно напрямлені.*

З означення колінеарних векторів випливає, що два вектори колінеарні в тім і тільки тім випадку, якщо один з них може бути отриманий множенням іншого на деяке число λ, тобто

$$\vec{a} = \lambda\vec{b}. \tag{2.3.3}$$

Нехай вектори $\vec{a}$ й $\vec{b}$ задані своїми координатами, тобто $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, тоді векторна рівність (2.3. 3) еквівалентна трьом числовим: $x_1 = \lambda x_2, \quad y_1 = \lambda y_2, \quad z_1 = \lambda z_2$, з яких випливає

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{2.3.4}$$

Таким чином, вектори *колінеарні*, якщо їхні *координати пропорційні*.

2.4. Ділення відрізка в даному відношенні

Якщо $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ і $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$– кінці відрізка M_1M_2, а точка $M(x,y,z)$ ділить цей відрізок у відношенні $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$, то координати цієї точки

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\ (\lambda \neq -1). \tag{2.4.1}$$

Зокрема, якщо $M(x, y,z)$ – середина відрізка M_1M_2, то $\lambda=1$ й $x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Приклад 1. Задано точки $A(2;-3;1)$ і $B(12;7;11)$. Знайти точку $M(x,y,z)$, що ділить відрізок BA у відношенні $\frac{BM}{MA} = \frac{1}{3}$.

Розв'язання. Вважаючи точку B початковою точкою відрізка, знаходимо:

$$x = \frac{12 + \frac{1}{3}\cdot 2}{\frac{4}{3}} = \frac{19}{2},\quad y = \frac{7 - \frac{3}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{2},\quad z = \frac{11 + \frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{4}{3}} = \frac{17}{2}.$$

Відповідь: $M\left(\frac{19}{2}; \frac{9}{2}; \frac{17}{2}\right)$.

Приклад 2. Задано точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. За допомогою векторів виразити координати точки M, що ділить відрізок AB навпіл (рис. 2.6).

Розв'язання. Радіуси-вектори точок A і B: $\overrightarrow{OA} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2; y_2; z_2)$. За правилом додавання векторів $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$.

Тому що $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OC}}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ тобто $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

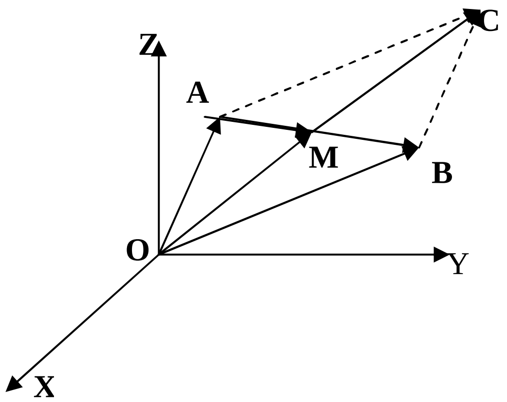


Рис. 2.6.

2.5. Напрямні косинуси. Орт вектора

Модуль вектора, заданого своїми координатами (*x,y,z*), обчислюється за формулою: $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; *напрямні косинуси* (тобто косинуси кутів, які вектор $\vec{a}$ становить із додатними напрямами відповідних осей координат):

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|}, \cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}, \quad \text{причому} \quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Орт вектора визначається як $\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Очевидно, що напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ є координатами орта цього вектора $\vec{a}^0$.

Приклад. Нехай *A(1; 2; 0), B(3; 1; -2)*. Знайти напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язання. Координати вектора $\overrightarrow{AB}$ визначаються так: *x=3-1=2; y=1-2=-1; z=-2-0=-2,*

Тобто вектор $\overrightarrow{AB}=(2;-1;-2)$, його довжина $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=3$; напрямні косинуси: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{1}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$.

2.6. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів називається число рівне добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

$(\vec{a}\,\vec{b})=\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, де $0\le\varphi\le\pi$.

Проекція вектора $\vec{b}$ *на на вісь, визначену вектором* $\vec{a}$, *дорівнює* $np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\varphi$. *Звідси випливає, що скалярний добуток* $(\vec{a}\vec{b})=|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\vec{b}$ *або* $(\vec{a}\vec{b})=|\vec{b}|\,np_{\vec{b}}\vec{a}$.

Властивості скалярного добутку:

1. Скалярний добуток ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли множники перпендикулярні.
2. Скалярний добуток двох ненульових векторів додатний, якщо вектори становлять гострий кут, від'ємний, якщо вектори становлять тупий кут.
3. Скалярний добуток не змінюється від перестановки співмножників.
4. $(\vec{a}\vec{a})=|\vec{a}|^2$. $\rightarrow$ $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a}\vec{a})}$.

Отже, модуль вектора дорівнює кореню квадратному зі скалярного добутку вектора на себе.

5. Скалярний множник можна виносити за знак скалярного добутку: $(\alpha\vec{a},\vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b})$.

6. Дистрибутивність додавання векторів стосовно скалярного множення на вектор:

$((\vec{a}+\vec{b}),\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$

Вираз скалярного добутку в декартових прямокутних координатах через компоненти співмножників.

Нехай $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\quad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, тоді $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Косинус кута між векторами через їхні компоненти знаходиться за формулою:

$$cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів: $(\vec{a},\vec{b})=0$ або $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

Зокрема, на площині *X0Y :*

$\vec{a}=(x_1,y_1),\ \vec{b}=(x_2,y_2),$

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2},\ |\vec{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2},\ cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

Приклад 1. Задано три точки на площині A(1;2), B(2;2), C(1,5;2,5). Знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$.

Розв’язання. Знаходимо

$$\overrightarrow{AB}=(2-1;2-2)=(1;0),\ \overrightarrow{AC}=(1,5-1;2,5-2)=(0,5;0,5),$$

Тоді:

$$cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\sqrt{1^2+0^2}\cdot\sqrt{0,5^2+0,5^2}}=\frac{0,5}{\sqrt{0,5}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Приклад 2. Обчислити скалярний добуток.

$(2\vec{m}+3\vec{n})\cdot(4\vec{m}-6\vec{n})$, де $\vec{m}$ й $\vec{n}$ − одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

Розв’язання.

Знаходимо, використовуючи властивості скалярного добутку.

$(2\vec{m}+3\vec{n})\cdot(4\vec{m}-6\vec{n})=$

$2\cdot4(\vec{m}\vec{m})+3\cdot4(\vec{n}\vec{m})-2\cdot6(\vec{m}\vec{n})-3\cdot6(\vec{n}\vec{n})=8\cdot1+12\cdot0-12\cdot0-18\cdot1=-10,$

де $(\vec{m},\vec{m})=(\vec{n},\vec{n})=1,(\vec{m},\vec{n})=(\vec{n},\vec{m})=0$.

Приклад 3. При якому значенні α вектори $\vec{a}=(2;-3;4),\vec{b}=(\alpha;-6;8)$ паралельні?

Розв’язання. Вектори паралельні, якщо їхні координати пропорційні, тобто:

$\frac{\alpha}{2}=\frac{-6}{-3}=\frac{8}{4}$. Звідси знаходимо: $\alpha=4$.

Приклад 4.

Дано: $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=5,(\vec{a},\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$. Знайти, при якому значенні α вектори

$\vec{p}=\alpha\vec{a}+17\vec{b}$ і $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярні.

Розв’язання.

Умова перпендикулярності векторів: $\vec{p}\vec{q}=0$. Звідси

$\vec{p}\vec{q} = (\alpha\vec{a} + 17\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b}) = 3\alpha(\vec{a}, \vec{a}) + 17 \cdot 3(\vec{b}, \vec{a}) -$

$\alpha(\vec{a}, \vec{b}) - 17(\vec{b} \cdot \vec{b}) = 3\alpha|\vec{a}|^2 + 51|\vec{b}||\vec{a}|\cos\frac{2\pi}{3} - \alpha|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{2\pi}{3} - 17|\vec{b}|^2 =$

$3\alpha \cdot 4 + (51 - \alpha) \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 17 \cdot 25 = 0 \Rightarrow \alpha = 40.$

Приклад 5. Вектори $\vec{a}$ й $\vec{b}$ утворюють кут 120^0, $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Розв'язання.

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2} =$

$\sqrt{|\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^0 + |\vec{b}|^2} = \sqrt{9 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 25} = \sqrt{9 + 15 + 25} = \sqrt{49} = 7$.

Приклад 6. При якому значенні α вектори $\vec{a} = (1; \alpha; -2)$ й $\vec{b} = (\alpha; 3; -4)$ перпендикулярні?

Розв'язання.

Обчислимо скалярний добуток векторів і прирівняємо його до нуля.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot \alpha + \alpha \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) = 4\alpha + 8 = 0$,

звідси знаходимо α=-2.

Приклад 7. Задано три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Довести, що вектор $\vec{d} = (\vec{b}, \vec{c})\vec{a} - (\vec{a}, \vec{c})\vec{b}$ перпендикулярний вектору $\vec{c}$.

Розв'язання.

Умова перпендикулярності векторів − рівність нулю їхнього скалярного добутку. Помножимо скалярно вектор $\vec{d}$ на $\vec{c}$ й, у силу властивостей скалярного добутку, одержимо:

$\vec{d} \cdot \vec{c} = ((\vec{b}, \vec{c})\vec{a} - (\vec{a}, \vec{c})\vec{b})\vec{c} = (\vec{b}, \vec{c})(\vec{a}, \vec{c}) - (\vec{a}, \vec{c})(\vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Приклад 8. Знайти вектор $\vec{a}$, колінеарний вектору $\vec{b} = (2; -1; 0)$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$.

Розв'язання.

Вектор $\vec{a} = \lambda\vec{b} = \lambda(2; -1; 0)$ (оскільки колінеарні), тоді їхній скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda(2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0) = 5\lambda = 10$.

Звідси знаходимо: *λ=2,* $\vec{a}$ *=2(2; -1; 0) =(4; -2; 0).*

Приклад 9. Вектор $\vec{b} \parallel \vec{a}$, де $\vec{a}$ =(8; -10; 13) і утворює з віссю *OZ* гострий кут. Знаючи, що $|\vec{b}| = \sqrt{37}$, знайти його координати.

Розв'язання.

З умови колінеарності вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $\vec{b} = (8\lambda; -10\lambda; 13\lambda)$, при цьому повинна виконуватися умова *13λ>0,* тобто, *λ>0* (вектор $\vec{b}$ утворює з віссю *OZ* гострий кут). Модуль вектора $\vec{b}$ дорівнює

$|\vec{b}| = \sqrt{\lambda^2(8^2 + (-10)^2 + 13^2)} = |\lambda|\sqrt{64 + 100 + 169} = |\lambda|\sqrt{333} = |\lambda|\sqrt{9 \cdot 37} = \sqrt{37}$, звідси:

$|\lambda| = \frac{1}{3}, \lambda = \pm\frac{1}{3}.$ Беремо $\lambda = \frac{1}{3}$ (за умовою λ>0). Виходить, $\vec{b} = \left(\frac{8}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{13}{3}\right).$

Приклад 10. Задано три вектори $\vec{a} = (3;-1), \vec{b} = (1;-2), \vec{c} = (-1;7).$ Знайти розкладання вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по векторах $\vec{a}$ й $\vec{b}$.

Розв'язання. За правилом додавання векторів маємо: $\vec{p}$ = (3+1-1; -1-2+7)=(3; 4)

Розкласти вектор $\vec{p}$ по векторах $\vec{a}$ й $\vec{b}$ означає: знайти α і β такі, що буде виконуватися рівність $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Два вектори рівні, якщо рівні їхні відповідні компоненти:

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 3 \\ -\alpha - 2\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2; \quad \beta = -3.$$

Отже, $\vec{p} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{b}$.

Приклад 11. Задано: $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 2, \quad \vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c}, \quad (\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = 120^0$.

Знайти $(2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c})(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c})$

Розв'язання.

Використовуючи означення й властивості скалярного добутку, одержимо:

$$(2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c})(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) =$$

$$= 2|\vec{a}|^2 + 3\vec{b}\vec{a} - \vec{c}\vec{a} - 4\vec{a}\vec{b} - 6|\vec{b}|^2 + 2\vec{c}\vec{b} + 6\vec{a}\vec{c} + 9\vec{b}\vec{c} - 3|\vec{c}|^2 =$$

$$= 2|\vec{a}|^2 - \vec{a}\vec{b} + 5\vec{a}\vec{c} + 11\vec{b}\vec{c} - 6|\vec{b}|^2 - 3|\vec{c}|^2 =$$

$$= 2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot \cos 90^0 + 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 90^0 + 11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 120^0 - 6 \cdot 3^2 - 3 \cdot 2^2 = -67$$

Приклад 12. Задано: $|\vec{m}| = 4, |\vec{n}| = 3, \quad (\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 60^0$.

Знайти величину кута між векторами $\vec{m} - \vec{n}$ й $\vec{m} + \vec{n}$.

Розв'язання.

Використовуючи скалярний добуток, знаходимо

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{m} - \vec{n})(\vec{m} + \vec{n})}{|\vec{m} - \vec{n}||\vec{m} + \vec{n}|}.$$

Обчислюємо $(\vec{m} - \vec{n})(\vec{m} + \vec{n}) = |\vec{m}|^2 - |\vec{n}|^2 = 4^2 - 3^2 = 7$;

$$|\vec{m} - \vec{n}| = \sqrt{(\vec{m} - \vec{n})(\vec{m} - \vec{n})} = \sqrt{|\vec{m}|^2 - 2\vec{n}\vec{m} + |\vec{n}|^2} = \sqrt{16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^0 + 9} = \sqrt{13};$$

$$|\vec{m} + \vec{n}| = \sqrt{(\vec{m} + \vec{n})(\vec{m} + \vec{n})} = \sqrt{|\vec{m}|^2 + 2\vec{n}\vec{m} + |\vec{n}|^2} = \sqrt{16 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^0 + 9} = \sqrt{37};$$

$$\cos\varphi = \frac{7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{37}} = \frac{7}{\sqrt{481}}, \text{ звідки } \varphi = \arccos\frac{7}{\sqrt{481}}.$$

2.7. Векторний добуток

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що задовольняє умовам:

1) *перпендикулярний обом векторам-співмножникам $\vec{a}$ й $\vec{b}$,*

2) *якщо дивитися з його кінця, то найкоротший поворот на кут φ від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ відбувається проти годинникової стрілки, тобто трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є правою.*

3) *модуль векторного добутку дорівнює $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$.*

Векторний добуток позначається $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ або $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

Модуль векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ й $\vec{b}$:

$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ або $S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$.

Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ й $\vec{b}$: $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Основні властивості векторного добутку:

1.2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$; $\alpha\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\alpha\vec{b}\right)$; 3. $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Векторний добуток через координати векторів-співмножників виражається як

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Необхідною й достатньою умовою колінеарності векторів є рівність нулю їхнього векторного добутку.

Приклад 1. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$ й $\vec{b} = 5\vec{m} - \vec{n}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості векторного добутку, одержимо:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[2\vec{m} + 3\vec{n}, 5\vec{m} - \vec{n}\right] = \left[2\vec{m}, 5\vec{m}\right] + \left[3\vec{n}, 5\vec{m}\right] - \left[2\vec{m}, \vec{n}\right] - \left[3\vec{n}, \vec{n}\right].$$

Оскільки $\left[2\vec{m}, 5\vec{m}\right] = 0$, $\left[3\vec{n}, \vec{n}\right] = 0$, $\left[\vec{m}, \vec{n}\right] = -\left[\vec{n}, \vec{m}\right]$, одержимо

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = 15\left[\vec{n}, \vec{m}\right] + 2\left[\vec{n}, \vec{m}\right] = 17\left[\vec{n}, \vec{m}\right].$$

Приклад 2. Задані 3 вершини паралелограма *A(1;-1;2); B(5;-6;2); C(1;3;-1)*. Знайти його площу.

Розв'язання.

Площа $S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$, $\overrightarrow{AB} = (4; -5; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 4; -3)$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 12\vec{j} - 16\vec{k};$$

$$S = \sqrt{15^2 + 12^2 + (-16)^2} = \sqrt{625} = 25(\textit{кв. од.}).$$

Приклад 3. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{m}+\vec{n}$ й $\vec{b}=2\vec{m}-\vec{n}$,

якщо $\left|\vec{m}\right|=2, \left|\vec{n}\right|=1, \widehat{\vec{m}\vec{n}}=\dfrac{\pi}{6}$.

Розв'язання. $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$,

$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{m}+\vec{n},2\vec{m}-\vec{n}\right]=\left[\vec{m},2\vec{m}\right]+\left[\vec{n},2\vec{m}\right]-\left[\vec{m},\vec{n}\right]-\left[\vec{n},\vec{n}\right]$. Оскільки

$\left[\vec{m},2\vec{m}\right]=0,\quad \left[\vec{n},\vec{n}\right]=0,\quad \left[\vec{m},\vec{n}\right]=-\left[\vec{n},\vec{m}\right]$, то $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=2\left[\vec{n},\vec{m}\right]+\left[\vec{n},\vec{m}\right]=3\left[\vec{n},\vec{m}\right]$

$S_\Delta=\dfrac{1}{2}\cdot\left|3\left[\vec{n},\vec{m}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\left|\vec{n}\right|\left|\vec{m}\right|\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ (кв. од.).

2.8. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число, отримане в результаті скалярного множення одного з даних векторів на векторний добуток двох інших:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

Властивості:

1. $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)=-\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right).$
2. $\left(\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}\right)=\alpha_1\left(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}\right)+\alpha_2\left(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}\right)$ – властивість лінійності.
3. *Модуль мішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто* $V=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$.

Об'єм трикутної піраміди дорівнює $V=\dfrac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$.

4. *Якщо вектори задані своїми координатами в ортогональній системі координат:*

$\vec{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right);\quad \vec{b}=\left(x_2;y_2;z_2\right);\quad \vec{c}=\left(x_3;y_3;z_3\right)$, *то мішаний добуток можна знайти за формулою:*

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

З означення мішаного добутку випливає, що необхідною й достатньою умовою компланарності векторів є рівність нулю їхнього мішаного добутку:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0 \text{ або } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Приклад 1. Обчислити мішаний добуток векторів:

$\vec{a}=(2;-1;3),\quad \vec{b}=(1;4;-2),\quad \vec{c}=(-3;2;5)$.

Розв'язання. $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ =40+6-6+36+8+5=89.

Приклад 2. Задано вершини піраміди A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;2). Знайти її об'єм і довжину висоти, опущеної з вершини D.
Розв'язання.
Об'єм піраміди дорівнює
$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)\right|$; або $V=\frac{1}{3}S_{осн.}H\Rightarrow H=\frac{3V}{S_{осн.}}$.

$S_{осн.}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$. Знаходимо $\overline{AB}=\left(2;-2;-3\right),\overline{AC}=\left(4;0;6\right)$, $\overline{AD}=\left(-7;-7;1\right)$,

$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -14 & -7 & 1 \end{vmatrix}=260$. Тоді $V=\frac{1}{6}260(куб.\,од.)$.

$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}$;

$S_{осн.}=2\sqrt{9+36+4}=2\cdot 7=14(кв.\,од.)$; $H=\frac{3\cdot 260}{6\cdot 14}=\frac{65}{7}$ (од. довж.)

Приклад 3. Чи лежать точки *A(3;-1;2), B(-2;2;5), C(1;4;2), D(0;1;-2)* в одній площині?

Розв'язання. Якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ компланарні, то точки *A, B, C, D* лежать в одній площині.

У цьому випадку мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$=(-5; 3; 3), $\overrightarrow{AC}$=(-2; 5; 0) і $\overrightarrow{AD}$=(-3; 2; -4) повинен рівнятися нулю. Знаходимо мішаний добуток

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ =100-12+0+45-24=109≠0.

Виходить, вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ некомпланарні й, отже, точки *A, B, C, D* не лежать в одній площині.

2.9. Лінійний *n*-мірний простір

Множина R елементів x,y,...,z,... називається лінійним простором, якщо для будь-яких двох його елементів x й y визначена сума x+y R і для кожного елемента $x\in R$ й дійсних чисел α і β визначений добуток $\alpha\cdot x\in R$ так, що виконані наступні умови(аксіоми лінійного простору).

1. $x+y=y+x;\forall x,y\in R$;
2. $(x+y)+z=x+(y+z);\forall x,y,z\in R$;
3. *Існує такий (нульовий) елемент $O\in R$, що $x+O=x,\forall x\in R$;*
4. *Для кожного елемента $x\in R$ існує такий елемент -x (називаний*

протилежним до x), що x+(-x)=0;

5. $1\cdot x = x$, $\forall x \in R$;
6. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y, \forall x, y \in R$;
7. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x, \forall x \in R$;
8. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall x \in R$.

Приклад 1. Множина всіх функцій однієї незалежної змінної *x*, визначених і неперервних на відрізку $[a,b]$ є лінійним простором. Це випливає з того, що будь-яким двом функціям $f_1(x)$ і $f_2(x)$ із цієї множини можна зіставити їхню суму $f_1(x)+f_2(x)$, що також визначена й неперервна на $[a,b]$ й, отже, буде належати цій множині. Добуток $\alpha \cdot f_1(x)$ – теж неперервна функція на $[a,b]$. Всі інші аксіоми лінійного простору також виконуються. Роль нуля грає функція, тотожно рівна нулю.

Приклад 2. Упорядкована сукупність *n* чисел представляє *n-мірний* вектор $\vec{a}$: $\vec{a} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

- *Два n-мірних вектори рівні тоді й тільки тоді, коли рівні їхні відповідні компоненти, тобто* $\vec{a} = \vec{b}$ *, якщо* $x_i = y_i$; $i = \overline{1,n}$.
- *Під сумою двох векторів однакової розмірності* n *розуміють такий третій вектор, координати якого дорівнюють сумам відповідних координат векторів-доданків:* $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.
- *Під добутком вектора на число* α *розуміють вектор* $\alpha\vec{a} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

Множину *n-мірних* векторів, над якими встановлені операції додавання й множення на число, що задовольняють наведеним вище аксіомам лінійного простору, називають *n-мірним векторним лінійним простором* R^n.

Зокрема, R^1 є сукупність *дійсних чисел*; R^2 – сукупність *векторів на площині*; R^3 – сукупність *векторів у просторі*.

2.10. Лінійна залежність векторів

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n$ *векторного простору R називається сума добутків цих векторів на довільні дійсні числа* $\alpha_i; i = \overline{1,n}$:

$$\vec{a}_n = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\vec{a}_{n-1} + \alpha_n\vec{a}_n.$$

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *називаються лінійно незалежними, якщо їхня лінійна комбінація дорівнює нулю:* $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ *тільки при всіх* $\alpha_i = 0 \left(i = \overline{1,n}\right)$. *Вектори лінійно залежні, якщо їхня лінійна комбінація дорівнює нулю при хоча б одному із чисел* $\alpha_i \neq 0$. Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ лінійно залежні, то, принаймні, один з них можна представити у вигляді лінійної комбінації інших. Наприклад, нехай $\alpha_1 \neq 0$, тоді $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{a}_n$, тобто вектор $\vec{a}_1$ є лінійною комбінацією інших *(n-1)* векторів. На площині будь-які три вектори лінійно залежні; у просторі чотири вектори лінійно залежні. Максимальне число незалежних векторів на площині дорівнює двом, у просторі − трьом. Прикладом лінійно незалежних векторів на площині є два неколінеарних вектори; у просторі − три некомпланарних вектори.

Лінійний простір R називається n-мірним, якщо в ньому існує n лінійно незалежних векторів, а будь-які (n+1) векторів є лінійно залежними. Інакше кажучи, *розмірність простору – це максимальне число лінійно незалежних векторів, що містяться в ньому*. Розмірність простору *R* позначається: $n = \dim(R)$.

Будь-які n лінійно незалежних векторів утворюють базис n-мірного простору.

Розглянемо рівність $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0,$ де

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

У координатній формі наведена рівність запишеться у вигляді однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \ldots + \alpha_n a_{1n} = 0 \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \ldots + \alpha_n a_{2n} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \ldots + \alpha_n a_{nn} = 0 \end{cases}$$

Якщо ранг матриці $r=n$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ й вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ лінійно незалежні. Якщо $r < n,$ то хоча б один з векторів $\vec{a}_i$ є лінійна комбінація інших (оскільки система має нескінченну множину розв'язків), вектори лінійно залежні.

Приклад 3. Задано вектори $\vec{a}_1 = (1;2;3); \vec{a}_2 = (-2;1;-1); \vec{a}_3 = (3;2;-1)$. Показати, що вектори лінійно незалежні.

Запишемо $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = 0,$ або $\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Одержимо систему рівнянь $\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$

Матриця системи $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

$r(A)=3$, бо $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$, значить, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Система векторів лінійно незалежна.

Приклад. Нехай $\vec{a}_1 = (1;2;-3); \vec{a}_2 = (-1;2;4); \vec{a}_3 = (1;6;-2)$, розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.;\ r(A)=2,\ \text{де}\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Система має нескінченну множину розв'язків, оскільки $r<n$. Вектори лінійно залежні.

2.11. Розкладання вектора по заданому базису

Нехай вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ лінійно незалежні, тобто утворюють базис n-мірного простору.

Теорема. *Кожен вектор* $\vec{X}$ *лінійного простору R можна представити, і притім єдиним способом, у вигляді лінійної комбінації векторів базису:* $\vec{X} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$. Таке представлення називається *розкладанням вектора по базису* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, а коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ − *координатами вектора* $\vec{X}$ в цьому базисі.

Для визначення коефіцієнтів розкладання дана рівність записується в координатній формі. Одержимо систему лінійних неоднорідних рівнянь щодо невідомих $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.Розв'язуючи її, знайдемо коефіцієнти розкладання вектора $\vec{X}$ по базису.

Приклад. Показати, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворять базис і знайти розкладання $\vec{b}$ по даному базису: $\vec{a}_1 = (1;-1;2), \vec{a}_2 = (2;2;-1), \vec{a}_3 = (2;1;0), \vec{b} = (3;7;-7)$.

Розкладемо вектор $\vec{b}$ по векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$: $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3$.

Розв'яжемо систему відносно методом повного виключення.

$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{b}$	
1	2	2	3	
-1	2	1	7	$e_2 + e_1 \to e_2$
2	-1	0	-7	$e_3 + e_1(-2) \to e_3$
1	2	2	3	
0	4	3	10	$e_2 + e_3 \to e_2$
0	-5	-4	-13	
1	2	2	3	$e_2 \cdot 2 + e_1 \to e_1$
0	-1	-1	-3	
0	4	3	10	$e_2 \cdot 4 + e_3 \to e_3$
1	0	0	-3	

$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{b}$	
0	1	1	3	$e_3 + e_2 \to e_2$
0	0	-1	-2	
1	0	0	-3	
0	1	0	1	
0	0	1	2	

Як видно з розв'язку, ранг матриці системи дорівнює 3, отже, вектори лінійно незалежні й утворюють базис. Розв'язок системи $\alpha_1 = -3; \alpha_2 = 1; \alpha_3 = 2$. Виходить, $\vec{b} = -3\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$ – розкладання вектора $\vec{b}$ по базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Контрольні завдання до розділу 2

Завдання 1

2.1.1. Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

a) $\vec{a}$=(-2;3;1), $\vec{b}$=(5;7;-4);

b) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

2.1.2. При якому α вектори $\vec{l}$=(6; α;-8) і $\vec{m}$=(-3;-1;4) паралельні?

2.1.3. Знайти кут між векторами $\vec{a}$=(-1;2;-2) і $\vec{b}$=(6;3;-6).

2. 1.4. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{a}+\vec{b}$,якщо $\vec{a}$=(1;2;1) і $\vec{b}$=(2;-1;0).

2.1.5. При якому значенні х вектори $\vec{a}$=(x;3;4) і $\vec{b}$=(5;6;3) перпендикулярні?

2.1.6. Задані вектори $\vec{a}$=(2;3;-5), $\vec{b}$=(3;0;1) і $\vec{c}$=(4;-3;2). Знайти координати і довжину вектора $\vec{d}=3\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

2.1.7. Знайти (у градусах) кут між векторами $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$.

2.1.8. Знайти кут між векторами 2$\vec{a}$ і $\vec{b}$ /2, якщо $\vec{a}$=(-4;2;4), $\vec{b}=(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$.

2.1.9. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$, обчислити (3-2$\vec{b}$)($\vec{a}$+2$\vec{b}$).

2.1.10. Задані чотири точки: *A(-2;-3;8), B(2;1;7), C(1;4;5), D(-7;-4;7).* Чи будуть колінеарні вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$?

2.1.11. Знайти вектор $\vec{b}$=(x,y, z), колінеарний вектору $\vec{a}$=(2$\sqrt{2}$;-1; 4), якщо $|\vec{b}|=10$.

2.1.12. Знайти косинус кута між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$, що задовольняють системі рівнянь $\vec{p}+2\vec{q}=\vec{b}$, $2\vec{p}+\vec{q}=\vec{a}$, якщо відомо, що в прямокутній системі координат $\vec{a}=(1;1)$ $\vec{b}=(1;1)$.

2.1.13. Вектор $\vec{x}$ задовольняє наступним умовам : a) $\vec{x}$ колінеарний $\vec{a}=6\vec{i}-8\vec{j}-7{,}5\vec{k}$; b) $\vec{x}$ утворює гострий кут з віссю OZ; c) $|\vec{x}|$=50.

Знайти координати вектора $\vec{x}$.

2.1.14. Задані два вектори $\vec{a}$ =(-1;1;1) і $\vec{b}$ =(2;0;1).

Знайти вектор, якщо відомо, що він лежить в площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перпендикулярний вектору $\vec{a}$ і $\vec{a} \cdot \vec{x}$ =7.

2.1.15. Задані вершини трикутника *A(3;2;-3),B(5;1;-1),C(1;-2;1).* Знайти його внутрішній кут при вершині *A*.

2.1.16. Довести, що точки А (-2;-3),В(-3;1),С(7;7),D(3;0) служать вершинами трапеції. Знайти довжину середньої лінії трапеції.

2.1.17 Трикутник заданий координатами своїх вершин А*(3;2;-3), B(5;1;-1)* і *C(1;-2;1)* .Знайти величину зовнішнього кута трикутника при вершині *A* і координати вектора $\vec{a}$, що має напрям вектора $\overrightarrow{AB}$, а довжину вектора $\overrightarrow{AC}$.

2.1.18. Задані три послідовні вершини паралелограма *ABCD: A(-3;-2;0), B(3;-3;1), C(5;0;2)* .Знайти четверту вершину D і кут між векторами $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$.

2.1.19. Трикутник заданий координатами своїх вершин *A(2;1;2), B(1;0;0),* $C(1+\sqrt{3};\sqrt{3};-\sqrt{6})$. Обчислити величини кутів трикутника і довжину медіани, проведеної до сторони ВС.

2.1.20. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектори $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}=5\vec{a}-4\vec{b}$ взаємно перпендикулярні?

2.1.21. Довести, що точки *A (3; 0), B (0; 1), C (2; 7), D (5; 6)* є вершинами прямокутника *ABCD*. Обчислити його площу.

2.1.22. Обчислити довжину вектора $2\vec{a}+3\vec{b}$, якщо $\vec{a}$ = (1; 1; -1), $\vec{b}$ = (2; 0; 0).

2.1.23. При якому значенні α кут між векторами $\vec{x}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ і $\vec{y}=\alpha\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ дорівнює $\arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}$?

2.1.24. Задані вектори $\vec{a}=(1;-1;3)$, $\vec{b}=(3;-5;6)$. Обчислити $np_{\vec{a}}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$.

2.1.25. Вектор $\vec{x}\perp\vec{b}=\left(\vec{i}-22\vec{y}-5\vec{k}\right)$ і утворює з віссю OY тупий кут. Знайти його координати, знаючи, що довжина вектора $\vec{x}$ рівна 14.

2.1.26. Довести, що сума векторів, що сполучають центр трикутника з його вершинами, рівна нулю.

2.1.27. Задані три точки А (2;1), В (3; -2), С (0; λ). При якому значенні λ дані точки лежать на одній прямій?

2.1.28. Точки А і В мають координати А (1; 2), В (7; 10). Знайти координати *(x; y)* точки, яка ділить відрізок АВ в відношенні 1:3, рахуючи від точки А.

2.1.29. Трикутник заданий координатами вершин А (2; $2\sqrt{3}$), В (0; 0), С(3; $\sqrt{3}$). Знайти кути трикутника АВС.

2.1.30. Заданий трикутник АВС : А (1; 2), В (-2; 3), С (2; 4). Точки M, N і P – середини сторін ВС, СА і АВ трикутника. Знайти координати векторів $\overrightarrow{NP}$ і $\overrightarrow{PM}$.

РОЗДІЛ 3

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

3.1. Поняття про рівняння ліній і поверхонь

3.1.1. Геометричні місця точок

Метод аналітичної геометрії полягає в тому, що геометричним об'єктам ставляться у відповідність рівняння (або системи рівнянь), що дозволяє геометричні об'єкти досліджувати алгебраїчними методами.

Для визначення положення точки на площині (у просторі) вводиться система координат.

У цей час відомі біля двадцяти різних систем координат, з яких найбільш уживаними є система прямокутних декартових координат, полярна, циліндрична і сферична системи координат.

Положення точки на площині визначається парою чисел x і y: $M(x,y)$; у просторі – трійкою чисел x,y і z: $M(x,y,z)$.

Означення 1: *Рівнянням лінії L у заданій системі координат на площині називається рівняння $F(x,y)=0$, якщо йому задовольняють координати точок лінії L і тільки вони.*

Приклад 1**.** Скласти рівняння кола в декартовій прямокутній системі координат радіуса R с центром у точці $O(a;b)$.

Розв’язання:

Коло є геометричне місце точок, що задовольняють умові $\left|\overrightarrow{OM}\right| = R$, де $M(x,y)$ – довільна точка кола, тоді $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, звідси одержимо $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ – шукане рівняння кола. Зокрема, якщо центр перебуває на початку координат, рівняння має вигляд: $x^2+y^2=R^2$.

Аналогічно, рівняння сфери із центром у точці $O(a,b,c)$ радіуса R має вигляд $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ або $x^2+y^2+z^2=R^2$

Означення 2: *Рівняння $F(x,y,z)=0$ називається рівнянням поверхні S у даній системі координат, якщо йому задовольняють координати точок поверхні S і тільки вони.*

Геометричне місце точок - це множина точок, що володіють деякою загальною ознакою.

Приклад 2. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок $M_1(3;2)$ і $M_2(2;3)$.

Розв’язання:

Нехай $M(x,y)$ – довільна точка шуканого геометричного місця точок.

За умовою $\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \left|\overrightarrow{M_2M}\right|$, де

$\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$, $\left|\overrightarrow{M_2M}\right| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$,

тоді $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$

або після спрощень
x^2-$6x+9+y^2$-$4y+4=x^2$-$4x+4+y^2$-$6y+9 \Rightarrow y$-$x=0$.
Це рівняння прямої.

Приклад 3. Точка M рухається так, що в довільний момент часу її відстань від точки $M_1(6;0)$ утроє більше відстані до точки $M_2(2/3;\ 0)$. Знайти траєкторію руху точки M.

Розв’язання:
За умовою $\left|\overrightarrow{M_1M}\right|=3\left|\overrightarrow{M_2M}\right|$. Виразимо відстані $\left|\overrightarrow{M_1M}\right|$ й $\left|\overrightarrow{M_2M}\right|$ через координати точок, тоді

$$\left|\overrightarrow{M_1M}\right|=\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}\ ,\quad \left|\overrightarrow{M_2M}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y-0)^2}$$

або $\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}=3\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y-0)^2}$,

що після спрощень дає: $x^2+y^2=4$.
Одержали рівняння кола радіуса $R=2$ із центром на початку координат.

Приклад 4. Скласти рівняння кола, якщо її центр знаходиться на початку координат і пряма $3x$-$4y+20=0$ є дотичною до кола.

Розв’язання. Точка $O(0;0)$– центр кола, отже, рівняння кола має вигляд $x^2+y^2=R^2$.

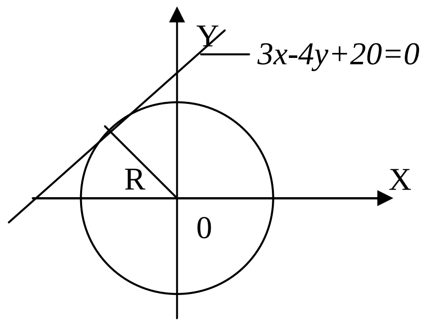


Рис. 3.1

Оскільки радіус кола в точці дотику перпендикулярний дотичній, його довжина дорівнює відстані від точки O(0;0) (Рис. 3.1) до прямої $3x$-$4y+20=0$, тобто $R=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 0+20|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{20}{5}=4$. Таким чином, рівняння кола $x^2+y^2=16$.

3.1.2. Полярна система координат

Полярна система на площині задана, якщо задано точку O, що називається полюсом і вихідний з полюса промінь ρ(або r), що називається полярною віссю.

Положення точки на площині в полярній системі координат визначається двома числами: радіусом $\rho=\left|\overrightarrow{OM}\right|$, що називається полярним радіусом точки M і виражає в даному масштабі відстань її від полюса, тобто довжину відрізка OM, і числом φ– полярним кутом між напрямом полярної осі й вектором $\overrightarrow{OM}$, відлічуваним у напрямі проти годинникової стрілки від полярної осі.

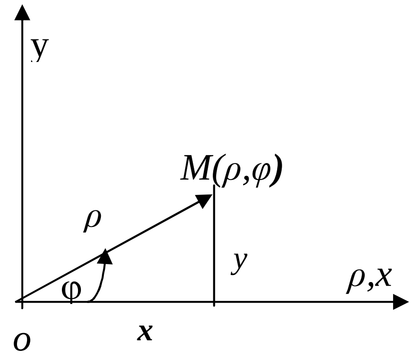


Рис. 3.2

Якщо вмовитися величину полярного радіуса вважати додатною, а полярний кут брати в межах $0 \le \varphi < 2\pi$, то кожній точці буде відповідати одна пара чисел ρ, φ. Можна обмежити зміну полярного кута умовами $-\pi < \varphi \le \pi$. Числа ρ і φ називають полярними координатами точки M (Рис. 3.2).

Полюсу O відповідає $\rho=0$; значення полярного кута для полюса невизначено. В інших точок $\rho>0$, а φ визначено з точністю до доданку кратного 2π. Це означає, що пари чисел (ρ,φ) і $(\rho,\varphi+2k\pi)$, де k – ціле число, є полярні координати однієї й тієї ж точки.

Зв'язок між декартовими й полярними координатами

Виберемо на площині декартову прямокутну систему координат, помістивши її початок у полюс O і прийнявши за вектори $\vec{i}$ й $\vec{j}$ вектори, напрямлені відповідно уздовж ρ і під кутом $\pi/2$ до ρ. Як видно з рис. 3.2 декартові координати x й y через полярні виразяться в такий спосіб: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

Вирази полярних координат через декартові:

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\dfrac{y}{x} = tg\varphi$; (для знаходження кута φ потрібно враховувати знаки x і y і визначити квадрант, у якому знаходиться точка).

Приклад 1. Дані декартові координати точки $M(-2; 2)$.
Знайти її полярні координати. (Рис. 3.3)

Розв'язання. $\rho = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $tg\varphi = \dfrac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ $(0 \le \varphi < 2\pi)$.

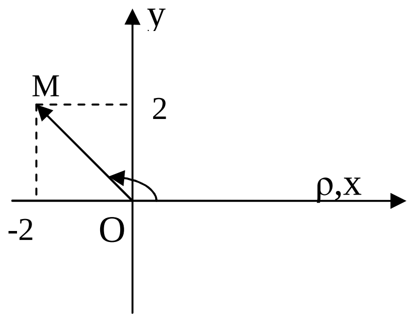


Рис. 3.3

Приклад 2. Скласти рівняння прямої в полярній системі координат.

Розв’язання.

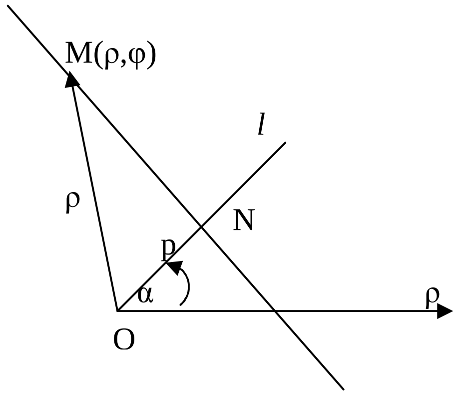


Рис. 3.4

Положення прямої на площині визначено, якщо задані її відстань p від полюса O і кут α між полярною віссю й променем l, що виходить із полюса перпендикулярно прямій (Рис. 3.4).

Очевидно, проекція $\overrightarrow{OM}$ на напрям l дорівнює p, тобто $пр_l\overline{OM} = p$.

Позначаючи через ρ і φ координати довільної точки M прямої, запишемо: $p=\rho cos(\varphi\text{-}\alpha)$, де кут $NOM=\varphi\text{-}\alpha$ або

$\rho = \dfrac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$ – це рівняння *прямої в полярних координатах*.

Зокрема, пряма $x=a$ у полярних координатах має рівняння $\rho cos\varphi=a$ або $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi}$, а пряма $y=b$ має рівняння $\rho sin\varphi=b$, звідки $\rho = \dfrac{b}{\sin\varphi}$ полярне рівняння цієї прямої.

Рівняння кола в полярних координатах

Приклад 3.

Записати рівняння кола $x^2 + y^2 = R^2$ (Рис. 3.5) у полярних координатах.

Розв’язання.

Оскільки $\rho^2 = x^2 + y^2$, то одержимо $\rho^2 = R^2 \Rightarrow \rho=R$ – шукане рівняння кола в полярних координатах (Рис. 3.6).

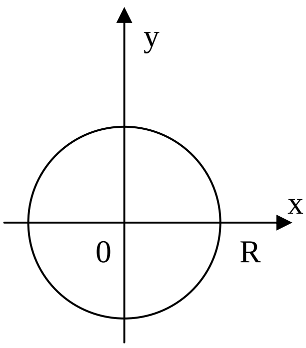


Рис. 3.5

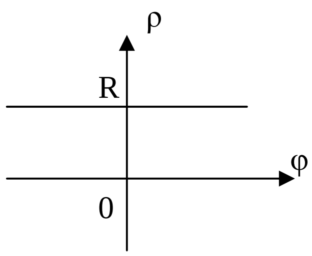


Рис. 3.6

Приклад 4. Скласти полярне рівняння кола, зображеного на рис.3.7.

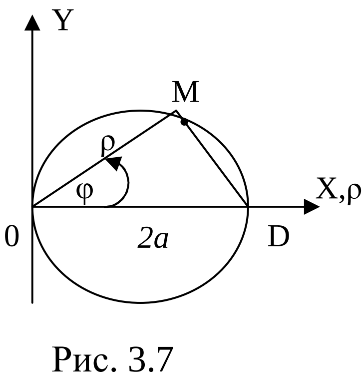


Рис. 3.7

Розв’язання. Нехай $M(\rho, \varphi)$ – довільна точка кола. З'єднаємо точку M з полюсом і з кінцевою точкою D діаметра, що проходить через полюс. $OM=\rho$, $<MOD=\varphi$, $OD=2a$.

Коло − це геометричне місце вершин прямих кутів, що опираються на його діаметр.

Отже, трикутник *OMD* – прямокутний. Звідси одержуємо $OM=OD\cdot \cos\varphi \Rightarrow$ $\rho=2a\cos\varphi$ – шукане рівняння кола.

3.2. Поверхні й лінії першого порядку. Площина й пряма

3.2.1. Площина

Поверхнею першого порядку *називається множина точок, координати яких у деякій декартовій системі координат задовольняють рівнянню*

$$Ax+By+Cz+D=0,\ де\ A^2+B^2+C^2\neq 0 \qquad (3.2.1)$$

Можна показати, що *поверхня першого порядку є площина* й, обернено: площина описується рівнянням виду (3.2.1), що називається *загальним рівнянням площини*.

Вектор $\vec{n}=(A,B,C)\neq 0$, перпендикулярний площині, називається *нормаллю* цієї площини.

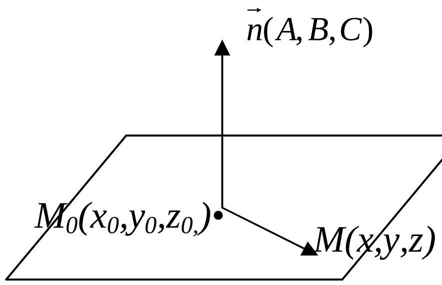


Рис. 3.8

Нехай задані нормальний вектор площини $\vec{n}=(A,B,C)$ і точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, що належить площини. Довільну точку площини позначимо *M(x, y, z)*, тоді вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ – довільний вектор, що належить цієї площини й ортогональний нормальному вектору $\vec{n}$. З умови ортогональності векторів (рівність нулю скалярного добутку), одержимо рівняння площини:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (3.2.2)$$

Рівняння (3.2.2) може бути приведене до виду:

$$Ax+By+Cz+D=0,\ (\text{де } D=-Ax_0-By_0-Cz_0), \qquad (3.2.3)$$

який називається *загальним рівнянням площини*.

Взаємне розташування площин

Взаємне розташування площин визначається взаємним розташуванням їх нормальних векторів.

1) *Кут* між площинами – це кут між їхніми нормальними векторами:

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}};.$$

2) Дві *площини* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ *паралельні*, якщо колінеарні їх нормалі, тобто виконуються умови:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$; зокрема, якщо площини збігаються, то: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

3) *Умова перпендикулярності* площин: $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Рівняння площини у відрізках на осях.

Рівняння (3.2. 1) у випадку, коли $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ можна записати у вигляді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{3.2.4}$$

де $a = -\frac{A}{D}, b = -\frac{B}{D}, c = -\frac{C}{D}$.– відрізки, що відтинаються площиною від осей координат. Отримане рівняння називається *рівнянням площини у відрізках на осях.*

Нормальне рівняння площини

Якщо як нормальний вектор узятий орт, тобто вектор одиничної довжини, то таке рівняння площини називається нормальним. З означення орта вектора випливає, що для переходу до нормального рівняння площини треба загальне рівняння площини розділити на $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, де $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = |\vec{n}|$.

Маємо норм*альне рівняння площини:*

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \tag{3.2.5}$$

Нормальним рівнянням площини зручно користуватися при обчисленні відстані від точки до площини.

Можна показати, *що відстань від т.* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *до площини дорівнює*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3.2.6}$$

Приклад 1**.** Скласти рівняння площини, що проходить через три точки. $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

Нехай $M(x,y,z)$ довільна точка, що належить шуканій площині.

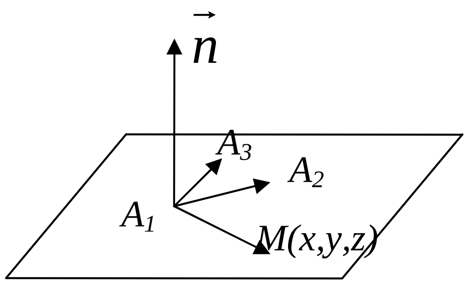


Рис. 3.9

Тоді вектори $\overrightarrow{A_1M}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ є компланарними, отже, їхній мішаний добуток дорівнює нулю, тобто ($\overrightarrow{A_1M}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}$) = 0 або в координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2.7}$$

Приклад 2. Знайти відстань між паралельними площинами

x-2y+3z+7=0 й *x-2y+3z-1=0.*

Для цього досить взяти будь-яку точку на одній із площин й обчислити її відстань до іншої площини. Візьмемо в другій площині точку з координатами (1;0;0) і підставимо їх у формулу для обчислення відстані від точки до площини

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|1\cdot 1-2\cdot 0+3\cdot 0+7\right|}{\sqrt{14}}=\frac{8}{\sqrt{14}}\ .$$

3.2.2. Пряма лінія на площині

Лінією першого порядку на площині називається множина точок, координати яких у деякій декартовій системі координат задовольняють рівнянню $Ax+By+C=0,$ де $A^2+B^2\neq 0$.

Можна показати, що всяка лінія першого порядку на площині є пряма й навпаки.

Загальне рівняння прямої на площині має вигляд:

$$Ax+By+C=0\,. \tag{3.2.8}$$

Рівняння прямої, що проходить через т. $M_0\left(x_0,y_0\right)$ із заданим нормальним вектором $\vec{n}=\left(A,B\right)$ до цієї прямої:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0$$

Рівняння прямої в «відрізках на осях».

Запишемо рівняння прямої в загальному виді $Ax+By+C=0$. Будемо вважати, що $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0$. Перетворимо вихідне рівняння: $Ax+By=-C$ $\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$. Позначимо $a=-\frac{C}{A}, b=-\frac{C}{B}$, тоді *рівняння прямої в «відрізках на осях»* має вигляд:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{3.2.9}$$

Рівняння прямої на площині можна розглядати, як окремий випадок рівняння площини.

Взаємне розташування прямих визначається взаємним розташуванням їхніх нормальних векторів.

1) *Кут* між прямими – це кут між їхніми нормальними векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\ ;$$

2) Дві прямі $A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0$ *паралельні*, якщо колінеарні їх нормалі, тобто виконуються рівності:

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$; зокрема, якщо збігаються, то: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$;

3) *Умова перпендикулярності прямих*: $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=A_1A_2+B_1B_2=0$.

3.2.3. Пряма в просторі й на площині

Пряма в просторі може бути задана як лінія перетину двох площин:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (3.2.10)$$

Це загальні рівняння прямої лінії в просторі.

Пряма лінія на площині й пряма в просторі визначаються точкою $M_0(x_0,y_0,z_0)$ й вектором $\vec{a}(m,n,p)$, колінеарним прямій, що називається *напрямним* вектором прямої (рис. 3.10).

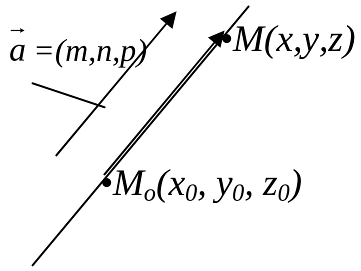


Рис. 3.10

Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка, що належить даній прямій. Напрямний вектор прямої $\vec{a}=(m,n,p)$ й вектор $\overrightarrow{M_0M}$ є колінеарними, тобто для них виконуються співвідношення:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad (3.2.11)$$

які називаються *канонічними* рівняннями прямої в просторі.

Зокрема, на площині маємо:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}\ . \qquad (3.2.11^*)$$

Якщо покласти $\frac{x-x_0}{m}=t,\ \frac{y-y_0}{n}=t,\ \frac{z-z_0}{p}=t$, то одержимо *параметричні* рівняння прямої в просторі:

$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases} \qquad (3.2.12)$$

і відповідно на площині:

$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \end{cases} \qquad (3.2.12^*)$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Якщо пряма проходить через дві точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ й $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то як напрямний вектор можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, тоді одержимо *рівняння прямої в просторі, що проходить через 2 точки.*

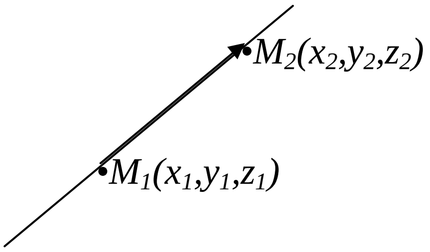


Рис. 3.11

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (3.2.13)$$

Аналогічно, $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ $\qquad (3.2.13^*)$

– *рівняння прямої*, що *проходить через 2 точки на площині* (рис. 3.11)

Звідси, маємо $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$,

де $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ – кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через 2 точки на площині.

Рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ (3.2.14)

називається *рівнянням прямої, що проходить через задану точку* M_0 *із заданим кутовим коефіцієнтом k.*

Кутовий коефіцієнт: $k = tg\alpha$, де α – кут нахилу даної прямої до осі *OX*.

Перетворимо дане рівняння $y = y_0 + kx - kx_0$ => $y = kx + y_0 - kx_0$ => $y = kx + b,$ де $b = y_0 - kx_0$, тоді одержимо *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k.*

При *x=0* *y=b,* тобто *b* – ордината точки перетину прямої з віссю ординат.

Кут між прямими на площині

Кутом φ між прямими (1) і (2) на площині називають кут, на який треба повернути першу пряму проти годинникової стрілки до збігу із другою прямою, причому $0 \le \varphi \le \pi$.

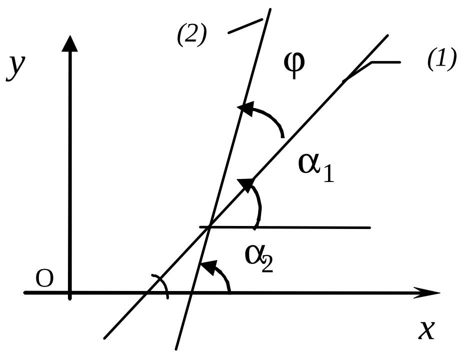


Рис. 3.12

З рисунка видно, що $tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1)$ $\Rightarrow \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1} = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$; $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$ - тангенс *кута між двома прямими* $y = k_1 x + b_1$ *й* $y = k_2 x + b_2$ на площині. Формула $\varphi = arctg\left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\right|$ визначає гострий кут між прямими.

Умова паралельності прямих на площині: $k_2 = k_1$.

Умова перпендикулярності: $1 + k_2 k_1 = 0 \Rightarrow k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

Можна показати, що відстань від т. $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ дорівнює: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

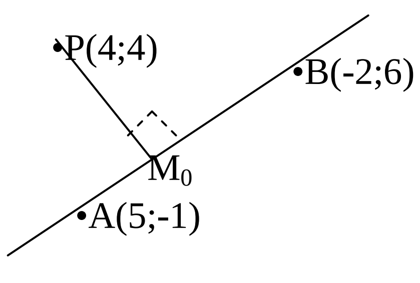


Рис. 3.13

Приклад 3. Знайти проекцію т. *P(4;4)* на пряму, що проходить через т. *A(5;-1)* і *B(-2;6).*

Розв'язання. Рівняння прямої, що проходить через точки *A* і *B*:

$\frac{x-5}{-2-5}=\frac{y+1}{6+1} \Rightarrow x+y-4=0,\ k_1=-1.$

Тоді кутовий коефіцієнт прямої M_0P $k_2=1$.

Рівняння прямої M_0P: $y-4=1(x-4)$ або y= x. Розв’язуючи систему: $\begin{cases} y=x, \\ y=-x+4 \end{cases}$,

знаходимо координати т. $M_0(2;2)$.

Проекцією точки P на пряму AB є точка $M_0(2,2)$ (Рис. 3.13).

Рівняння пучка прямих на площині

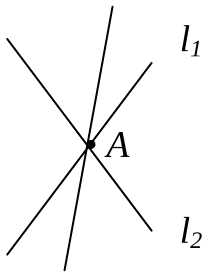


Рис. 3.14

Сукупність розміщених на даній площині прямих, що проходять через деяку точку A цієї площини, називається пучком прямих із центром у точці A (Рис. 3.14).

Центр пучка визначається системою рівнянь двох прямих:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \quad (l_1), \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \quad (l_2). \end{cases}$$

Теорема. Будь-яка пряма, що проходить через точку перетину прямих (l_1) і (l_2), визначається рівнянням:

$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0.$

Змінюючи параметр λ можна одержати рівняння всіх прямих, що проходять через точку A, крім прямої (l_2).

Приклад. Через точку перетину прямих $2x+y-3=0$ й $x-y+8=0$ провести пряму, паралельну прямій $x+y+3=0$.

Розв’язання. Запишемо рівняння пучка прямих:

$2x+y-3+\lambda(x-y+8)=0$, кутові коефіцієнти яких залежно від λ визначаються виразом $k_1=\frac{2+\lambda}{\lambda-1}$.

Кутовий коефіцієнт прямої $x+y+3=0$ дорівнює $k_2=-1$.

З умови паралельності маємо: $k_1=k_2$ або $2+\lambda=-\lambda+1$, звідки $\lambda=-\frac{1}{2}$.

Таким чином, шукане рівняння прямої має вигляд $2(2x+y-3)-(x-y+8)=0$ або $3x+3y-14=0$.

Зауваження. Задачу можна розв’язати іншим способом, знайшовши точку перетину прямих (l_1) і (l_2).

Перехід від загальних рівнянь прямої в просторі до канонічних

Якщо пряма в просторі задана як лінія перетину двох площин

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \qquad (3.2.15)$$

то очевидно, що напрямний вектор $\vec{a}$ лінії перетину цих площин буде одночасно перпендикулярний до векторів $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ й $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$, а, отже, він буде колінеарний їхньому векторному добутку:

$$\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}.$$

Для визначення якої-небудь точки $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$, що належить прямій потрібно розв'язати систему рівнянь (3.2.15), фіксуючи значення однієї зі змінних. Тоді канонічні рівняння прямої запишуться у вигляді

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}.$$

Взаємне розташування двох прямих у просторі

Взаємне розташування двох прямих у просторі визначається взаємним розташуванням їхніх напрямних векторів. Нехай дані дві прямі: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$, $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$, тоді *кут* між ними знаходиться за формулою

$$cos\varphi=\frac{\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}}{\left|\overrightarrow{a_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{a_2}\right|}\Rightarrow cos\varphi=\frac{m_1\cdot m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

Умова *паралельності*: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

Умова *перпендикулярності*: $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Умова *перетину прямих* у просторі

$$\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}=0,$$

це умова компланарності напрямних векторів прямих і вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, де $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$ – точки, що належать першій і другій прямій відповідно.

Кут між прямою $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ й площиною $Ax+By+Cz+D=0$ дорівнює гострому куту між прямою і її проекцією на площину й знаходиться за формулою:

$$\sin\varphi=\frac{\left|Am+Bn+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Умови *належності* прямої площині. $\begin{cases}mA+nB+pC=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,\end{cases}$

де перша умова виражає перпендикулярність векторів (m, n, p) і (A, B, C), а друга –належність площині т. $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ прямої.

Приклад 5. Дані координати вершин піраміди A_1(2;-1;1), A_2(5;5;4), A_3(3;2;-1), A_4(4;1;3). Знайти:

1) Довжину ребра A_1A_2:

$\overrightarrow{A_1A_2}$ =(5-2; 5-(-1); 4-1)=(3; 6; 3);

Довжина ребра A_1A_2 дорівнює $\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{3^2+6^2+3^2} = \sqrt{54}$.

2) Кут між ребрами A_1A_2 й A_3A_4:

$\overline{A_3A_4}$ =(1; -1; 4)

$$\cos\alpha = \frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_3A_4}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\left|\overline{A_3A_4}\right|} = \frac{3\cdot 1+6(-1)+3\cdot 4}{\sqrt{54}\sqrt{1^2+1^2+4^2}} = \frac{9}{9\cdot 2\sqrt{3}}.;\ \alpha = \arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

3) Проекцію вектора $\overline{A_1A_3}$ на напрям вектора $\overline{A_1A_4}$:

$$\text{Пр}_{\overline{A_1A_4}}\overline{A_1A_3} = \frac{\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_4}\right|};\ \overline{A_1A_3} = (1;3;-2)\ ;\qquad \overline{A_1A_4} = (2;2;2)$$

$$\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};\ np_{\overline{A_1A_4}}A_1A_3 = \frac{1\cdot 2+3\cdot 2-2\cdot 2}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

4) Площа грані $A_1A_2A_3$:

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right]\right|,\qquad \left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -21\vec{i}+9\vec{j}+3\vec{k};$$

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{21^2+9^2+3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{531}\ \text{(кв. од.).}$$

5) Об'єм піраміди:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right)\right|,$$

$$\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -18 \qquad V = \frac{18}{6} = 3\ \text{(куб. од).}$$

6) Рівняння прямої A_1A_2:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{3}\ \text{або}\ \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

7) Рівняння площини $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{або}\quad -21(x-2)+9(y+1)+3(z-1)=0,$$

$-7(x-2)+3(y+1)+z-1=0,\qquad -7x+3y+z+16=0.$

8) Рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

Нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$: $\vec{n} = (-7;3;1)$, тоді рівняння шуканої висоти мають вигляд $\dfrac{x-4}{-7} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{1}$

9) Кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.

Маємо $\overrightarrow{A_1A_4}$ =(2;2;2), $\vec{n} = (-7;3;1)$, тоді

$$\sin\varphi = \frac{\left|2\cdot(-7)+2\cdot 3+2\cdot 1\right|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}\sqrt{7^2+3^2+1^2}} = \frac{6}{2\sqrt{3}\sqrt{59}} = \sqrt{\frac{3}{59}}\,;\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{3}{59}}.$$

Рівняння пучка площин

Теорема. *Будь-яка площина, що проходить через лінію перетину площин (α_1) і (α_2), де:*
(α_1): $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,
(α_2): $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, *визначається рівнянням:*
$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$.

Приклад 6. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму (l_1), що є лінією перетину площин паралельно прямій (l_2).

(l_1): $\begin{cases} 3x-y+z-5=0, \\ x+2y-z+2=0. \end{cases}$ (l_2): $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Розв'язання. Рівняння пучка площин, що проходять через пряму (l_1), має вигляд

$3x-y+z-5+\lambda(x+2y-z+2)=0$ або $(3+\lambda)x+(2\lambda-1)y+(1-?)z-5+2?=0$;
Із цього пучка вибираємо площину, паралельну прямій (l_2).
З умови паралельності площини й прямої одержимо:
$(3+\lambda)(-1)+(2\lambda-1)2+(1-\lambda)2=0$, звідки $\lambda=3$.

Підставляючи це значення λ у рівняння пучка площин, одержимо: $6x+5y-2z+1=0$ – рівняння шуканої площини.

3.3. Лінії другого порядку

3.3.1. Класифікація ліній другого порядку

Лінією (кривою) другого порядку на площині називається множина точок, координати яких у деякій системі декартових координат задовольняють рівнянню

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (3.3.1)$$

де $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Класифікація кривих другого порядку:

1. $AC-B^2>0$ – крива еліптичного типу (еліпс, уявний еліпс);
2. $AC-B^2<0$ – крива гіперболічного типу (гіпербола, пара прямих, що перетинаються);
3. $AC-B^2=0$ – крива параболічного типу (парабола, пара паралельних прямих);

Застосовуючи перетворення повороту системи координат, можна одержати рівняння, що не містить добутку xy. Методом виділення повних квадратів і паралельним переносом системи координат можна привести рівняння кривої другого порядку до, так називаного, *канонічному виду*.

Розглянемо найпростіші (канонічні) рівняння ліній другого порядку.

3.3.2. Еліпс

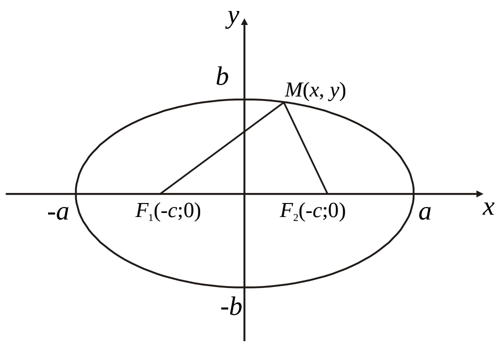


Рис. 3.15

*Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох даних точок, називаних фокусами, є величина постійна (*звичайно позначувана *2a).* Введемо декартову систему координат, так щоб вісь *Ox* проходила через фокуси F_1 й F_2, а вісь *Oy* ділила відрізок F_1F_2 навпіл (Рис. 3.15),

тоді: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3.3.2)$$

– канонічне рівняння еліпса,
де a й b півосі еліпса. Якщо $a>b$, то фокуси розташовані на осі *OX*, як показано на даному малюнку.

Має місце наступне співвідношення: $c^2=a^2-b^2$, де $2c$ – відстань між фокусами.

Якщо $b>a$, то фокуси розташовані на осі *OY* й $c^2=b^2-a^2$.

Точки $(a,0)$,$(0,b)$,$(-a,0)$,$(0,-b)$ – вершини еліпса.

Відношення половини відстані між фокусами до більшої півосі еліпса, називається *ексцентриситетом* еліпса $\varepsilon=\frac{c}{a}$ (або $\varepsilon=\frac{c}{b}$).

Ексцентриситет еліпса характеризує ступінь витягнутості еліпса, причому для еліпса $\varepsilon<1$. Зокрема, для кола $\varepsilon=0$, тобто $a=b$ і рівняння кола із центром на початку координат має вигляд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2+y^2=a^2$.

Приклад 1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його більша вісь дорівнює 20, а ексцентриситет 3/5.

Розв’язання. За умовою $2a=20$, $\varepsilon=3/5$. Тоді $a=10$, а відповідно до формули $\varepsilon=\frac{c}{a}\Rightarrow c=a\cdot\varepsilon=10\cdot\frac{3}{5}=6$. Зі співвідношення $b^2=a^2-c^2$ знаходимо $b^2=100-36=64$.

Підставляючи $a^2=100$, $b^2=64$ у рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, одержимо $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ – шукане рівняння еліпса.

3.3.3. Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох даних точок, називаних фокусами, є величина постійна (звичайно позначувана *2a).*

Якщо декартову систему координат розташуємо так само, як у випадку

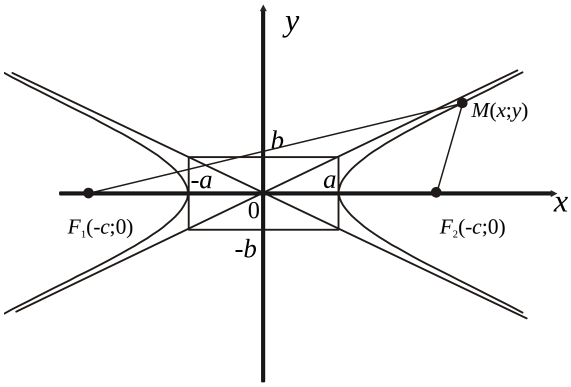


Рис. 3.16

еліпса, то одержимо *канонічне рівняння гіперболи* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 3.16).

Гіпербола, у якої фокуси розташовані на осі *OY*, називається *спряженою* і її рівняння: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$. Числа a й b є величини дійсної й уявної півосей гіперболи. Вони зв'язані між собою рівністю: $c^2=a^2+b^2$

Точки $(a,0)$ і $(-a,0)$ називаються *вершинами гіперболи*.

Відношення половини фокусної відстані до довжини дійсної півосі називається *ексцентриситетом* гіперболи $\varepsilon=\frac{c}{a}$ ($\varepsilon=\frac{c}{b}$ – для спряженої гіперболи). Очевидно, що для гіперболи $\varepsilon>1$.

Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ називаються *асимптотами* гіперболи. Якщо $a=b$, то гіпербола називається *рівнобічною*.

Приклад 2. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c=10$, а ексцетриситет $\varepsilon=\frac{5}{3}$.

Розв'язання. За умовою задачі фокуси розташовані на осі ординат, тому напишемо канонічне рівняння спряженої гіперболи у вигляді: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

Параметри a й b знаходимо із системи: $\begin{cases} a^2+b^2=c^2, \\ \varepsilon=\frac{c}{b}. \end{cases}$

Підставляючи $c=5$ й $\varepsilon=\frac{5}{3}$, одержимо:

$\begin{cases} a^2+b^2=25, \\ \frac{5}{b}=\frac{5}{3}. \end{cases}$ Із другого рівняння системи знаходимо $b=3$,

тоді $a^2=25-9=16;$

Отже, рівняння гіперболи: $\frac{y^2}{3^2}-\frac{x^2}{4^2}=1$.

3.3.4. Парабола

Параболою називається геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки, називаної фокусом, і даною прямою, називаною директрисою.

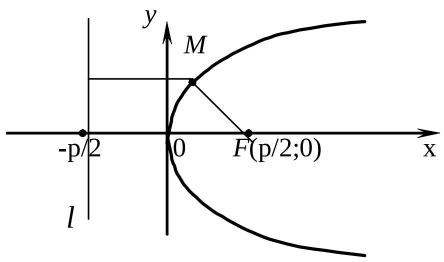


Рис. 3.17

Виберемо систему координат так, як зображено на рисунку 3.17. Тоді канонічне рівняння параболи запишеться як $y^2 = 2px$, де p – параметр параболи, чисельно рівний відстані від фокуса до директриси.

Канонічне рівняння параболи, фокус якої знаходиться на осі OY має вигляд: $x^2 = 2py$.

$x = -\frac{p}{2}$ ($y = -\frac{p}{2}$) – *рівняння директриси.*

Відзначимо, що поняття директриси визначене також для еліпса й гіперболи, тільки ці криві мають по дві директриси, рівняння яких: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ ($y = \pm\frac{a}{\varepsilon}$). Це прямі, перпендикулярні фокальній осі й розташовані поза вершинами у випадку еліпса $\left(\varepsilon < 1 \Rightarrow |x| > a\right)$ й між вершинами у випадку гіперболи $\left(\varepsilon > 1 \Rightarrow |x| < a\right)$. При цьому праву директрису вважають відповідною правому фокусу кривої, а ліву - лівому фокусу.

3.3.5. Фокально-директоріальна властивість

Має місце так називана *фокально-директоріальна властивість* кривих другого порядку: *відношення відстані будь-якої точки* $M(x, y)$ *кривої до фокуса (r) до відстані тієї ж точки до відповідної цьому фокусу директриси (* d_M *) є величина стала, рівна ексцентриситету:* $\frac{r_M}{d_M} = \varepsilon$.

Ексцентриситет параболи, як випливає з її означення, дорівнює *1*.

3.3.6. Рівняння еліпса, гіперболи, параболи, паралельно зміщених щодо осей координат

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ – *еліпс*, $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ – *гіпербола*, $\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$ – *спряжена гіпербола*, $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ або $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$ – *парабола*.

У всіх випадках паралельним переносом осей координат: $X = x - x_0; Y = y - y_0$ рівняння приводяться до канонічного виду.

Приклад 2. Привести рівняння до канонічного виду й побудувати криву.

$4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$

Розв’язання. Згрупуємо доданки й виділимо повні квадрати

$\left(4x^2 - 40x\right) + \left(9y^2 + 36y\right) + 100 = 0, 4\left(x^2 - 10x\right) + 9\left(y^2 + 4y\right) + 100 = 0,$

$4\left(x^2-10x+25\right)-100+9\left(y^2+4y+4\right)-36+100=0, 4\left(x-5\right)^2+9\left(y+2\right)^2=36,$

$\frac{\left(x-5\right)^2}{9}+\frac{\left(y+2\right)^2}{4}=1.$

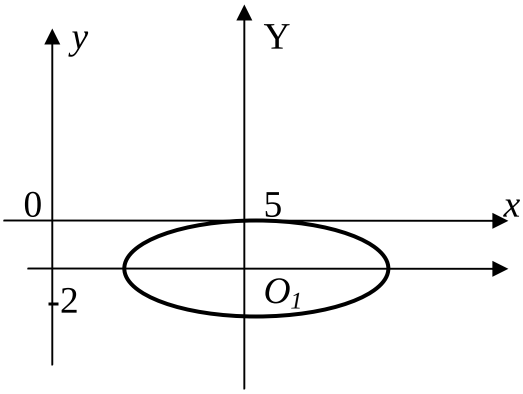


Рис. 3.18

Виконуючи перетворення паралельного переносу осей з новим початком координат $O_1(5;-2)$: *x-5=X*, *y+2=B*, одержимо рівняння виду $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$. Це рівняння еліпса з півосями *a=3*, *b=2*. Будуємо криву в системі координат XO_1Y.

3.4. Поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору, що у декартовой системі координат задається рівнянням $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Kx+Ly+Mz+N=0$, *причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C, D, E, F відмінний від нуля.*

Невироджені поверхні 2-го порядку: циліндри, конуси, еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди.

Вироджені поверхні 2-го порядку: порожня множина, точка, площина, пара паралельних площин або площин, що перетинаються. Такі поверхні нижче не розглядаються.

Далі приводяться канонічні рівняння й малюнки невироджених поверхонь другого порядку в деякій фіксованій декартовій системі координат.

Циліндричні поверхні

Нехай на площині *XOY* лежить деяка крива *L*, що має рівняння *F(x,y)=0* (3.4.1)

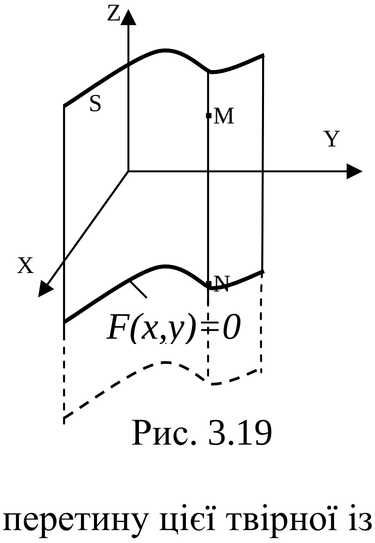


Рис. 3.19

Проведемо через точку *N(x,y,0)* пряму, паралельну осі *OZ*. Множина цих прямих утворить поверхню *S* (Рис.3.19), що називається *циліндричною поверхнею*. Лінія *L* називається *напрямною*, а прямі, що утворять циліндричну поверхню, рухаючись по напрямній *L*, називаються *утворюючими*.

На рисунку зображена циліндрична поверхня з твірними, паралельними осі *OZ* і напрямною *L* у площині *XOY*.

Візьмемо на поверхні *S* довільну точку *M(x,y,z)*. Ця точка лежить на якій-небудь твірній. Якщо *N* – точка перетину цієї твірної із площиною *XOY*, то точка *N* належить кривій *L*. Звідси витікає, що координати точки *M* задовольняють рівнянню (3.4. 1) і рівняння поверхні S збігається з рівнянням напрямної: $S: F(x,y)=0$.

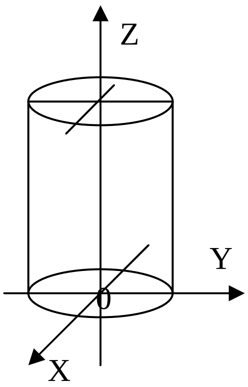


Рис. 3.20

Зокрема, якщо напрямною є еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то циліндрична поверхня називається *еліптичним циліндром*. *Прямий еліптичний циліндр* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (Рис. 3.20). Зокрема, при $a=b$ одержимо рівняння *прямого кругового циліндра:* $x^2+y^2=a^2$.

Якщо напрямною є парабола, то маємо *параболічний циліндр* $y^2=2px$ $(x^2=2py)$(рис 3.21).

Якщо напрямна лінія – гіпербола, то циліндрична поверхня – *гіперболічний циліндр* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (Рис. 3.22).

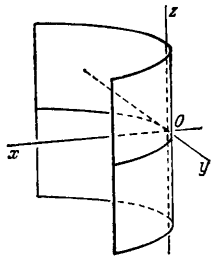


Рис. 3.21

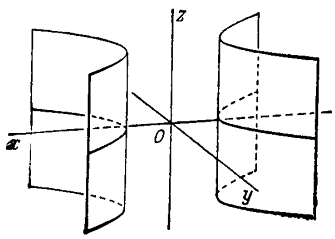


Рис. 3.22

Далі приведемо малюнки поверхонь другого порядку і їхнього рівняння в декартовій системі координат без аналітичного обґрунтування. Однак, розглядаючи перетин даних поверхонь координатними площинами й площинами паралельними координатним площинам, можна переконатися у відповідності геометричного зображення поверхонь й їхніх рівнянь.

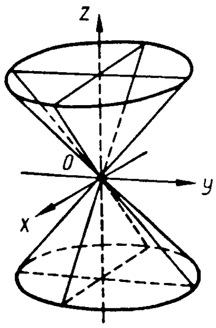


Рис. 3.23

Еліптичний конус: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ (Рис.3.23).

Зокрема, при $a=b$ одержимо рівняння прямого кругового конуса.

Рівняння *тривісного еліпсоїда:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (Рис. 3.24).

При $a=b=c$ одержимо *сферу:* $x^2+y^2+z^2=a^2$ (Рис. 3.25).

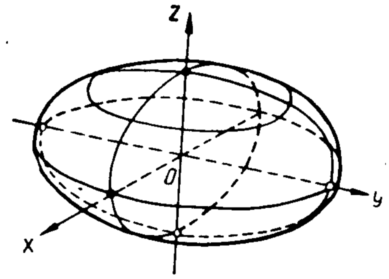


Рис. 3.24

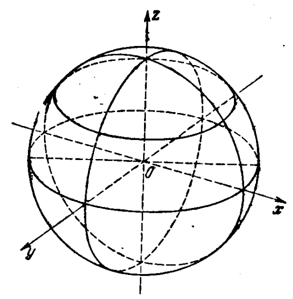


Рис. 3.25

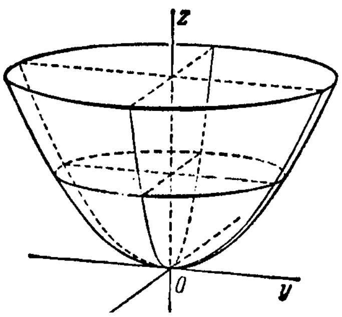


Рис. 3.26

Еліптичний параболоїд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z;$

(Рис. 3.26)

Параболоїд обертання (a=b): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=2z.$

Однопорожнинний гіперболоїд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (Рис. 3.27).

Двопорожнинний гіперболоїд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (Рис. 3.28).

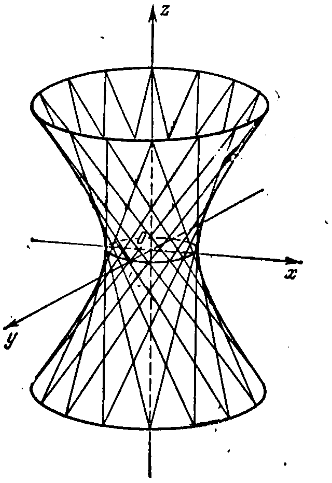


Рис. 3.27

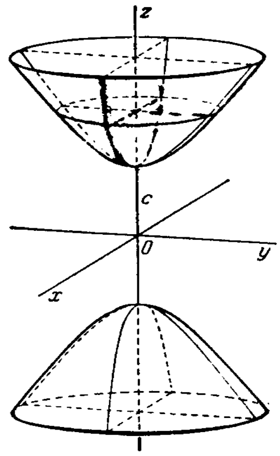


Рис. 3.28

Гіперболічний параболоїд: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z;$ (Рис. 3.29(а), 3.29(б)).

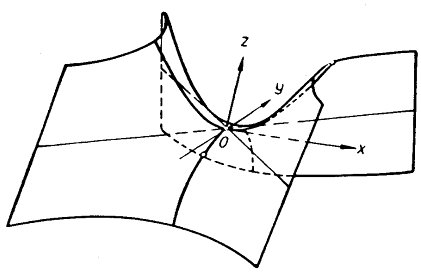


Рис. 3.29(а)

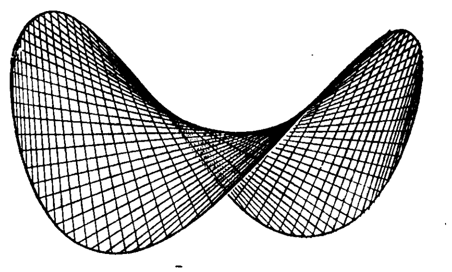


Рис. 3.29(б)

Контрольні завдання до розділу 3

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. Способами аналітичної геометрії :
1) скласти рівняння сторони AB; 2) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C; 3) обчислити довжину висоти, проведеної з вершини B;

4) скласти рівняння прямої, що проходить через центр ваги трикутника паралельно стороні АС; 5) знайти площу трикутника; 6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині А.

Номер варіанта	A	B	C	Номер варіанта	A	B	C
3.1.1	(-6;-3)	(-4;3)	(9;2)	3.1.16	(2;-1)	(8;7)	(-10;4)
3.1.2	(-3;1)	(-1;7)	(12;6)	3.1.17	(5;-3)	(1;0)	(7;2)
3.1.3	(-1;3)	(1;9)	(4;7)	3.1.18	(4;-6)	(2;2)	(-2;-1)
3.1.4	(0;0)	(2;6)	(7;2)	3.1.19	(3;4)	(-1;7)	(-4;0)
3.1.5	(-2;-6)	(0;0)	(3;-2)	3.1.20	(1;-2)	(7;6)	(0;2)
3.1.6	(-2;-5)	(6;2)	(0;0)	3.1.21	(2;-1)	(-2;-3)	(-6;4)
3.1.7	(-2;0)	(-4;-7)	(5;5)	3.1.22	(5;-8)	(3;-2)	(-3;-6)
3.1.8	(1;2)	(3;8)	(-4;-1)	3.1.23	(8;-2)	(-6;-5)	(0;4)
3.1.9	(4;4)	(1;-3)	(9;0)	3.1.24	(7;5)	(3;2)	(4;0)
3.1.10	(5;6)	(7;2)	(-6;0)	3.1.25	(3;-7)	(6;0)	(1;1)
3.1.11	(-6;-4)	(-1;2)	(6;1)	3.1.26	(5;3)	(-1;-2)	(-3;7)
3.1.12	(2;0)	(7;2)	(0;5)	3.1.27	(3;1)	(-2;8)	(-5;3)
3.1.13	(-2;-6)	(-6;-3)	(10;-1)	3.1.28	(9;2)	(-5;7)	(0;-3)
3.1.14	(8;2)	(-2;1)	(-4;7)	3.1.29	(-3;3)	(3;1)	(-1;4)
3.1.15	(2;-4)	(-2;-1)	(4;1)	3.1.30	(7;9)	(-2;0)	(-3;2)

Завдання 2. Привести рівняння лінії до канонічного вигляду, побудувати цю лінію і знайти в залежності від отриманого результату:
а) координати центру кола і його радіус; б) координати фокусів, довжини осей і ексцентриситет еліпса; в) координати фокусів, довжини осей, ексцентриситет гіперболи і записати рівняння її асимптот; г) координати вершини і фокуса параболи, параметр, а також записати рівняння її директриси.

Номер варіанта	*Рівняння*	*Номер варіанта*	*Рівняння*
3.2.1	$9x^2+4y^2-18x-8y-23=0$	3.2.16	$x^2-y^2-6x+4y+6=0$
3.2.2	$3y^2+5x+6y+13=0$	3.2.17	$x^2+x+2y-1=0$
3.2.3	$x^2+4x+3y=0$	3.2.18	$x^2-2y+6x+1=0$
3.2.4	$2y^2-4y+5x=0$	3.2.19	$3x^2-2y+6x+1=0$
3.2.5	$4x^2-y^2-2y-5=0$	3.2.20	$3x^2+y+6x=0$

Номер варіанта	*Рівняння*	*Номер варіанта*	*Рівняння*
3.2.6	$2x^2 - 8x - y = 0$	3.2.21	$3y^2 + 3y + 2x = 0$
3.2.7	$x^2 + 2y^2 + 4y - 6 = 0$ $4y^2 - 8y + x = 0$	3.2.22	$3y^2 + 3y + 2x + 2 = 0$
3.2.8	$y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$	3.2.23	$4x^2 + y^2 + 8x - 2y - 11 = 0$
3.2.9	$y + x^2 + 2x = 0$	3.2.24	$x^2 + 6x - 2y + 1 = 0$
3.2.10	$4x^2 + 16y^2 + 24x - 28 = 0$	3.2.25	$2y - 5x^2 + 10x = 0$
3.2.11	$4y^2 + 2x + 8y + 1 = 0$	3.2.26	$x^2 + 6x + 2y = 0$
3.2.12	$3x^2 + 12x + 16y - 12 = 0$	3.2.27	$5y^2 + 10y + x = 0$
3.2.13	$x^2 - y^2 + x - y + 1 = 0$	3.2.28	$4x^2 + 8x - y = 0$
3.2.14	$3y^2 - 12x - 6y + 11 = 0$	3.2.29	$y = 8x - 2x^2 - 5$
3.2.15	$10x - 5x^2 - 2y + 3 = 0$	3.2.30	$x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$

РОЗДІЛ 4

ГРАНИЦЯ Й НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1. Основні означення й поняття математичного аналізу

4.1.1. Елементи теорії множин

Поняття множини в математиці є первинним. Під *множиною* розуміють сукупність об'єктів, об'єднаних деякою спільною ознакою. Множини позначають заголовними буквами: *A, B, C, X, Y,…*

Загальноприйняті позначення деяких множин:

Множина *натуральних* чисел позначається – $\boldsymbol{N}$;

Множина *цілих* чисел позначається – $\boldsymbol{Z}$;

Множина *раціональних* чисел позначається – $\boldsymbol{Q}$;

Множина *дійсних* чисел позначається – $\boldsymbol{R}$.

Елементи множин – малими буквами: *a, b, c, x, y,…...*

Для позначення належності елемента *a* множині *A* вживається символічний запис $a \in A$. Якщо *a* не належить множині *A*, то пишуть $a \notin A$.

Множини *A* и *B* рівні, якщо вони складаються з тих самих елементів.

Запис $A=\{a, b, c\}$ означає, що множина *A* складається з елементів *a, b, c.* Якщо множина складається з елементів, що мають певну властивість, наприклад, множина дійсних чисел *x,* що задовольняють нерівностям $a \le x \le b$, то означення цієї множини записують у такий спосіб: $[a, b]=\{x: a \le x \le b\}$.

Множина, що не містить елементів (порожня множина), позначається символом $\varnothing$.

Якщо кожен елемент множини *A* належить множині *B*, то говорять, що множина *A* є підмножиною *B* и позначають $A \subseteq B$.

Для стислості запису основних понять використовуються ***квантори:***

1. $\in$ – символ належності.
2. $\forall x$, що означає “ для всіх *x*”, “для кожного *x*”, “для будь-якого *x*” або “яке б не було *x*”.
3. $\exists\limits_{x}$ або $\exists x$ означає “існує таке *x,* що ” або “можна знайти таке *x,* що” або “принаймні для одного *x* ”.
4. $\exists! x$ означає “існує єдиний x ”.

Дії над множинами:

1. *Сума.* Множина, елементи якої належать хоча б одній із множин *A* або *B*, називається їхнім *об'єднанням (сумою):* $C = A \cup B$.
2. *Різниця.* Різницею множин *A* и B називається множина C, що складається з елементів A, що не належать B: .
3. *Добуток.* Множина, елементи якої належать *A* і *B* одночасно, називається їх *перетином:* $C = A \cap B$.

Множина, елементами якої є дійсні числа, називається *числовою.* Розрізняють наступні числові множини: *відрізок*, сегмент або замкнутий проміжок $:[a,b]=\{x\in R | a\le x\le b\}$; відкритий проміжок або *інтервал*: $(a,b)=\{x\in R|\ a<x<b\}$; *півінтервали* $[a,b)=\{x\in R|\ a\le x<b\}$ або $(a,b]=\{x\in R|\ a<x\le b\}$; нескінченні інтервали й півінтервали $(a,+\infty)$; $(-\infty,a)$; $(-\infty,+\infty)$; $[a,+\infty)$; $(-\infty,a]$.

Будь-який інтервал (α,β), *що* містить точку *x*, тобто $\alpha<x<\beta$, називається *околом точки x*. Нехай ε – яке-небудь додатне число, тоді ε-*околом* точки *x* називається інтервал $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$. В ε-околі кінці симетричні відносно *x*, чого може й не бути у випадку довільного околу. Точка *x* називається *внутрішньою* точкою множини, якщо вона належить йому разом з деяким своїм околом. Точка *x*, *що* належить або не належить множині, називається *граничною* точкою множини, якщо будь-який окіл містить як точки, що належать множині, так і точки йому не належать.

Числова множина *A* називається *обмеженою зверху (знизу)*, якщо існує таке дійсне число *M* (m), що $\forall\ x\in A$ виконується нерівність $x\le M\ (x\ge m)$.

Числова множина *A* називається *обмеженою*, якщо вона *обмежена зверху й знизу,* тобто якщо існує таке додатне число *M*, що $\forall\ x\in A$ справедливо $|x|\le M$.

4.1.2. Модуль дійсного числа

Модуль дійсного числа визначається таким чином $|x|=\begin{cases} x, & \text{якщо } x\ge 0,\\ -x, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$

З означення випливає, що $|x|\ge 0$, $|x|\ge x$ і $|-x|=|x|\quad \forall\ x\in R$.

Наприклад, |-5|=5, |5|=5.

Основні властивості модуля:

1) $|\alpha x|=|\alpha||x|$; де α =const,

2) якщо $|x|\le a,\ \ a>0$, та нерівність рівносильна двом нерівностям $-a\le x\le a$,

3) якщо $|x-a|<\varepsilon$, тобто $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ ($x\in\varepsilon$ - околу точки *a*), то змінна *x* задовольняє нерівностям $-\varepsilon+a<x<\varepsilon+a$,

4) $|x+y|\le|x|+|y|$,

5) $|x-y|\ge|x|-|y|$,

6) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$,

7) $|x/y|=|x|/|y|$.

4.1.3. Поняття функції

Якщо кожному значенню змінної *x*, що належить деякій області її зміни *X* ($x\in X$), за деяким правилом або законом поставлено у відповідність одне певне значення $y\in Y$, то говорять, що на множині *X* задана функція $y=f(x)$. Множина *X* називається *областю визначення* функції; множина *Y* - *областю значень* функції. При цьому *x* називається *незалежною змінною* або *аргументом*, y – *функцією*.

Якщо кожному значенню змінної $x \in X$ відповідає не одне, а кілька значень $y \in Y$ (і навіть нескінченна множина їх), то функція називається *багатозначною*, на відміну від *однозначної* функції, визначеної вище. Функція $y = f(x)$ називається *обмеженою* зверху (знизу), або просто обмеженою, якщо відповідною властивістю володіє її множина значень.

Основні властивості функцій.

Парність. Функція $y = f(x)$ називається: *парною*, якщо $f(-x) \equiv f(x)$ (рис. 4.1); — *непарною*, якщо $f(-x) \equiv -f(x)$ (рис 4.2); інакше функція називається функцією *загального вигляду*.

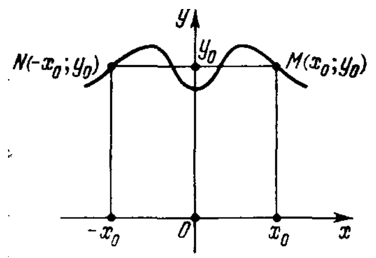


Рис. 4.1

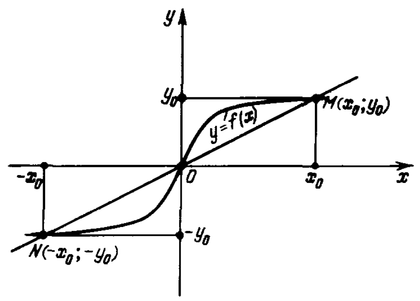


Рис. 4.2

Періодичність. Функція $y = f(x)$ називається періодичною, якщо $\exists\ T > 0$ таке, що $f(x+T) \equiv f(x), \forall x \in X$. Найменше число *T*, що має зазначену властивість, називається періодом.

Монотонність. Функція $y = f(x)$ називається на множині *X монотонно зростаючою* (*монотонно спадаючою*), якщо $\forall x_1, x_2 \in X$, що задовольняють умові $x_2 > x_1$, справедлива нерівність $f(x_2) > f(x_1)$; ($f(x_2) < f(x_1)$) (рис. 4.3 й 4.4), *незростаючою* (*неспадаючою),* якщо при $x_2 > x_1$, $f(x_2) \le f(x_1)$, ($f(x_2) \ge f(x_1)$).

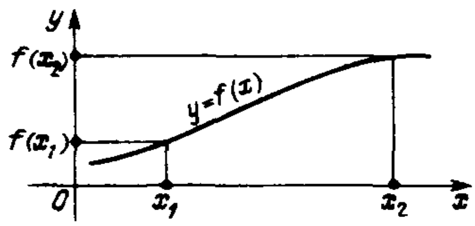


Рис. 4.3

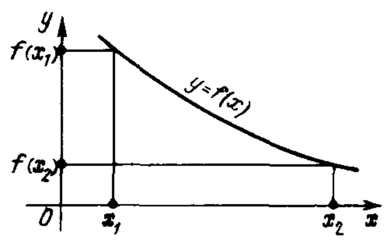


Рис. 4.4

Якщо y є функцією від u, $y = F(u)$, а u у свою чергу залежить від змінної x , $u = \varphi(x)$, то функція $y = F\left[\varphi(x)\right]$ називається *складною* функцією або *суперпозицією.*

Елементарною функцією називається функція, отримана з основних елементарних функцій за допомогою суперпозиції цих функцій і скінченного числа арифметичних операцій.

До класу елементарних належать також *гіперболічні* ***функції*:**

Гіперболічний синус $sh\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; (Рис. 4.5)

Гіперболічний косинус $ch\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; (Рис. 4.6)

Гіперболічний тангенс $th\,x = \dfrac{sh\,x}{ch\,x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

Гіперболічний котангенс $cth\,x = \dfrac{ch\,x}{sh\,x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Гіперболічні функції зв'язані співвідношеннями, аналогічними тригонометричним: $ch^2 x - sh^2 x = 1; \quad th\,x \cdot cth\,x = 1$.

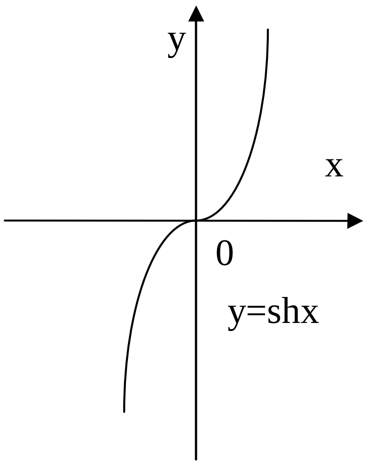


Рис. 4.5

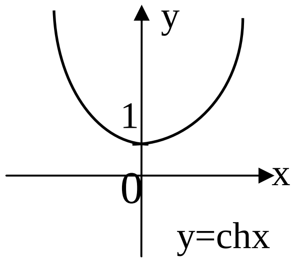


Рис. 4.6

4.2. Границя числової послідовності

Одним з основних понять математичного аналізу є поняття границі.

Почнемо вивчення з найпростішої операції граничного переходу, заснованої на понятті границі числової послідовності.

Означення. Нехай кожному числу *n* натурального ряду чисел *1, 2…,n, …* ставиться у відповідність за певним законом деяке дійсне число x_n, тоді множина занумерованих дійсних чисел $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$ називається числовою послідовністю або просто послідовністю. Скорочено послідовність позначається символом $\{x_n\}$ або *(x*$_n$*)*. Наприклад, символ $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ позначає послідовність $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots$, а символ $\{(-1)^n\, 2^n\}$ позначає послідовність: *-2, 4, -8, 16, … .*

Числова послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою зверху (знизу), якщо існує таке дійсне число *M* (*m*), що $\forall$ n виконується нерівність $x_n \le M \ (x_n \ge m)$.

Числова послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою, якщо вона обмежена зверху й знизу, тобто якщо $\forall$n справедливо $m \le x_n \le M$, або якщо існує таке додатне число *N*, що $\forall\ n$ справедливо $|x_n| \le N$.

Означення. Число α називається границею числової послідовності $\{x_n\}$, якщо для кожного наперед заданого додатного числа ε можна вказати такий номер $N(\varepsilon)$, що всі значення x_n, $\forall\ n > N$, будуть задовольняти нерівності $|x_n - a| < \varepsilon$.

Якщо число α є границя числової послідовності $\{x_n\}$, то говорять, що x_n наближається до границі *a* і пишуть $x_n \to a$ або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, або $\lim x_n = a$.

Нехай кожному значенню змінної x_n поставлена у відповідність точка на числовій осі. Нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ запишемо як подвійну нерівність $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Нерівності $|x_n - a| < \varepsilon$ задовольняє множина точок, що належать інтервалу $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, який називається ε – околом точки *a*.

Тоді геометрична інтерпретація границі може бути такою.

Число *a* є границя змінної x_n, якщо для кожного наперед заданого як завгодно малого додатного числа ε всі значення змінної x_n, починаючи з деякого номера *N*, будуть знаходитись в ε- околі точки *a*. Поза цим інтервалом може знаходитись тільки скінченне число елементів послідовності.

Числова послідовність, що має скінченну границю, називається збіжною, а не має скінченної границі - розбіжною.

Кажуть, що числова послідовність $\{x_n\}$ наближається до нескінченної границі, якщо для кожного як завгодно великого додатного числа *M*, можна знайти таке N, що $\forall n > N$, має місце нерівність $|x_n| > M$ і пишуть: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. У цьому випадку послідовність називається нескінченно великою.

4.3. Границя функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки *x = a*, крім, може бути, самої точки *a*.

Число A називається границею функції y = $f(x)$ *при x → a, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного* ε *знайдеться таке* $\delta > 0$*, що для всіх x (крім, може, точки a), що задовольняють нерівності* $|x - a| < \delta$*, виконується нерівність* $|f(x) - A| < \varepsilon$ *і записують* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Це означення називається означенням границі функції в точці мовою «ε - δ».

4.3.1. Геометричне означення границі функції в точці

Який би не був ε – окіл числа A існує такий δ – окіл числа a, що $\forall$ $x \in (a-\delta, a+\delta)$ значення $y \in$ (A - ε, A + ε).

Означення границі узагальнюється на випадок, коли $x \to \pm\infty$ оскільки у означенні a й A згадуються у зв'язку з їхніми околами.

Під «околом + ∞» розуміють множину всіх дійсних чисел, що перевищують будь-яке число M. Під «околом –∞» розуміють множину всіх дійсних чисел не більших за будь-яке задане число m.

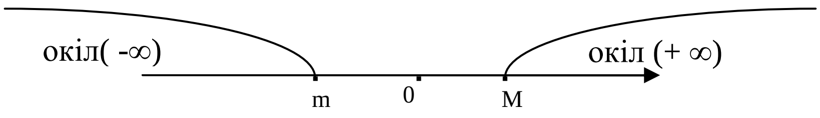


Рис. 4.7.

Означення. Функція $y = f(x)$ має при $x \to +\infty$ границю A, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M \in R$, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ $\forall x > M$.

У цьому випадку число A називають границею функції на ∞ і позначають $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Аналогічно визначається границя функції при $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

Означення. Функція $f(x)$ має в точці a нескінченну границю, якщо для будь-якого як завгодно великого додатного числа M $\exists \delta > 0$, $\forall x$ $(x \neq a)$, що задовольняє умові $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$ і позначають $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

4.3.2. Однобічні границі функції

Означення. Число A_1 називають границею функції ліворуч або лівосторонньою границею в точці $x = a$, якщо $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$.

Число A_2 — границею функції праворуч або правосторонньою границею в точці $x = a$, якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$

Запис $x \to a - 0$ означає, що x прямує до a, залишаючись ліворуч a, а запис $x \to a + 0$ означає, що при наближенні до a, x залишається праворуч a.

З означення границі виходить, що якщо границя існує, то вона не залежить від способу наближення аргументу до своєї границі.

Позначимо
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) = A_1,$$
$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) = A_2,$$

тоді, якщо границя в точці $x = a$ існує, то $f(a - 0) = f(a + 0) = A$, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Значення $f(a - 0)$ і $f(a + 0)$ називають однобічними границями.

Отже, для того щоб функція мала границю в точці необхідно й достатньо, щоб у цій точці функція мала однобічні границі й щоб вони були рівні між собою.

4.3.3. Нескінченно малі і їхні основні властивості

Числова послідовність $\{\alpha_n\}$ називається *нескінченно малою,* якщо $\lim \alpha_n = 0$. Нескінченно малі послідовності (як окремий випадок функцій) і нескінченно малі функції об'єднаємо під загальною назвою: нескінченно малі величини.

Властивості нескінченно малих величин:

1. Сума скінченного числа нескінченно малих величин - величина нескінченно мала.

2. Добуток скінченного числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

3. Добуток величини обмеженої й величини нескінченно малої є величина нескінченно мала.

Наслідок 1. *Добуток постійної величини на величину нескінченно малу є величина нескінченно мала.*

Наслідок 2. *Добуток скінченного числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.*

4.3.4. Порівняння нескінченно малих величин

При порівнянні нескінченно малих величин розглядають границю їхнього відношення.

Нехай: $\lim \alpha_n = 0$, $\lim \beta_n = 0$.

1. Якщо $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$, *то* α_n *– нескінченно мала величина більш високого порядку, ніж* β_n, *тобто* α_n *наближається до 0 швидше, ніж* β_n *і позначається* $\alpha_n = 0(\beta_n)$.

2. Якщо $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \infty$, *то* β_n, *– нескінченно мала величина більш високого порядку, ніж* α_n, *тобто* α_n *наближається до 0 повільніше, ніж* β_n *і позначається* $\beta_n = 0(\alpha_n)$.

3. Якщо $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = A(\neq 0, \neq \infty)$, *то* α_n *й* β_n *називаються нескінченно малими величинами одного порядку:* $\alpha_n = A\beta_n$.

4. Якщо $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$, *то* α_n *й* β_n *називаються еквівалентними нескінченно малими:* $\alpha_n \sim \beta_n$.

5. Якщо $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n^k} = A(A \neq 0, A \neq \infty)$, *то* α_n *— нескінченно мала величина k-го порядку малості відносно* β_n, *тобто* $\alpha_n \sim A\beta_n^{\kappa}$.

4.3.5. Арифметичні дії з границями

Нехай границі змінних величини x_n й y_n існують, тоді:

1. $lim\ (x_n \pm y_n) = lim\ x_n \pm lim\ y_n$, тобто границя алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі границь.

2. $lim\ (x_n \cdot y_n) = lim\ x_n \cdot lim\ y_n$, тобто границя добутку дорівнює добутку границь.

3. $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$, якщо $\lim y_n \neq 0$, тобто границя дорівнює частці границь.

4. $lim\ C = C$, тобто границя сталої дорівнює цій сталій.

4.3.6. Теореми про еквівалентні нескінченно малі величини

Теорема 1. Для того щоб нескінченно малі величини α і β були еквівалентними необхідно й достатньо, щоб їхня різниця $\alpha - \beta$ була нескінченно малою величиною більш високого порядку, ніж вони самі.

Теорема 2. Границя частки нескінченно малих не зміниться, якщо чисельник і знаменник замінити еквівалентними їм нескінченно малими величинами, тобто $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, то $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Дана властивість справедлива й для нескінченно великих величин.

Теорема 3. Якщо в сумі $\alpha + \beta$, де α і β – нескінченно малі величини різного порядку, відкинути нескінченно малу більш високого порядку, наприклад, β, то частина, що залишилася, буде еквівалентна всій сумі, тобто $\alpha + \beta \sim \alpha$.

І важлива границя: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \left\| \dfrac{0}{0} \right\| = 1$

ІІ важлива границя: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \left\| 1^\infty \right\| = e$ або $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \left\| 1^\infty \right\| = e$, де $e \approx 2{,}718$

Таблиця еквівалентних нескінченно малих

Наслідки І-ї важливої границя:

$$\begin{cases} 1.\ \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \\ 2.\ \arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x \\ 3.\ tgx \underset{x\to 0}{\sim} x \\ 4.\ arctgx \underset{x\to 0}{\sim} x \\ 5.\ 1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

Наслідки ІІ-ї важливої границя:

$$\begin{cases} 6.\ \ e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \\ 7.\ \ a^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \ln a \\ 8.\ \ \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \\ 9.\ \ \log_a(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{\ln a} \\ 10.\ \ (1+x)^\mu - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \mu x \\ 10a.\ \sqrt[n]{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{n} \end{cases}$$

Користуючись таблицею еквівалентних нескінченно малих величин, можна одержати деякі додаткові співвідношення:

$sh x \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad th x \underset{x\to 0}{\sim} x$

Крім того, якщо $\alpha \sim \beta$, то $\sqrt[n]{1+\alpha}-1 \sim \sqrt[n]{1+\beta}-1,\ e^{\alpha}-1 \sim e^{\beta}-1$

При обчисленні меж з нескінченно великим аргументом можна враховувати, що якщо $x \to \infty$, то

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\,x + a_n \sim a_0x^n$ і отже,

$\sqrt[n]{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n} \sim \sqrt[n]{a_0}\,x.$

Відзначимо ще наступне співвідношення еквівалентності: якщо існує границя (скінченна або нескінченна) $\lim(1+\alpha)^{\beta}$, де α – нескінченно мала, а β – нескінченно велика величина, і якщо $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, то існує й границя $\lim(1+\alpha_1)^{\beta_1}$ й при цьому зазначені границі рівні між собою, тобто $\lim(1+\alpha)^{\beta} = \lim(1+\alpha_1)^{\beta_1}$.

Справедливість цієї рівності перевіряється логарифмуванням обох її частин й врахуванням того, що якщо $\alpha \sim \alpha_1$, то $\ln(1+\alpha) \sim \ln(1+\alpha_1)$.

4.3.7. Приклади

Використовуючи теореми про границю добутку й частки, варто застосовувати наступне правило: якщо під знаком границі множник має скінченну границю, відмінну від нуля, то в цьому множнику доцільно зробити граничний перехід, заміняючи його граничним значенням. Застосування цього правила дозволяє спростити вираз під знаком границі.

При обчисленні границь функцій використовується *правило граничного переходу під знаком неперервної функції*, що формулюється так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Всі елементарні функції неперервні у своїх областях визначення.

При обчисленні границь, насамперед, необхідно аргумент функції замінити його граничним значенням і з'ясувати чи є невизначеність.

Приклад 1.

Знайти $A = \lim\limits_{x\to 2}(x^3 + x + 4)$.

Границі виразів, що не містять невизначеностей, визначаються безпосередньо з застосуванням теорем про границі суми, добутку, частки.

$$A = \lim_{x\to 2} x^3 + \lim_{x\to 2} x + 4 = 8+2+4=14.$$

До *невизначених* виразів відносяться: $\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty * 0,\ \infty-\infty,\ \infty^0,\ 0^0,\ 1^{\infty}$.

Якщо в результаті підстановки граничного значення аргументу одержимо *невизначений вираз*, то необхідно виконати тотожні перетворення, в результаті яких *усувається невизначеність*, а потім обчислюється границя.

Розглянемо деякі, що найбільш часто зустрічаються випадки розкриття невизначених виразів.

1. **Розкриття дрібно-раціональних невизначеностей**

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{Pn(x)}{Qm(x)}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени степенів n *і* m, $(n,m\epsilon N)$.

При $x\to\infty$ маємо $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \sim a_0x^n$, $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m \sim b_0x^m$,

тоді $$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{Pn(x)}{Qm(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, \text{ якщо } n=m,\\ 0, \text{ якщо } n<m,\\ \infty, \text{ якщо } n>m.\end{cases}$$

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-8x^3+3x+7}{7x^4+2x^2-4}=\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4}{7x^4}=\dfrac{2}{7}(n=m)$

Приклад 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{17x^3+3x^2-8}{3x^8+2x^3+4x}=\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{17x^3}{3x^8}=0(n<m)$

Приклад 4.

$$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{32x^5-12x^4+x+3}{11x^3+6x^2-1}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{32x^5}{11x^3}=\infty(n>m).$$

á) $\lim\limits_{x\to à}\dfrac{Pn(x)}{Qm(x)}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$

Користуючись тим, що чисельник і знаменник при $x = a$ дорівнюють нулю, виділимо множник $x - a$, що прямує до 0 при $x\to a$.

Наслідок теореми Безу: Якщо а — корінь многочлена $P_n(x)=0$, тобто $P_n(a) = 0$, то $P_n(x)$ ділиться без залишку на різницю $x - a$, тобто $P_n(x) = (x - a)\,P_{n-1}(x)$.

Зокрема, квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ ($D = b^2 - 4ac \geq 0$) може бути представлений у вигляді добутку

$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 й x_2 — корені квадратного тричлена.

Приклад 5. $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^3-3}{x^3-2x+1}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$.

Для того щоб позбутися невизначеності, чисельник і знаменник розкладемо на множники, користуючись наслідком теореми Безу. Ділимо чисельник і знаменник на $x - 1$:

$$\begin{array}{l|l} -\,x^4+2x^3-3 & x-1 \\ \underline{x^4-x^3} & \overline{x^3+3x^2+3x+3} \\ -\,3x^3-3 & \\ \underline{3x^3-3x^2} & \\ -\,3x^3-3 & \\ \underline{3x^3-3x} & \\ -\,3x-3 & \\ \underline{3x-3} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} -\,x^3-2x+1 & x-1 \\ \underline{x^3-x^2} & \overline{x^2+x-1} \\ -\,x^2-2x & \\ \underline{x^2-x} & \\ -\,x+1 & \\ \underline{x+1} & \\ 0 & \end{array}$$

Чисельник можна представити у вигляді:
$x^4 + 2x^3 – 3 = (x – 1)(x^3 + x^2 + 3x + 3)$,
аналогічно знаменник: $x^3 - 2x + 1 = (x – 1)(x^2 + x – 1)$,
тоді $I = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+3x^2+3x+3)}{(x-1)(x^2+x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2+3x+3}{x^2+x-1} = 10$.
(відзначимо, що при $x \to 1$ різниця $x – 1 \neq 0$, тому скорочувати $x – 1$ можна).
Приклад 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2+2x)^2+2x+1}{2x+x^4} = \frac{4+1}{0} = \frac{5}{0} = \infty$.
Приклад 7. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{3x^2-x+3} = \frac{0}{13} = 0.$
У прикладах 6 й 7 не з'являються невизначені вирази, тому відповіді знаходимо без попередніх перетворень.

Приклад 8. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{3x^2+x-30} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+1)(x-3)}{3(x-3)\left(x+\frac{10}{3}\right)} = \frac{4}{19}$.

Приклад 9
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+3}{x-1}-\frac{x^2+1}{x^2+x-2}\right) = \|\infty-\infty\| = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x+3}{x-1}-\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)}\right)$$
.
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)(x+2)-x^2-1}{(x-1)(x+2)} =$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{5x+5}{(x-1)(x+2)} = \infty.$$

2. **Розкриття ірраціональних невизначеностей** виду $\frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \frac{0}{0}, \infty-\infty.$

Приклад 1. Знайти границю
$$I = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{27x^3-2x^3-1}}{16x^2-3x+17} = \left\|\frac{0}{0}\right\|$$
Оскільки при $x \to \infty$ маємо $\sqrt[3]{27x^3-2x^2-1} \sim 3x, \sqrt{16x^2-3x+17} \sim 4x,$ то $I = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}.$

Приклад 2. Знайти границю
$$A = \lim_{x\to\infty} x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2}} - x\sqrt{2}\right) = \|\infty-\infty\|$$
Для того щоб позбутися ірраціональності, чисельник і знаменник множать на так називаний спряжений вираз.
При цьому використовуються формули:
$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) = a-b,$$
$$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}\right) = a-b.$$

У нашому випадку помножимо чисельник і знаменник на $\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2}}+x\sqrt{2}$, тоді

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2}}-x\sqrt{2}\right)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2}}+x\sqrt{2}}\frac{(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2}}+x\sqrt{2})}{}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\sqrt{x^4+2}-x^2\right)}{2\sqrt{2}x},$$ де

$\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2}}+x\sqrt{2}\underset{x\to\infty}{\sim}2\sqrt{2}x$;

Знову помножимо чисельник і знаменник на спряжений вираз, тоді

$$A=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to\infty}x^2\frac{\left(x^4+2\right)-x^4}{\sqrt{x^4+2}+x^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$ де $\sqrt{x^4+2}+x^2\underset{x\to\infty}{\sim}2x^2$

Приклад 3.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)=\|\infty+\infty\|=\infty$ (Сума нескінченно великих величин одного знака є величина нескінченно велика).

Приклад 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^5+x^3+3x+4}+\sqrt{2x^2+x-3}}{x^2\sqrt{x+4}+\sqrt[3]{x+2}}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{x^{5/2}}=3,$$

де $\sqrt{9x^5+x^3+3x+4}+\sqrt{2x^2+x-3}\underset{x\to\infty}{\sim}3x^{\frac{5}{2}}$, $x^2\sqrt{x+4}+\sqrt[3]{x+2}\underset{x\to\infty}{\sim}x^{\frac{5}{2}}$

тому, що $\sqrt{2x^2+x-3}\underset{x\to\infty}{\sim}\sqrt{2}\cdot x\left(\frac{5}{2}>1\right)$; $\sqrt[3]{x+2}\underset{x\to\infty}{\sim}x^{1/3}\left(\frac{5}{2}>\frac{1}{3}\right)$.

Чисельник еквівалентний $3x^{5/2}$, знаменник — $x^{5/2}$.

Приклад 5.

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x+3}}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x+3}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x+3}\right)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2-4)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x+3}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)(4x+1-3x-3)}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Приклад 6. Обчислити границю $I=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[5]{x^5-3x^2-x+1}-x\right)=\|\infty-\infty\|$.

Через наявність кореня з високим показником множення й ділення на спряжений вираз тут недоцільно. Перетворимо вираз I у такий спосіб:

$$I=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[5]{1-\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}}-1\right)$$

При $x\to\infty$ вираз $-\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\to0$,

отже $\sqrt[5]{1-\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}}-1\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{5}\left(-\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)$

за формулою $(1+x)^m - 1 \underset{x\to 0}{\sim} mx$

Оскільки величина $\frac{-1}{x^4}+\frac{1}{x^5}$ є нескінченно малою величиною більш високого порядку, ніж $\frac{-3}{x^3}$, то її можна відкинути. Звідси нескінченно мала величина має вид: $\frac{1}{5}\left(-\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right) \sim -\frac{3}{5x^3}$. Виходить, $I=\frac{-3}{5}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0.$

Приклад 7. $I=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(2\sqrt{x^3+1}+x\right)^2}{3\sqrt{x^6+7}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Для виділення головної частини чисельника й знаменника скористаємося еквівалентними нескінченно великими величинами, тобто

$\left(2\sqrt{x^3+1}+x\right)^2 \sim 4x^3,$

$3\sqrt{x^6+7} \sim 3\sqrt{x^6}=3x^3.$

Таким чином, $I=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3}{3x^3}=\frac{4}{3}.$

Приклад 8. $I=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+20x^3-x}-\sqrt[3]{8x^3+6x^2+5}\right)$

Обидва радикали мають однакову головну частину *2x*, віднімаючи яку від кожного радикала, одержимо

$$I=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt[4]{16x^4+20x^3-x}-2x\right)-\left(\sqrt[3]{8x^3+6x^2+5}-2x\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}2x\left(\left(\sqrt[4]{1+\frac{5}{4x}-\frac{1}{16x^3}}-1\right)-\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{4x}+\frac{5}{8x^3}}-1\right)\right)$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\left(x\left(\left(1+\frac{5}{4x}\right)^{\frac{1}{4}}-1\right)-\left(\left(1-\frac{3}{4x}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)\right)=$$

$$=2\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{5}{4\cdot 4x}+\frac{1}{4x}\right)=2\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{8}.$$

3. **Знаходження границь функцій з використанням I й II важливих границь й їхніх наслідків**

Розглянемо приклади границь, у яких застосовується таблиця еквівалентних нескінченно малих; отримана як наслідки з I й II важливих границь, а також самі I й II важливі границі. Відзначимо, що заміняти еквівалентними нескінченно малими в різниці двох еквівалентних нескінченно малих не рекомендується, тому що це може привести до невірного результату.

Приклад 1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\left\|\frac{0}{0}\right\|$

Замінивши *tgx* й *sinx* у різниці *tgx – sinx* еквівалентною нескінченно малою *x*, ми б одержали $A = 0$.

Однак, виконавши наступні перетворення, знайдемо

$tgx - sinx = tgx(1 - cosx) \sim x \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}$, тоді

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2\cdot x^3} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2. $A = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x} - \cos x}{\sin^2\frac{x}{2}} = \left\|\frac{0}{0}\right\|$

У чисельнику віднімемо й додамо 1, тоді, розділивши почленно, знайдемо

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x\sin x} - 1\right) - \left(\cos x - 1\right)}{\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x\sin x)^{\frac{1}{2}} - 1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} - \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= \left\|\begin{matrix}(1+x\sin x)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}\\ \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\cdot\frac{x^2}{4}} - \lim_{x\to 0}\frac{\left(-x^2\right)}{2\cdot\frac{x^2}{4}} = 2 + 2 = 4.$$

Приклад 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x - 2^{-x}}{tg3x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{2^{2x} - 1}{2^x\cdot tg3x}\left|\begin{matrix}2^{2x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} 2x\ln 2\\ \lim\limits_{x\to 0} 2^x = 1\\ tg3x \underset{x\to 0}{\sim} 3x\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{2x\ln 2}{3x} = \frac{2\ln 2}{3}.$$

Приклад 4.

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\ln(x+2) - \ln(x-2)\right] = \left\|\infty - \infty\right\| = \lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+2}{x-2} = \lim_{x\to\infty} x\ln\frac{(x-2)+4}{x-2} = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{4}{x-2}\right)$$

$$\left\|\ln\left(1+\frac{4}{x-2}\right) \sim \frac{4}{x-2}\right\| = \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot 4}{x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{1-\frac{2}{x}} = 4.$$

Приклад 5. $I = \lim_{x\to 2}\frac{\ln(2x-3)}{5^x - 25} = \left\|\frac{0}{0}\right\|$

Перетворимо чисельник і знаменник, замінивши еквівалентними нескінченно малими:

$\ln(2x - 3) = \ln(1 + (2x - 4)) \sim 2x - 4 = 2\,(x - 2)$

$5^x - 25 = 5^x - 5^2 = 5^2\,(5^{x-2} - 1) \sim 25\,(x - 2)\ln 5.$

Тоді $I = \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{25(x-2)\ln 5} = \frac{2}{25\ln 5.}$

Приклад 6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^x - 2^x}{\log_8(1+3x)} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \left\|\begin{matrix}5^x - 2^x = 2^x\left(\left(\frac{5}{2}\right)^x - 1\right) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln\frac{5}{2}\\ \log_8(1+3x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3x}{\ln 8} = \frac{3x}{3\ln 2} = \frac{x}{\ln 2}\end{matrix}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln\frac{5}{2}}{\frac{x}{\ln 2}} = \ln 2\ln\frac{5}{2}$$

Приклад 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln cosx}{x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\left(\cos x-1\right)\right)}{x}\left\|\ln\left(1+\left(\cos x-1\right)\right)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-x^2}{2}\right\|=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{2}\right)=0.$$

Приклад 8. $I=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-5}\right)^{x+3}=\left\|1^{\infty}\right\|$

Невизначеності виду $\left\|1^{\infty}\right\|$ приводяться до другої важливої границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$

Вираз під знаком границі є сума одиниці й нескінченно малої величини $\frac{1}{x}$, показник степеня є величина, обернена до величини $\frac{1}{x}$, тобто x. Для того щоб привести до другої важливої границі, можна або перетворити чисельник з метою виділення одиниці, тобто записати $\frac{3x+2}{3x-5}=\frac{\left(3x-5\right)+7}{\left(3x-5\right)}=1+\frac{7}{3x-5}$, або застосувати універсальний підхід, додаючи й віднімаючи до дробу $\frac{3x+2}{3x-5}$ одиницю, тобто записати

$$\frac{3x+2}{3x-5}=1+\left(\frac{3x+2}{3x-5}-1\right)=1+\frac{3x+2-3x+5}{3x-5}=1+\frac{7}{3x-5}$$

Отже, величина $\frac{7}{3x-5}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$. Обернена величина дорівнює $\frac{3x-5}{7}$.

Перетворимо вихідний вираз, що стоїть під знаком границі.

$$\left(\frac{3x+2}{3x-5}\right)^{x+3}=\left[\left(1+\frac{7}{3x-5}\right)^{\frac{3x-5}{7}}\right]^{\frac{7(x+3)}{3x-5}}$$

Основа прямує до e, тобто $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3\tilde{o}-5}\right)^{\frac{3\tilde{o}-5}{7}}=e$ (за другою важливою границею).

Тоді відшукання границі зводиться до відшукання границі показника.

$$I=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{7}{3x-5}\right)^{\frac{3x-5}{7}}\right]^{\frac{7(x+3)}{3x-5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7(x+3)}{3x-5}\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7+\frac{3}{x}}{3-\frac{5}{x}}}=e^{\frac{7}{3}},$$ де $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}=0,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0.$

Приклад 9. $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+2}{x^2-2x+1}\right)^{\frac{3x^2}{x-1}}=\left\|1^{\infty}\right\|$

Виконаємо перетворення з основою й показником степеня аналогічні перетворенням попереднього приклада.

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-4x+2}{x^2-2x+1}-1\right)^{\frac{3x^2}{x-1}}=$$

$$=\left\|\frac{x^2-4x+2}{x^2-2x+1}-1=\frac{x^2-4x+2-x^2+2x-1}{(x-1)^2}=\frac{-2x+1}{(x-1)^2}\right\|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2x+1}{(x-1)^2}\right)^{\frac{(x-1)^2}{-2x+1}}\right)^{\frac{(-2x+1)}{(x-1)^2}\cdot\frac{3x^2}{(x-1)}}=e^{3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^3}}=e^{-6}.$$

Приклад 10. $I=\lim\limits_{x\to0}(1+tg\,2x)^{\frac{1}{\arcsin 3x}}$

Використаємо рівність границь

$\lim(1+\alpha)^{\beta}=\lim(1+\alpha_1)^{\beta_1}$, $\quad$ *(A)*

де $\alpha\sim\alpha_1$, $\beta\sim\beta_1$, тобто нескінченно малі α і α_1 еквівалентні й нескінченно великі β і β_1 теж еквівалентні. Урахуємо, що $tg2x\sim 2x$, $\frac{1}{\arcsin 3x}\sim\frac{1}{3x}$, тоді

$$I=\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}.$$

Приклад 11. $I=\lim\limits_{x\to0}(\cos x+2\sin x)^{\frac{1}{x}}=\left\|1^{\infty}\right\|=$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+(\cos x+2\sin x-1)\right)^{\frac{1}{x}}\left\|\begin{array}{l}\cos x+2\sin x-1=(\cos x-1)+2\sin x\underset{x\to0}{\sim}2x,\\ \text{тому що }\cos x-1\underset{x\to0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2}\ .\\ \text{В сумі нескінченно малу більш високого}\\ \text{порядку можна опустити.}\end{array}\right\|$$

За формулою (*A*) одержимо

$$I=\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2}=e^{2}.$$

При знаходженні границі при $x\to a$ зручна заміна змінної $x-a=t$, тоді $t\to0$.

Приклад 12.

$$\lim_{x\to4}\frac{2^x-16}{\sin\pi x}\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to4}\frac{16\left(2^{x-4}-1\right)}{-\sin(4\pi-\pi x)}\left\|\begin{array}{l}x-4=t,\ x\to4,\quad t\to0\\ 2^{x-4}-1\sim(x-4)\ln2=t\ln2\\ \sin(4\pi-\pi x)\sim\pi(4-x)=-\pi t\end{array}\right\|=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{16\cdot t\ln2}{\pi t}=\frac{16\ln2}{\pi}.$$

Приклад 13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2 x}=\left\|1^{\infty}\right\|\left\|\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}-x=t,\ t\to 0\\ x=\frac{\pi}{2}-t;\ \sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t\\ tgx=tg\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\mathrm{c}tgt=\frac{1}{tgt}\end{array}\right\|$

$$=\lim_{t\to 0}(\cos t)^{\frac{1}{tg^2 t}}=\lim_{t\to 0}\left(1+(\cos t-1)\right)^{\frac{1}{tg^2 t}}\left\|\cos t-1\sim-\frac{t^2}{2},\ \frac{1}{tg^2 t}\underset{t\to 0}{\sim}\frac{1}{t^2}\right\|$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0}\left[\left(1-\frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{2}{t^2}}\right]^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Приклад 14. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|\left\|\begin{array}{l}\pi-x=t\\ x=\pi-t,\quad t\to 0\end{array}\right\|=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3(\pi-t)}{\sin 2(\pi-t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(3\pi-3t)}{\sin(2\pi-2t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi-3t)}{-\sin 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{3t}{-2t}=-\frac{3}{2}.$$

Приклад 15.

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\frac{1}{2}\lim_{x\to 16}\frac{\left(1+\left(\frac{x}{16}-1\right)\right)^{\frac{1}{4}}-1}{\left(1+\left(\frac{x}{16}-1\right)\right)^{\frac{1}{2}}-1}==\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{x}{16}-1\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{16}-1\right)}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 16.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-\sqrt{3}tgx}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|\left\|\begin{array}{l}\frac{\pi}{6}-x=y,\\ x=\frac{\pi}{6}-y,\quad y\to 0\end{array}\right\|\begin{array}{l}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{1-\sqrt{3}tg\left(\frac{\pi}{6}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sqrt{3}\left(tg\frac{\pi}{6}-tg\left(\frac{\pi}{6}-y\right)\right)}{\sin y}=\\ \sqrt{3}\cdot\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{\sin y\cos\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}-y\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{4}{\sqrt{3}}.\end{array}$$

Приклад 17.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\(x-1\to 0)}}\frac{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^2}{1+\cos\pi x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\begin{array}{l}x-1=z,\ z\to 0\Rightarrow x=1+z\\ \sqrt[4]{x}-1=\left(1+z\right)^{\frac{1}{4}}-1\underset{z\to 0}{\sim}\frac{1}{4}z\\ 1+\cos\pi x=1+\cos(\pi+\pi z)=1-\cos\pi z\underset{z\to 0}{\sim}\frac{\pi^2 z^2}{2}\end{array}\right\|=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{16}z^2}{\frac{\pi^2}{2}z^2}=\frac{1}{8\pi^2}.$$

Приклад 18.

$$\lim_{x\to 3}\left(\sin\frac{x-3}{2}tg\frac{\pi x}{6}\right)=\|0\cdot\infty\|\left\|\begin{array}{l} x-3=y,\ y\to 0,\ x=y+3,\ \sin\frac{x-3}{2}=\sin\frac{y}{2}\underset{y\to 0}{\sim}\frac{y}{2} \\ tg\frac{\pi x}{6}=tg\frac{\pi}{6}(y+3)=tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi y}{6}\right)=-ctg\frac{\pi y}{6}= \\ -\frac{1}{tg\frac{\pi y}{6}}\underset{y\to 0}{\sim}\frac{-1}{\frac{\pi y}{6}}=\frac{-6}{\pi y} \end{array}\right\|=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\frac{y\cdot 6}{2\pi y}=-\frac{3}{\pi}$$

Приклад 19.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tg^2x\left(\sqrt{2\sin^2 x+3\sin x+4}-\sqrt{\sin^2 x+6\sin x+2}\right)=\|\infty\cdot 0\|$$

$$=\left\|\begin{array}{l} \sin x=y,\ y\to 1 \\ tg^2x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{y^2}{1-y^2} \\ \frac{y^2}{1-y^2}=\frac{y^2}{(1-y)(1+y)}\sim\frac{1}{2(1-y)} \end{array}\right\|=\frac{1}{2}\lim_{y\to 1}\frac{\sqrt{2y^2+3y+4}-\sqrt{y^2+6y+2}}{1-y}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{y\to 1}\frac{2y^2+3y+4-y^2-6y-2}{(1-y)\left(\sqrt{2y^2+3y+4}+\sqrt{y^2+6y+2}\right)}=\frac{1}{12}\lim_{y\to 1}\frac{y^2-3y+2}{1-y}=\frac{1}{12}\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y-2)}{1-y}=\frac{1}{12}.$$

4.4. Приклади порівняння нескінченно малих величин

При вивченні різних питань, пов'язаних з поняттям нескінченно малої величини, потрібно розрізняти нескінченно малі за характером їхньої зміни. Одні нескінченно малі наближаються до нуля «швидше», інші «повільніше».

Приклад 1. Перевірити, чи є еквівалентними нескінченно малі величини

$f(x)=e^{\sin x}-e$ i $g(x)=arc\sin(1-\sin x)$ при $x\to\frac{\pi}{2}$.

Знайдемо границю відношення

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin x}-e}{\arcsin(1-\sin x)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|\left\|\begin{array}{l} e^{\sin x}-e=e\left(e^{\sin x-1}-1\right)\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim}e(\sin x-1) \\ \arcsin(1-\sin x)\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim}1-\sin x,\textit{бо}\ \arcsin y\underset{y\to 0}{\sim}y \end{array}\right\|$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e(\sin x-1)}{1-\sin x}=-e.$$

Відповідь: Нескінченно малі величини $f(x)\,i\,g(x)$ є нескінченно малими одного порядку, але не еквівалентними.

Приклад 2. Визначити при $x \to 0$ порядок нескінченно малої $\alpha = 2^{x\sqrt{x}} - \cos x$ відносно x.

При розв'язанні питання про відносний порядок малості нескінченно малих величин обчислюють границю відношення $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{x^k}$, де k потрібно знайти таке, щоб дана границя була сталою, відмінною від нуля. При цьому, нескінченно мала величина α буде величиною *k-го* порядку щодо нескінченної малої величини x.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{2^{x\sqrt{x}} - \cos x}{x^k} = \left\| \begin{array}{l} 2^{x\sqrt{x}} - \cos x = \left(2^{x\sqrt{x}} - 1\right) - \left(\cos x - 1\right) \sim \\ \sim x^{\frac{3}{2}}\ln 2 + \dfrac{x^2}{2} \sim x^{\frac{3}{2}}\ln 2, \textit{ бо } \dfrac{x^2}{2} = 0\left(x^{\frac{3}{2}}\ln 2\right) \end{array} \right\|$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^{3/2}\ln 2}{x^k} \underset{k=\frac{3}{2}}{=} \ln 2$$

Відповідь: Порядок малості нескінченно малої α відносно x дорівнює $\dfrac{3}{2}$.

Приклад 3. Знайти відносний порядок малості при $x \to \dfrac{\pi}{3}$ функцій $\alpha = tg^3 x - 3tgx \;і\; \beta = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\alpha}{\beta^k} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{tg^3x - 3tgx}{\cos^k\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{tgx\left(tg^2x - tg^2\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^k\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{-tgx\left(tgx + tg\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}\sin^k\left(\frac{\pi}{3} - x\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}{\frac{1}{4}}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{\sin^k\left(\frac{\pi}{3} - x\right)} \underset{(k=1)}{=} -24.$$

Відповідь: Нескінченно малі α і β одного порядку малості ($k = 1$).

Приклад 4. Визначити порядок малості при $x \to 0$ функції $\alpha = \sqrt[7]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1$ відносно x.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+\sqrt[3]{x}} - 1}{x^k} = \left\|\frac{0}{0}\right\| \left\| \begin{array}{l} \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^{\frac{1}{7}} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{7}x^{\frac{1}{3}} \\ \text{за формулою} \\ (1+x)^m - 1 \underset{x\to 0}{\sim} mx \end{array} \right\| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{7}x^{\frac{1}{3}}}{x^k} \underset{k=\frac{1}{3}}{=} \frac{1}{7}.$$

Відповідь: Функція α нескінченно мала порядку $\dfrac{1}{3}$ відносно x при $x \to 0$.

4.5. Неперервність функції

Якщо обмежитися інтуїтивним поясненням, то лінія неперервна, якщо її можна накреслити, не відриваючи олівця від паперу.

Означення 1. Функція називається *неперервною* в точці , якщо вона визначена в цій точці й у деякому її околі й

.   (4.5. 1)

Оскільки , рівність (4.5. 1) можна переписати:

,   (4.5. 2)

тобто для неперервної функції в точці символ *"lim"* – граничного переходу й символ функції " " можна переставляти.

Якщо в рівності (4.5. 1) перенести в ліву частину й внести під знак границі, як константу, то одержимо

.   (4.5. 3)

Різниця називається приростом аргументу й позначається , а $f(x)-f(x_0)$ – приростом функції й позначається Δf .

У цих позначеннях рівність (4.5. 3) перепишеться у вигляді: .

Означення 2. Функція називається *неперервною* в точці , якщо нескінченно малому *приросту аргументу* в цій точці відповідає нескінченно малий *приріст функції*.

Означення 3. (мовою «ε-δ»). Функція називається *неперервною* в точці , якщо $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$, що для всіх *x*, що задовольняють нерівності $|x-x_0|<\delta$ виконується нерівність $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Однобічна неперервність

Означення. Функція , визначена в деякому околі точки при , називається неперервною в точці ліворуч (праворуч), якщо

( ).   (4.5.4)

Приклад 1. Функція $y=\begin{cases} x^2, \text{ якщо } x\le 1 \\ 2x, \text{ якщо } x>1 \end{cases}$ в точці *x=1* за означенням є неперервною ліворуч.(рис.4.8)

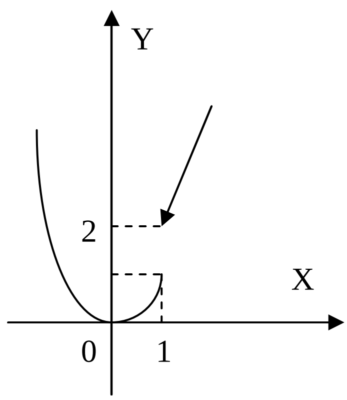


Рис. 4.8

Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу, то вона називається *неперервною на всьому інтервалі*.

Якщо функція неперервна в кожній внутрішній точці відрізка й, крім того, неперервна праворуч у точці й ліворуч у точці , то вона називається *неперервною на відрізку* .

Всі *елементарні функції є неперервними* у своїй області визначення.

4.5.1. Точки розриву та їхня класифікація

З означення 1 неперервності функції витікає, що функція неперервна в точці x_0 , якщо виконуються умови:

1. Функція $f(x)$ визначена в точці $x = x_0$ й деякому її околі й $f(x)=A$.
2. Існує скінченна права границя функції $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) = B$.
3. Існує скінченна ліва границя функції $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = C$.
4. Однобічні границі рівні, тобто $B=C$.
5. Однобічні границі дорівнюють значенню функції в точці $x = x_0$, тобто $A=B=C=f(x_0)$.

Якщо не виконується хоча б одна з перерахованих умов, то говорять, що функція має (терпить) *розрив* у точці $x = x_0$. Розрізняють точки розриву *I й II роду*. Якщо в точці розриву функція *має* скінченні однобічні границі , то це – *точка розриву I роду*. Якщо ж хоча б одна з однобічних границь наближається *до нескінченності або принципово не існує,* то точка $x = x_0$ є *точкою розриву II роду*.

Зокрема, якщо не виконана умова 1 і відповідно 5, то точка $x = x_0$ називається точкою *усувного розриву* (I роду), тому що довизначивши функцію в точці розриву, одержимо неперервну функцію.

Якщо існують *скінченні однобічні границі*, але вони *не рівні* між собою, тобто B≠C, то точка $x = x_0$ називається *точкою розриву I роду типу «стрибок»* ($|B-C|$ – величина стрибка функції).

Отже, для визначення характеру точки розриву функції треба:

1. Знайти точки в яких функція може мати розрив.
2. Обчислити однобічні границі й .
3. З огляду на отримані значення цих границь, зробити висновок про характер розриву.

Дослідити на неперервність і класифікувати точки розриву функції.

Приклад 1. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

Функції $\sin x$ і x визначені на всій числовій осі, але в точці $x_0=0$ функція $\frac{\sin x}{x}$ невизначена. Однобічні границі збігаються, тобто $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = 1$, при цьому $f(+0)=f(-0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Умова $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ не виконується, тому в точці $x_0=0$ функція має усувний розрив (рис. 4.9). Довизначимо функцію *f(x)* у точці $x_0=0$, визначивши $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$

Тоді *F(x)* неперервна на всій числовій осі.

Приклад 2. $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ $x_0=0$ – точка розриву.

Однобічні границі рівні:

$f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $f(-0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin(-x)}{x}=-1$, тобто *f(+0)* і *f(-0)* існують, але не рівні між собою (не виконується умова 4). Отже, $x=0$ – точка розриву І роду, «стрибок» (Рис. 4.10).

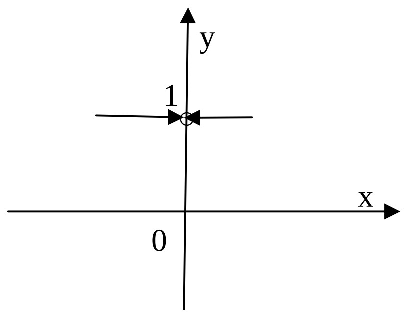


Рис.4.9

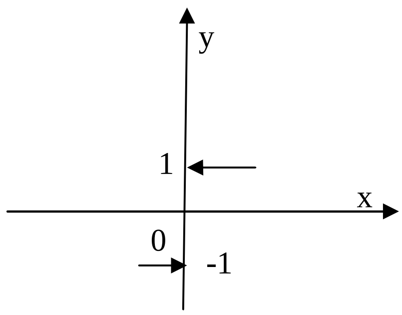


Рис.4.10

Приклад 3. $f(x)=2^{\frac{x}{4-x}}$

Показникова функція неперервна всюди в області визначення, але в точці $x_0=4$ функція невизначена (Рис. 4.11).

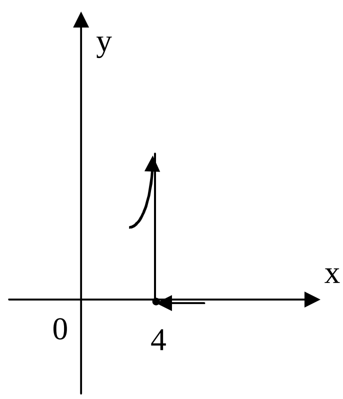


Рис. 4.11

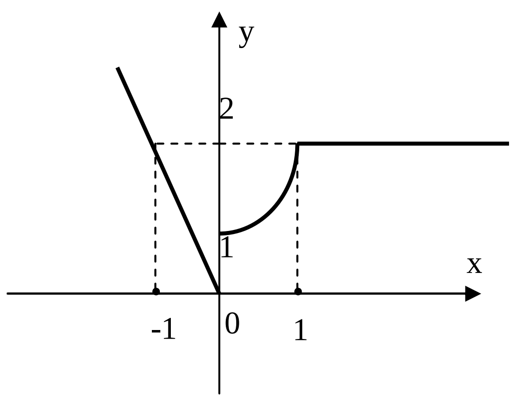


Рис. 4.12

Знаходимо $\lim\limits_{x\to 4+0}2^{\frac{x}{4-x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 4-0}2^{\frac{x}{4-x}}=\infty$. Точка x=4- точка розриву другого роду.

Приклад 4.

$$f(x)=\begin{cases}-2x & \text{при } x<0,\\ x^2+1 & \text{при } 0\le x<1,\\ 2 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Функція $f(x)$ визначена на всій числовій осі; функції $-2x$, x^2+1, 2 неперервні всюди як елементарні функції. Однак у точках $x_1=0$ й $x_2=1$ змінюються її аналітичні вирази.

Дослідимо точку $x_1=0$. Обчислимо однобічні границі:

$$\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}(-2x)=0=f(-0),\quad \lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}(x^2+1)=1=f(+0).$$

У точці $x_1=0$ однобічні границі існують і різні, отже, маємо розрив 1-го роду – «стрибок».

Дослідимо точку $x_2=1$. Обчислимо однобічні границі:

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1-0}(x^2+1)=2=f(1-0),\quad \lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1+0} 2=2=f(1+0).$$

Значення функції $f(1)=2$. Оскільки $f(1\text{-}0)=f(1+0)=f(1)=2$, функція $f(x)$ неперервна в точці $x_2=1$(Рис. 4.12).

4.5.2. Основні теореми про неперервні функції

Теореми. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в точці x_0, тоді:

1. $f(x)\pm\varphi(x)$− неперервна функція, тобто сума неперервних функцій є функція неперервна.
2. $f(x)\cdot\varphi(x)$) − неперервна функція, тобто добуток неперервних функцій є функція неперервна.
3. $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$(за умови $\varphi(x_0)\neq0$) – неперервна функція, тобто частка неперервних функцій є функція неперервна у всіх точках, де знаменник не дорівнює нулю.

Теорема 4. Нехай функція $x=\varphi(t)$ неперервна в точці a, а функція $y=f(x)$ неперервна в точці $b=\varphi(a)$, тоді складна функція $y=f(\varphi(t))$ буде неперервна в точці a.

Нехай функція $y=f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$, причому множиною значень цієї функції є відрізок $[\alpha,\beta]$. Нехай кожному $y\in[\alpha,\beta]$ відповідає тільки одне значення $x\in[a,b]$, для якого $f(x)=y$. Тоді на відрізку $[\alpha,\beta]$ можна визначити функцію $x=f^{-1}(y)$, ставлячи у відповідність кожному значенню $y\in[\alpha,\beta]$ те значення $x\in[a,b]$, для якого $f(x)=y$. Функція $x=f^{-1}(y)$ називається *оберненою* для функції $y=f(x)$.

Теорема 5. Нехай на відрізку $[a,b]$ задана строго монотонна неперервна функція $y=f(x)$, і нехай $\alpha=f(a)$, $\beta=f(b)$, $(\alpha<\beta)$. Тоді ця *функція має* на відрізку $[\alpha,\beta]$ строго монотонну й неперервну *обернену* функцію $x=f^{-1}(y)$ або $x=\varphi(y)$.

4.6. Властивості функцій, неперервних на відрізку

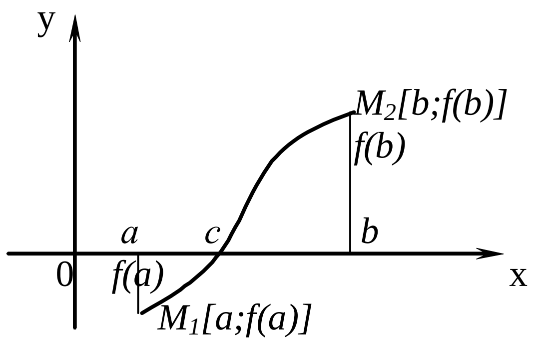


Рис. 4.13

Властивості функцій, неперервних на відрізку, формулюються нижче у вигляді теорем.

Теорема *(Больцано-Коші)*. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ й на кінцях цього відрізка приймає значення різних знаків, то між точками a й b знайдеться, принаймні, одна точка $x = c$, у якій функція обертається в нуль: $f(c) = 0, a < c < b$. Ця теорема має наступний геометричний зміст: графік неперервної функції $y = f(x)$, що з'єднує точки $M_1[a, f(a)]$ й $M_2[b, f(b)]$, де $f(a) < 0$ й $f(b) > 0$ (або $f(a) > 0$ й $f(b) < 0$), перетинає вісь Ox, принаймні, в одній точці (рис. 4.13).

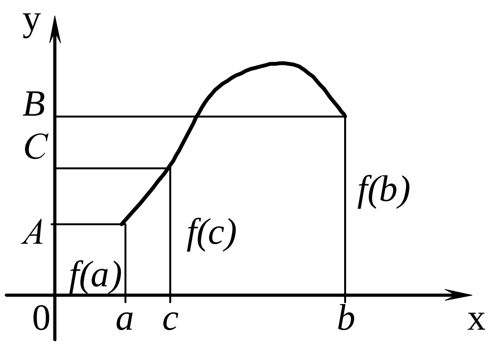


Рис. 4.14

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на сегменті $[a,b]$ причому $f(a) = A, f(b) = B$, і нехай C – будь-яке число між A и B, тобто $A < C < B$, тоді на відрізку $[a,b]$ знайдеться така точка $x = c$, у якій $f(c) = C$ (рис. 4.14).

Теорема *(перша теорема Вейерштрасса)*. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Теорема *(друга теорема Вейерштрасса)*. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на сегменті $[a,b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх точних верхньої й нижньої граней (тобто знайдуться такі точки x_1 і x_2, що $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$).

Контрольні завдання до розділу 4

Завдання 1. Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя.

4.1.1. $а) \lim\limits_{x \to 2} \left(3x^2 - 3x + 4\right)$ $\qquad$ $б) \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 - x + 4}{2x^3 - 4x^2 + 3}$

$в) \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{3x^4 + 5x - 3} + \sqrt[3]{2x^3 + 5x^2 + 4}}{\sqrt[4]{7x^3 + 4x^2 + 3} - \sqrt{2x^5 + 7x^4 - 5}}$ $\qquad$ $г) \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 + x - 21}$

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2}}{\sqrt{8x+1}-3}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 2x}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$ *и)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{2x}}{2x-arctg\,3x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln\left(1+x^3\right)\right)^{\frac{3}{x^2\sin x}}$ *м)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$

4.1.2. *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\left(2x^3+3x^2-1\right)\left(7x+12\right)$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x^2+3}{4x^3+7x-5}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2+4x-3}-\sqrt{3x^2-2x+7}\right)$ *г)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^3+8}$

д) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x}{x\sin x}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln\left(x+2\right)-\ln x\right]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$ *и)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{1+3^x}\right)^{1/x}$ *м)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$

4.1.3. *а)* $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2+5x-4}{x+7}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+4x^4-3x-2}{7x^5-2x+5}$

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{5x^4-3x^3+7+x}+\sqrt[3]{x^2-4x+3}}{\sqrt[5]{x^2+3x-2}+\sqrt[6]{x+5}}$ *г)* $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+2}{x-3}-\dfrac{x^2-7x}{x^2-2x-3}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ *е)* $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\left(\pi/2-x\right)^2}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{x+2}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$ *и)* $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x}$ *м)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{x}\right)^{2/(x+2)}$

4.1.4. *а)* $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2}x^2-5x-6\right)$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{2x^2+4x-3}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{5x^2-4x+3}+\sqrt[3]{x^3-4x^2+5}}{x^2+\sqrt{3x^2+5x-3}+\sqrt[4]{x-3}}$ *г)* $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-5x-6}{6x^2-37x+6}$

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos x-1}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{x+2}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{3(\sqrt[3]{1+x}-1)}$ *и)* $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3^{2x}-5^x}{tg\,x-\sin 2x}\right)$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{arctg^2\sqrt{x}}\right)^{2/\sin x}$ *м)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{6x}\right)^{x/x+2}$

4.1.5. *а)* $\lim\limits_{x\to -1}(2x-3)(x+2)$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x-2}{5x^2+3x-1}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^3+2x+5}-\sqrt{x^3-x+4}\right)\sqrt{x}$ *г)* $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+8x+16}{2x^2+\frac{17}{2}x+2}$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x-2)-\ln(x+3)\right]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{tg(\pi(2+x))}$ *и)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\sin^2\pi x}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{arctg\,x+x^3}$

л) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x+4}\right)^{4x}$ *м)* $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x+3}$

4.1.6. *а)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(9-4x)(6+x)}{x-2}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+5x-3}{2x^3+4x^2+5}$

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^6+4x^3-3}-\sqrt{x^6-x+4}\right)$ *г)* $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{x+2}{x-8}-\dfrac{x^2+6}{x^2-9x+8}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{x}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{x-x^2}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{tg(2\pi(x+1/2))}$ *и)* $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{tg\,3x}{tg\,x}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0}x(\ln(x+1)-\ln(x-3))$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{1/\sin^2 3x}$ *м)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$

4.1.7. *а)* $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(3x^2-4x-10\right)$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x+14}{7x^3+2x^2-3}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{6x^3+5x+3}+\sqrt[3]{x^4+6x^2-3}}{\sqrt{x^3-5x+3}+\sqrt[6]{x^2-4x+5}}$

г) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-5x-63}{x^2-6x-7}$

д) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ *е)* $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{x-1}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{4x^2}$ и) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x-tg^2 x}{(x-\pi)^4}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-5^{3x}}{x-\sin 9x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(1-ln(1+\sqrt[3]{x}))^{4/(sin\sqrt[3]{x})}$ м) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{3x}-1}{x}\right)^{\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)}$

4.1.8. а) $\lim\limits_{x\to -4}(x-6)\left(\dfrac{1}{3}x+8\right)$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+18x-3}{3x^3+5x+10}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{12x^5+5x-3}+\sqrt[3]{x^2-3x+2}}{\sqrt[5]{5x^3-4x+3}+\sqrt[5]{x^6+5x-3}}$ г) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{3x^2-7x-40}{x^2-10x+25}\right)$

е) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$ ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\left[\ln(x+2)-\ln(x-1)\right]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{\cos 2x-\cos 3x}$ и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2arctg\, x-\sin x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{(\arcsin\sqrt{x})^2}\right)^{3/x}$ м) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tg\,4x}{x}\right)^{2+x}$

4.1.9. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x-5)(3x-4)}{x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+4x+3}{10x^3+5x^2-1}$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+7x-4}-\sqrt{x^2+3}\right)$ г) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{x^2+x+1}{x^2+3x+2}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{\sin 3x}$ ж) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$ и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^x-5^{-3x}}{2\arcsin x-x}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+6}\right)^{2x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\pi x)^{1/x\cdot\sin\pi x}$ м) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^3}-1}{x^2}\right)^{\frac{8x+3}{1+x}}$

4.1.10. а) $\lim\limits_{x\to 4}\left(3x^2-2x+5\right)$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^4+6x-1}{5x^4-4x^3+3}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+4x-5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-2x-15}-\sqrt[4]{x+5}}$ г) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-2x-15}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{9-x}}{x-1}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{arctg 3x}$ ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\, 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$ и) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^x-e^{2\pi}}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$

$л)\ \lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 3x)^{1/\ln\cos x}$ $\quad$ $м)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$

4.1.11. $а)\ \lim\limits_{x\to -2}(x-3)(2x+5)$ $\quad$ $б)\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+8x^2+1}{12x^3-9x+5}$ $\quad$ $е)\ \lim\limits_{x\to \pi/6}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{1-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$

$в)\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{3x^2+2x-1}+\sqrt[5]{x^2+4x-3}}{\sqrt[6]{5x^7+4x+5}+\sqrt{x+3}}$ $\quad$ $г)\ \lim\limits_{x\to 1/3}\left(\frac{9x^2-6x+1}{3x^2+2x-1}\right)$

$д)\ \lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{3x+a}-\sqrt{x+3a}}{x-a}$ $\quad$ $ж)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$

$з)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$ $\quad$ $и)\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$ $\quad$ $k)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$

$л)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)^{ctg\,x}$ $\quad$ $м)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x}{2x}\right)^{2+x}$

4.1.12. $а)\ \lim\limits_{x\to 5}\frac{(x^2-9)(x-3)}{x+5}$ $\quad$ $б)\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{25x^4+7x^3-3}{8x^4+5x+4}$

$в)\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2-2x-1}\right)$ $\quad$ $г)\ \lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{x+2}{x-4}-\frac{x^2-x}{x^2-3x-4}\right)$

$д)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ $\quad$ $е)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}$ $\quad$ $ж)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x+x^3}$

$з)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x+5\pi/2)\cdot tg\,x}{arctg\,2x^2}$ $\quad$ $и)\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$ $\quad$ $k)\ \lim\limits_{x\to 0}(1-x\cdot\sin^2 x)^{1/\ln(1+\pi x^3)}$

$л)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ $\quad$ $м)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{\frac{6}{1+x}}$

4.1.13. $а)\ \lim\limits_{x\to 3}\left(-x^2+2x-\frac{1}{6}\right)$ $\quad$ $б)\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+5x^2+11}{13x^3-5x-7}$

$в)\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{3x^5+8x^2-5}+\sqrt[3]{2x^2-x}}{\sqrt[8]{x^9+10x-1}-\sqrt{x+5}}$ $\quad$ $г)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x^2-x-1}{4x^2-7x+3}\right)$

$д)\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ $\quad$ $е)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg^2 2x}{x\sin 3x}$ $\quad$ $ж)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$

$з)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{9\ln(1-2x)}{4arctg\,3x}$ $\quad$ $и)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$ $\quad$ $k)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{4^x-2^{7x}}{tg\,3x-x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-5^{\arcsin x^3}\right)^{\operatorname{cosec}^2 x/x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2}$

4.1.14. *а*) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)(x-5)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+5x^4-4}{3x^4+6x+11}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{6x^2+3}+\sqrt[5]{x^3-4x+5}}{\sqrt[4]{3x^2+5x-4}+\sqrt[4]{3x^2-x-1}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 1/2}\left(\dfrac{8x^3-1}{4x^2-4x+1}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)[\ln(x-3)-\ln(x+1)]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos(\pi(x+1)/2)}$ *и*) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{-x}}{tg\,2x-\arcsin x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos 3x)^{1/\ln(1+x^2)}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(tg(x+\dfrac{\pi}{3})\right)^{x+2}$

4.1.15. *а*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x^2-4)(x+2)}{3x-4}$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^5+7x^4-12}{3x^5+6x^3-13x}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+4x+5}-\sqrt{x^3-1}\right)$ *г*) $\lim\limits_{x\to 0{,}1}\dfrac{10x^2-21x+2}{x^2+0{,}9x-0{,}1}$

д) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2-arctg\,2x^2}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x+3}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ *и*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x}}{tg\,\pi x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\arcsin^2 x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\sin x}\right)^{ctg\,\pi x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+8}{3x^2+10}\right)^{x+2}$

4.1.16. *а*) $\lim\limits_{x\to 5}\left(x^2-2x-3\right)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^3+7x^2+5}{23x-17x^3+8}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{arctg^2(-3x)}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[10]{x^{11}+8x^{10}+5}+\sqrt[7]{x^{12}+7x^2+5}}{\sqrt[8]{x^9+x^5+1}+\sqrt{x+8}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 7}\left(\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-14x+49}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(2x+1)-\ln(2x-1)]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{3arctg\,x}$ *и*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin\pi x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin 3x-\sin 5x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\ln(1+\sin^2 x)}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin(x+2))^{3/(3+x)}$

4.1.17. *а*) $\lim\limits_{x\to 5}(x-10)(x+7)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11x^5+x^4-19}{12x^3+10x^5+2}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^4+8x^3-5}+\sqrt[6]{x^5+4x+5}}{(x^2+5)\sqrt[3]{x^6+3x+2}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to -5}\left(\frac{x^2+6x+5}{x^2-x-30}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{4+x}-2}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin(\pi(x+1))}{\ln(1+2x)}$ *и*) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\ln 2x-\ln\pi}{\cos 3x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^{3x}-3^{2x}}{tg\,x+x^3}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{1/\ln(1+tg^2(\pi x/3))}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^{2x}-1}{x}\right)^{x+1}$

4.1.18. *а*) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{(x-4)(2x+7)}{x-6}$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^4+17x^2+9}{5x^4+6x-3}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2+8}-\sqrt{x^4+x+3}\right)$ *г*) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{3x^2-2x-8}$

д) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x+1}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{\ln^2(1+3x)}$ *и*) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\ln tg\,x}{\cos 2x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{2x}}{2tg\,x-\arcsin x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(3-2\cos x)^{-\operatorname{cosec}^2 x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^4+5}{x+10}\right)^{\frac{4}{x+2}}$

4.1.19. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x-3\right)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-3x^2+5}{6x^3+3x^4-4}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 0}x\,ctg 2x$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{6x^7+2x^5-4}-\sqrt[3]{4x^2-3x}}{\sqrt[6]{7x^5-6x^4-3}+\sqrt[3]{x+5}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\left(\frac{3x}{2x+1}-\frac{-3x-5}{2x^2+3x+1}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x}}{3x}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\left[\ln(3x-1)-\ln(3x+1)\right]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(\pi(x+2))}$ *и*) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-7^{x}}{arctg\,3x-5x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\sin^2 x}\right)^{1/\ln\cos x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{11x+8}{12x+1}\right)^{\cos^2 x}$

4.1.20. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}(x+4)(3x-6)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2+4x-3}{6x^3+5x+100}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{6x^5+5x^4-3}+\sqrt[5]{x^6+5x+3}}{\sqrt[6]{4x^{10}-7x^5+10}+x+\sqrt{x-3}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to17}\left(\dfrac{x^2-18x+17}{x^2-16x-17}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt[3]{2x+2}-2}$ *е*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,tg5x}{arctg^2(2x)}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x}\right)^{5x+2}$

з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x}-1}$ *и*) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-tg\,x}$

л) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3+8}\right)^{\frac{2}{x+1}}$

4.1.21. *а*) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x^2-27)(x+8)}{x+8}$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2-7x^3+8}{5x^3-x^2-10}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-5}-\sqrt{x^2-x+10}\right)$ *г*) $\lim\limits_{x\to-8/3}\dfrac{9x^2+48x+64}{3x^2+5x-8}$

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$ *е*) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)^{x^2}$

з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{x\cdot\sin x}$ *и*) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^{5x}-9^{-2x}}{\sin x-tg\,x^3}$

л) $\lim\limits_{x\to0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{ctg^2x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right)^{\frac{3}{x+8}}$

4.1.22. *а*) $\lim\limits_{x\to-1}(3x^2-2x+4)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-4x+7}{6x^7+2x-10}$ *е*) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin^2x-\sin^2\alpha}{x^2-\alpha^2}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5x^3-4x+3}-\sqrt[5]{x^6+x-3}}{\sqrt{2x^3+3x-1}-\sqrt[4]{3x^5+4x-2}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{3x+2}{x-4}-\dfrac{2x^2-3}{x^2-3x-4}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt[3]{2x+4}-2}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)\left[\ln(2x-1)-\ln(2x+3)\right]$

з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}$ *и*) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\cos\frac{\pi x}{2}}$ *k*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-tg\,x}$

л) $\lim\limits_{x\to0}\left(3-\dfrac{2}{\cos x}\right)^{\cos ec^2x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos\dfrac{x}{\pi}\right)^{1+x}$

4.1.23. *а*) $\lim\limits_{x\to-3}(x+4)(2x-7)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+5x+10}{2x^3+15x+21}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5x^3-4x+3}+\sqrt[5]{x^6+x-3}}{\sqrt[5]{x^4+3x^3-5}+\sqrt[4]{2x^6+x^5+7}}$ г) $\lim\limits_{x\to-7}\left(\dfrac{x^2+10x+21}{x^2+5x-14}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$ е) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$ ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{1-x}\right)^{3x-2}$

з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin(\pi(x/2+1))}$ и) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{tg\,\pi x}{x+2}$ k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\ln(1-3x)}$

л) $\lim\limits_{x\to0}(2-5^{arctg\,x^3})^{1/\ln(1+\sin^3 x)}$ м) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{2(x+5)}$

4.1.24. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(2x+3)(4-x)}{x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{17x^3-6x^2-3}{3x^2-x+100}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-x+5}-\sqrt{3x^2+2x-3}\right)$ г) $\lim\limits_{x\to1/3}\dfrac{3x^2-10x+3}{9x^2-6x+1}$

д) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x-h}-\sqrt[3]{x}}{h}$ е) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$ ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2+1}$

з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$ и) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos(x/2)}{\sqrt{x+1-\pi}-1}$ k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{3x}}{\sin3x-tg\,2x}$

л) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-e^{x^2}\right)^{1/(1-\cos\pi x)}$ м) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{arctg\,3x}{x}\right)^{x+2}$

4.1.25. а) $\lim\limits_{x\to2}(5-x^2-2x)$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+4x-7}{5x^2+6x^3+3}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5x^2+4x-2}-\sqrt{x^5+3x^2+2}}{\sqrt[3]{x^7-14x^5+10}+\sqrt[7]{x^2-x-2}}$ г) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x+1}{2x-4}-\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-2}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos3x}{1-\cos2x}$ ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)[\ln(3x+1)-\ln(3x+5)]$

з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 2x-tg^2 x}{\cos x-1}$ и) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$ k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9^{3x}-2^{3x}}{arctg\,2x-7x}$

л) $\lim\limits_{x\to0}(1+\ln(1-(arctg\sqrt{x})^6))^{1/x^3}$ м) $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x+x\right)^{\cos x}$

4.1.26. а) $\lim\limits_{x\to11}\left(\dfrac{1}{22}x-1)(5x+6\right)$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-5x+4}{3x^4+2x-2}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+4x-2}+\sqrt[5]{x^3-4x+3}}{\sqrt[3]{7x^3+5x+4}+\sqrt{x+5}}$ г) $\lim\limits_{x\to1/5}\left(\dfrac{5x^2+4x-1}{5x^2-6x+1}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-4}-1}{\sqrt{x+4}-3}$ *е)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{x/3}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$ *и)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{arctg(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-e^{-2x}}{x+\sin x^2}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{1/arctg^2 3x}$ *м)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x^2}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x+6}}$

4.1.27. *а)* $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{(4x+80)(x-5)}{2x-10}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+7x+2}{8x^2-2x+5}$ *г)* $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{9x^2-1}{9x^2-6x+1}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{7x^2+5x-4}-\sqrt{7x^2-x+6}\right)$ *д)* $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-\sin 2x}{x(1-\cos 2x)}$ *и)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-tg\,x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln(1+\sin^{1/3}x))^{x/\sin x^{4/3}}$ *м)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\frac{e^x-1}{x}}$

4.1.28. *а)* $\lim\limits_{x\to 12}\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}\right)$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+5x^4-3}{3x^3+5x^5+4}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 2x}{x\sin(-3x)}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{7x^3+4x^2-3}+\sqrt[5]{x^6+12x^3-17}}{\sqrt{3x^2+4x-2}+\sqrt[7]{2x^4+3x^3+5}}$ *г)* $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3}{x-2}-\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{1-x}-2}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)[\ln x-\ln(x+5)]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$ *и)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin 2x-\sin x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2x)^{1/\ln(1+3x^2)}$ *м)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{ctg^2 x}$

4.1.29. *а)* $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2}x+5\right)(3-x)$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+7x^2-2}{6x^3+5x+100}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^5+4x^3-5}+\sqrt[3]{3x^4+5x-3}}{\sqrt[4]{7x^{10}+x+10}-\sqrt[6]{x^2+x+2}}$ *г)* $\lim\limits_{x\to 1/4}\dfrac{4x^2+3x-1}{4x^2-17x+4}$

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$ е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$ ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x}\right)^{3x+1}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(\pi(1+x/2))}{\ln(x+1)}$ и) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+tg\,x^2}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln\cos x)^{1/tg^2 x}$ м) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+8x}{2+11x}\right)^{\frac{1}{x^2+1}}$

4.1.30. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x+3)(4x-3)}{5-x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-14x+12}{13x^4+7x-3}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x-3}-\sqrt{2x^2-3x}\right)$ г) $\lim\limits_{x\to\frac{2}{7}}\left(\dfrac{49x^2-28x+4}{7x^2-9x+2}\right)$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{tgx}$ ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)[\ln x-\ln(x+5)]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{\sin 3x}$ и) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{tg\,3x}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^{1/\ln(1+tg^2 3x)}$ м) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin^2 x}{arctg^2 4x}\right)^{2x+1}$

РОЗДІЛ 5
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

5.1. Похідна

Похідною функції y=f(x) у точці x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу наближається до нуля.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

5.1.1. Правила обчислення похідних

Нехай функції $u=\varphi(x)$ й $v=\psi(x)$ мають у певній точці похідні u',v'. Тоді функції

1. y=cu, (c=const); 2. y=u±v; 3. y=uv; 4. $y=\frac{u}{v}, \quad v\neq 0$

також мають похідні в цій точці, які обчислюються за формулами:

$$1)\ (cu)'=cu';\ 2)\ (u\pm v)'=u'\pm v';\ 3)\ (u\cdot v)'=u'v+uv';\ 4)\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}, v\neq 0.$$

Нехай функція $u=\varphi(x)$ має в деякій точці x_0 похідну $u'_x=\varphi'(x_0)$, а функція $y=f(u)$ має у відповідній точці $u_0=\varphi(x_0)$ похідну $y'=f'(u_0)$. Тоді *складна функція* $y=f(\varphi(x))$ в згаданій точці x_0 також буде мати похідну, рівну

$y'(x_0)=f'(u_0)\cdot u'(x_0)$ або $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

Похідна оберненої функції

Якщо функція $y=f(x)$ задовольняє умовам теореми про існування *оберненої функції*, і в точці x_0 має скінченну похідну $f'(x_0)\neq 0$, то для оберненої функції $x=g(y)$ у відповідній точці $x_0=g(y_0)$ також існує похідна рівна

$x'(y_0)=\frac{1}{y'(x_0)}$ або $x'_y=\frac{1}{y'_x}$.

Нижче представлена таблиця 5.1 похідних елементарних функцій у припущенні, що аргумент u є деяка функція від x: $c'=0$.

Таблиця 5.1.

1. $(cu)=cu'$;
2. $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\cdot u'$;
3. $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;
4. $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$;
5. $\left(\log_a u\right)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$;
6. $\left(\ln u\right)'=\dfrac{u'}{u}$;
7. $\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'$;
8. $\left(e^u\right)'=e^u u'$;
9. $\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$;
10. $\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$;
11. $\left(tgu\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$;
12. $\left(ctgu\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$;
13. $\left(\arcsin u\right)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
14. $\left(\arccos u\right)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
15. $\left(arctgu\right)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$;
16. $\left(arcctgu\right)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$;
17. $\left(shu\right)'=chu\cdot u'$;
18. $\left(chu\right)'=shu\cdot u'$;
19. $\left(thu\right)'=\dfrac{u'}{ch^2u}$;
20. $\left(cthu\right)'=-\dfrac{u'}{sh^2u}$

Приклади. Знайти похідні наступних функцій

1) $y=ln\ sinx$

Оскільки $\left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}\cdot u',\quad u'=\left(\sin x\right)'=\cos x$, то $y'=\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x$.

2) $y=tg^{12}\sqrt[3]{\cos x+4x}$

Дана функція є степеневою функцією, основа якої є складна функція, тому обчислення похідної будемо виконувати послідовно, використовуючи правила диференціювання складної функції.

$$y'=12tg^{11}\sqrt[3]{\cos x+4x}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt[3]{\cos x+4x}}\cdot\frac{1}{3}\left(\cos x+4x\right)^{-2/3}\left(-\sin x+4\right).$$

3) $y=arctg\left(3x+5\right)\cdot 3^{\sin^2 2x}+\dfrac{x^{\frac{5}{8}}}{\lg\left(1+tgx\right)}$.

Дана функція є сумою, перший доданок якої у свою чергу є добуток, а другий - частка. Тому послідовно використаємо правила диференціювання суми, добутку, частки, а також складної функції.

$$y'=\frac{3\cdot 3^{\sin^2 2x}}{1+\left(3x+5\right)^2}+arctg\left(3x+5\right)\cdot 3^{\sin^2 2x}\ln 3\cdot 2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2+$$

$$+\frac{\frac{5}{8}x^{-\frac{3}{8}}\lg\left(1+tgx\right)-x^{\frac{5}{8}}\frac{1}{1+tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\ln 10}}{\lg^2\left(1+tgx\right)}.$$

5.1.2. Диференціювання неявних функцій

Якщо рівняння

$$F(x,y)=0 \tag{5.1.1}$$

перетворюється в тотожність, коли в ньому у заміняється функцією *f(x),* то говорять, що *y=f(x)* є *неявна функція,* визначена даним рівнянням (5.1.1). Для того щоб знайти похідну y' функції *y=f(x),* заданої неявно рівнянням (5.1.1.), треба продиференціювати обидві частини тотожності $F(x,y(x))\equiv 0$ по змінній *x,* користуючись правилом диференціювання складної функції. Потім отримане рівняння розв'язати відносно y'.

Приклад. Знайти похідну функції, заданої рівнянням

$\sqrt{x}\cdot y+\sin x\cdot tgy=0$.

Диференціюванням по *x* знаходимо

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}y+\sqrt{x}y'+\cos x tgy+\sin x\frac{y'}{\cos^2 y}=0, \left(\sqrt{x}+\frac{\sin x}{\cos^2 y}\right)y'=-\frac{y}{2\sqrt{x}}-\cos x tgy,$$

$$y'=-\frac{\left(y+2\sqrt{x}\cos x tgy\right)\cos^2 y}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\cos^2 y+\sin x\right)}.$$

5.1.3. Логарифмічне диференціювання. Нехай функція *y=f(x)* має похідну $y'=f'(x)$, яку важко обчислити за допомогою раніше наведених правил і формул, але натуральний логарифм даної функції *ln f(x)* є функція, що диференціюється без особливих утруднень. Тоді для знаходження похідної застосовується метод логарифмічного диференціювання, який полягає в послідовному логарифмуванні вихідної функції *ln y=ln f(x),* а потім диференціюванні її, як функції, заданої неявно. Тоді якщо $\ln y=\varphi(x)$, то $\frac{y'}{y}=\varphi'(x)$, звідки знаходимо $y'=y\cdot\varphi'(x)$ або $y'=f(x)\cdot\varphi'(x)$

Приклади. Знайти похідні функцій:

1. $y=\left(x^3+5x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

Формули для диференціювання даної функції в таблиці немає. Скористаємося методом логарифмічного диференціювання. Прологарифмуємо цю функцію: $\ln y=\frac{1}{x}\ln\left(x^3+5x^2\right)$

Диференціюючи обидві частини рівності, знаходимо

$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\ln\left(x^3+5x^2\right)+\frac{1}{x}\cdot\frac{3x^2+10x}{x^3+5x^2}$, звідки $y'=\left(x^3+5x^2\right)^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln\left(x^3+5x^2\right)+\frac{3x+10}{x^3+5x^2}\right)$

2. $y=\sqrt[3]{\frac{x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}}$.

Безпосереднє обчислення похідної даної функції є громіздким, у той час, як натуральний логарифм у легко диференціюється. Прологарифмуємо цю функцію:

$\ln y = \frac{1}{3}\left(\ln x + \ln\left(x^2+1\right) - 2\ln\left(x^2-1\right)\right).$

Диференціюємо обидві частини тотожності, розглядаючи y як функцію від x, тоді:

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - 2\frac{2x}{x^2-1}\right)$, звідки $y' = \sqrt[3]{\frac{x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - 2\frac{2x}{x^2-1}\right).$

5.1.4. Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної і нормалі

Похідна функції в даній точці чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до кривої в цій точці. Звідси випливає, що *рівняння невертикальної дотичної* до кривій *y=f(x)* у точці $M_0\left(x_0, y_0\right)$ має вигляд

$y - y_0 = y'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$

Рівняння вертикальної дотичної $x = x_0$.

Нормаллю до кривої в точці $M_0\left(x_0, y_0\right)$ *називається пряма, перпендикулярна до дотичної, проведеної до цієї кривої в заданій точці.* Рівняння *негоризонтальної нормалі* має вигляд $y - y_0 = -\frac{1}{y'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right)$.

Рівняння *горизонтальної нормалі* $y = y_0$.

Приклад. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 - 3x^2 - 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Ордината точки дотику $y_0 = 1^3 - 3\cdot 1^2 - 2 = -4$. Кутовий коефіцієнт дотичної $k = y'\big|_{x=1} = \left(3x^2 - 6x\right)\big|_{x=1} = 3 - 6 = -3.$.

Рівняння дотичної y+4=-3(x-1), або *3x+y+1=0.*

Кутовий коефіцієнт нормалі $k_{норм} = -\frac{1}{k_{дотичн.}} = \frac{1}{3}$. Рівняння нормалі $y + 4 = \frac{1}{3}\left(x - 1\right)$, або *x-3y-13=0.*

5.2. Диференціал функції

Функція *y=f(x)* називається диференційовною у даній точці *x*, якщо приріст Δy цієї функції в точці x, що відповідає приросту аргументу Δx, може бути представлений у вигляді

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x, \tag{5.2.1}$$

де *A* – деяке число, що не залежить від Δx, а α – функція аргументу Δx**,** що є нескінченно малою при $\Delta x \to 0$. Головна частина приросту функції $A\cdot\Delta x$, лінійна відносно Δx, називається *диференціалом функції* й позначається $dy = A\cdot\Delta x$.

Теорема. Для того щоб функція *y=f(x)* була *диференційовною* в даній точці *x*, необхідно й достатньо, щоб вона *мала* в цій точці *скінченну похідну*. У процесі доказу цієї теореми з'ясовується зміст *А*, а саме, установлюється, що $A = y'(x)$.

З огляду на цю рівність, диференціал функції можна записати так:

$$dy = y' \cdot \Delta x \,. \qquad (5.2.2)$$

На підставі цієї теореми можна ототожнити поняття диффеpенційовності функції в даній точці з поняттям існування похідної функції в тій же точці. Тому операція знаходження похідної називається *диференціюванням*.

Теорема. Якщо функція *y=f(x) диференційовна* в точці *x*, то вона й *неперервна* в цій точці. Обернене твердження не завжди вірно. Наприклад, функції y =|*x*| (рис. 5.1.а), $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 5.1.б) є неперервними в точці *x=0*, однак вони не диференцційовні в цій точці.

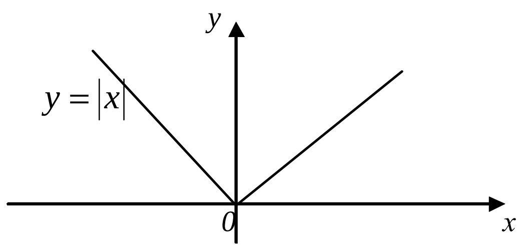


Рис. 5.1.а

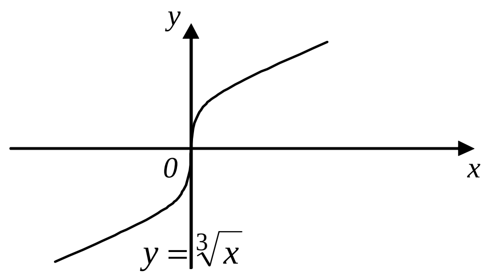


Рис. 5.1.б

Диференціал незалежної змінної *x* дорівнює її приросту, *dx=Δx*, тому

$$dy = y'dx \,. \qquad (5.2.3.)$$

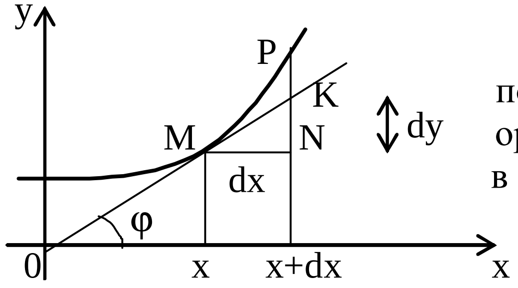
Із цієї формули маємо $y' = \dfrac{dy}{dx}$, тобто похідну від функції *y* по *x* можна розглядати як частку від ділення диференціала функції *y* на диференціал (приріст) незалежної змінної *dx*.

Приклад. Знайти диференціал функції $y = \ln tg\sqrt{x}$,

Розв’язання. $dy = \dfrac{dx}{tg\sqrt{x} \cdot \cos^2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}} = \dfrac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sin 2\sqrt{x}}$.

5.2.1. Геометричний зміст диференціала функції

З формули (5.2.2) випливає, що диференціал функції y=f(x) *дорівнює* $dy = f'(x)dx$. *З огляду на те, що* $f'(x) = tg\varphi$ *(рис.5.2.), одержуємо* dy=tgφ· dx.



Звідси: геометричний зміст диференціала полягає в тому, що він дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної до кривої y=f(x) в точці з абсцисою x при переході від точки дотику в точку з абсцисою x+dx (dy=|KN|).

Рис. 5.2

5.2.2. Інваріантість форми диференціала 1-го порядку

Нехай задана функція $y=f(x)$, де $x=\varphi(t)$, тобто $y=f(\varphi(t))$ є складною функцією. Припустимо, що f і φ – диференційовні функції. Обчислимо dy

$$dy = y'_t dt = f'_x x'_t dt = \|x'_t dt = dx\| = f'_x dx = f'(x)dx .$$

Таким чином, диференціал функції виражається однієї й тією ж формулою як у випадку функції від незалежної змінної, так і у випадку функції від функції. Цю властивість диференціала називають *інваріантістю* формули (або форми) диференціала. Варто звернути увагу на те, що інваріантна (незмінна) саме форма диференціала, оскільки в змісті формули диференціала функції від функції є істотна відмінність від змісту формули диференціала функції від незалежної змінної. Саме, у формулі $dy = f'(x)dx$ dx є не тільки диференціал, але й приріст Δx аргументу x, якщо x – незалежна змінна, і dx є диференціал x, але не приріст Δx, якщо аргумент x є у свою чергу функція деякої змінної t.

5.2.3. Застосування диференціала до наближених обчислень

При достатньо малому Δx можна замінити приріст функції її диференціалом, тобто $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$

і звідси знайти наближене значення шуканої величини за формулою

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x .$$

Приклад. Обчислити приблизно arctg 0,97.

Розв’язання.

$$arctg(x_0 + \Delta x) \approx arctgx_0 + arctg'(x_0)\Delta x ;$$

$$x_0 + \Delta x = 0,97; \;\; x_0 = 1; \;\; \Delta x = -0,03; \;\; (arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$arctg0,97 \approx arctg1 - \frac{0,03}{1+1^2} = \frac{\pi}{4} - 0,015 \approx 0,7554.$$

5.3. Похідні й диференціали вищих порядків

Нехай функція $y=f(x)$ диференційовна на деякому проміжку (a,b). Значення похідної $f'(x)$, загалом кажучи, залежить від x, тобто похідна від $f'(x)$ є теж функція від x. Якщо ця функція сама є диференційовною у деякій точці x інтервалу (a,b), тобто має в цій точці похідну, то зазначена похідна називається другою похідною (або похідною другого порядку) і позначається $y'' = (y')' = f''(x)$.

Аналогічно можна ввести поняття третьої похідної, потім четвертої й т.д.

Похідною n-го порядку називається похідна від похідної (n-1)-го порядку: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Для похідних n- го порядку справедливі правила

1.2. $(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$ $\quad (cu)^{(n)}=cu^{(n)}, \quad c=const$

3. $(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+...+uv^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}c_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$.

Формула 3 називається *формулою Лейбніца*.

Приклад. $y=e^x\cdot x^2$. Знайти $y^{(40)}$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу Лейбніца, приймемо $u=e^x$, $v=x^2$. Похідна будь-якого порядку від функції e^x дорівнює e^x, отже $\left(e^x\right)^{(40)}=e^x$.

$$y^{(40)}=\left(e^x\cdot x^2\right)^{(40)}=\left(e^x\right)^{(40)}\cdot x^2+40\cdot\left(e^x\right)^{(39)}\cdot 2x+\frac{40\cdot 39}{1\cdot 2}\left(e^x\right)^{(38)}\cdot 2=e^x\left(x^2+80x+1560\right).$$

Нехай задана функція $y=f(x)$, де x незалежна змінна. Диференціал цієї функції $dy=y'dx$ є деяка функція від x, при цьому від x залежить тільки y'. Якщо y', у свою чергу, диференційовна функція, то можна визначити диференціал другого порядку. Диференціалом другого порядку називається диференціал від диференціала функції:.

$d(dy)=d(y'd\ x)=y''\ dx^2=d^2y$

або

$d^2y=y''dx^2$.

Взагалі, диференціалом *n-го* порядку називається перший диференціал від диференціала *(n-1)*-го порядку.

$$d^ny=d\left(d^{n-1}y\right)=y^{(n)}dx^n . \qquad (5.3.1)$$

Користуючись диференціалами різних порядків, похідну будь-якого порядку можна представити як відношення диференціалів відповідного порядку:

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx};\quad y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2};... \quad y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}; \qquad (5.3.2)$$

Рівності (5.3.1), (5.3.2) при $n>1$ вірні тільки в тому випадку, коли x є незалежною змінною.

5.3.1. Диференціювання параметрично заданих функцій

Якщо функція задана *параметрично:* $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t); \end{cases}$, то її похідну по змінній x можна представити в такий спосіб:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_tdt}{x'_tdt}=\frac{y'_t}{x'_t}, \text{ тобто } \quad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (5.3.3)$$

Для знаходження другої похідної застосуємо теорему про похідну складної функції. З огляду на те, що y'_x є функцією від t, одержимо: $y''_{xx}=\dfrac{dy'_x}{dx}=\dfrac{dy'_x}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$.

За теоремою про похідну оберненої функції одержимо: $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{x'_t}$.

Отже, $y''_{xx}=\dfrac{dy'_x}{dt}\cdot\dfrac{1}{x'_t}$; (*) Скориставшись правилом диференціювання дробу, одержимо:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x' - x''_{tt} \cdot y'_t}{\left(x'_t\right)^3}. \qquad (5.3.4)$$

Аналогічно можна одержати похідну y по x будь-якого порядку.

Приклад. Знайти похідну y''_{xx} функції заданої параметрично: $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Тоді $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a\sin t$, й $y'_x = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$. Для знаходження y''_{xx} використаємо формулу (*), що дасть:

$$y''_{xx} = \left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)'_t \cdot \frac{1}{a(1-\cos t)} = \frac{\cos t(1-\cos t) - \sin^2 t}{a(1-\cos t)^3} = \frac{\cos t - 1}{a(1-\cos t)^3} = \frac{-1}{a(1-\cos t)^2}.$$

При розв’язанні цього приклада ми повторили виведення формули для окремого випадку. Але можна було одержати другу похідну, користуючись готовою формулою (5.3.4).

5.4. Застосування похідних до дослідження функцій і побудови графіків, знаходження границь

5.4.1. Теореми про середнє

Теорема Ролля. *Якщо функція f(x) неперервна на відрізку [a,b], має похідну в інтервалі (a,b) і на кінцях відрізка [a,b] приймає рівні значення, то в інтервалі (a,b) існує принаймні одна точка, у якій похідна даної функції дорівнює нулю.*

На рис. 5.3. представлена геометрична ілюстрація теореми Ролля.

Теорема Лагранжа. *Якщо функція f(x) неперервна на відрізку [a,b] і має похідну* $f'(x)$ *в інтервалі (a,b), то існує принаймні одна така точка* ξ *в інтервалі (a,b), що*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

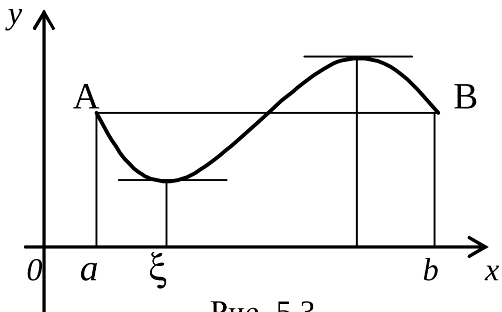


Рис. 5.3

Теорема Коші. *Якщо функції f(x) і* $\varphi(x)$ *неперервні на відрізку [a,b], мають похідні* $f'(x)$ *й* $\varphi'(x)$ *в інтервалі (a,b), причому* $\varphi'(x) \neq 0$, *то в інтервалі (a,b) існує принаймні одна точка* ξ, *така, що*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \text{ де } a < \xi < b.$$

Теорема Коші є узагальненням теореми Лагранжа.

5.4.2. Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя

Правило Лопіталя для розкриття невизначеностей виду $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ й $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ сформульовано у вигляді теореми:

Теорема. *Нехай однозначні функції* $f(x)$ *й* $\varphi(x)$ *диференційовні всюди в деякому околі точки* a, *тобто при* $0<|x-a|<\varepsilon$, *причому* $\varphi'(x)\neq 0$, *тоді, якщо існує границя (скінченна або нескінченна) відношення похідних, то відношення функцій має ту ж границю, тобто*

1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\left\|\frac{0}{0}\right\| \text{ або } \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|\right)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\left\|\frac{0}{0}\right\| \text{ або } \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|\right)=\lim\limits_{x\to \infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Зауваження. Підкреслимо ще раз, що існування границі відношення похідних гарантує існування границі відношення функцій. Обернене твердження невірно, оскільки *границя відношення функцій може існувати при відсутності границі відношення похідних*.

Приклад 1. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$$

Розв'язання. Правило Лопіталя в цьому випадку незастосовно, оскільки відношення похідних $\frac{1-\sin x}{1+\cos x}$ не має границі при $x\to\infty$.

З того, що границя відношення похідних не існує не можна зробити висновок , що шукана границя не існує. Дійсно, границя даної функції може бути обчислена безпосередньо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x}\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}\left\|\begin{matrix}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0,\\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0\end{matrix}\right\|=1.$$

Приклад 2. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

Розв'язання. Обчисливши границю безпосередньо, одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|\left\|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1-\text{величина обмежена }=1;\quad \lim_{x\to 0}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0\right\|\left\|\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\\ 1\cdot 0=0\end{matrix}\right\|$$

Тут $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=0$, оскільки x — нескінченно мала величина, а $\sin\frac{1}{x}$ — величина обмежена. Границя функції існує, але вона не може бути обчислена за правилом Лопіталя, оскільки відношення похідних

$\frac{2x\sin\frac{1}{x}-x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}}{\cos x}$ не має границі при $x\to 0$.

Обчислити границі функцій, користуючись правилом Лопіталя.

Приклад 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}\cdot a+\sin\alpha x\cdot\alpha}{e^{\beta x}\cdot\beta+\sin\beta x\cdot\beta}=\left\|\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0}\sin\alpha x=0; & \lim\limits_{x\to 0}e^{\alpha x}=1;\\ \lim\limits_{x\to 0}\sin\beta x=0; & \lim\limits_{x\to 0}e^{\beta x}=1.\end{matrix}\right\|=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Приклад 2. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-tgx}\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|.$

Відзначимо, що при знаходженні границь за правилом Лопіталя доцільна заміна еквівалентними нескінченно малими, заміна функцій їх скінченними границями, відмінними від 0, тотожні перетворення виразів із метою їх спрощення.

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos^2 x}{\cos^2 x-1}\left\|\lim_{x\to 0}\cos^2 x=1\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(\cos x-1)(\cos x+1)}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 3. $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^x\right)'-1}{\dfrac{1}{x}-1}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|.$

Для знаходження похідної функції x^x застосуємо логарифмічне диференціювання.

Нехай $y_1 = x^x$, тоді $\ln y_1 = x\ln x$,

$$\frac{y_1'}{y_1}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1,\ y_2'=\left(x^x\right)'=x^x(\ln x+1);$$

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{\dfrac{1}{x}-1}=\left\|\frac{0}{0}\right\|;$$

Правило Лопіталя можна застосувати повторно, якщо відношення похідних знову приведе до невизначеності й при цьому виконуються умови застосовності правила Лопіталя.

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^x\right)'(\ln x+1)+x^x\cdot\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)'+x^{x-1}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-2.$$

Приклад 4.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\cos x\ln(x-3)}{\ln\left(e^x-e^3\right)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\cos 3\lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{1}{x-3}}{\dfrac{1}{e^x-e^3}e^x}=e^{-3}\cos 3\lim_{x\to 3}\frac{e^x-e^3}{x-3}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=$$

$$=e^{-3}\cos 3\lim_{x\to 3}\frac{e^x}{1}=\cos 3.$$

Приклад 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{-\sin x+x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{-\cos x+1}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=1.$$

Розкриття невизначеностей виду $\|0\cdot\infty\|$ й $\|\infty-\infty\|$

Розкриття невизначеностей виду $\|0\cdot\infty\|$ й $\|\infty-\infty\|$ проводять за допомогою тотожних перетворень, які приводять ці невизначеності до виду $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ або $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$, а потім застосовують таблицю еквівалентних нескінченно малих величин і правило Лопіталя.

Приклад 6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tgx=\|0\cdot\infty\|=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{ctgx}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-1.$

Приклад 7. $A=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\|\infty-\infty\|.$

Перетворимо вираз, що знаходиться під знаком границі, з метою одержання невизначеності $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 1}\frac{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{1\cdot\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 8.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2\cos x}-\frac{x}{ctgx}\right)=\|\infty-\infty\|=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x\sin x}{\cos x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1\cdot\sin x-x\cos x}{-\sin x}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=1.$$

Розкриття невизначеностей виду 1^∞, ∞^0, 0^0

Для розкриття невизначеностей виду 1^∞, ∞^0, 0^0 виконуються попередні перетворення степенево-показникової функції за основною логарифмічною тотожністю $A=e^{\ln A}$.

У результаті даного перетворення одержуємо:

1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{\varphi(x)}=\|1^\infty\|=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)\|\infty\cdot 0\|}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln f(x)}{1/\varphi(x)}\left\|\frac{0}{0}\right\|};$

2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{\varphi(x)}=\|\infty^0\|=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)\|0\cdot\infty\|}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln f(x)}{1/\varphi(x)}\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|};$

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\varphi(x)} = \left\|0^0\right\| = e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)\|0\cdot\infty\|} = e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln f(x)}{1/\varphi(x)}\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|}$.

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}} = \left\|1^\infty\right\| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(e^x+x\right)\left\|\frac{0}{0}\right\|} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x}} = e^2.$

Приклад 2.

$$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2x-\pi} = \left\|\infty^0\right\| = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)\ln tgx} = \left\|e^{0\cdot\infty}\right\| = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln tgx}{(2x-\pi)^{-1}}} = \left\|e^{\frac{\infty}{\infty}}\right\| =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-(2x-\pi)^{-2}\cdot 2}} = e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x-\pi)^2}{\underbrace{\sin x\cdot\cos x}_{\to 0}}} = e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(2x-\pi)\cdot 2}{-\sin x}} = \left\|e^0\right\| = 1$$

Приклад 3. $A = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\ln x} = \left\|0^0\right\| = e^{\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)\|0\cdot\infty\|} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\ln^2\tilde{o}\cdot\tilde{o}}{x-1}\left\|\frac{0}{0}\right\|} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-2\ln\tilde{o}\cdot\frac{1}{x}\cdot x-\ln^2\tilde{o}}{1}} = e^0 = 1$$

Приклад 4. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}} = \left\|1^\infty\right\| = e^{\lim\limits_{x\to 1} tg\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{ctg\frac{\pi x}{2}}\left\|\frac{0}{0}\right\|} = e^{\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2-x}}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}}} = e^{\frac{2}{\pi}}.$

$$= e^{\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2-x}}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}}} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Приклад 5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{7}{x}} = \left\|1^\infty\right\| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{7}{x}\ln(1+2x)\left\|\frac{0}{0}\right\|} = e^{7\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1+2x}} = e^{14}.$

Приклад 6. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln\left(2^x-1\right)}}\left\|0^0\right\| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\left(2^x-1\right)}\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{2^x\cdot x\ln 2}\left\|\frac{0}{0}\right\|} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{\ln 2}} = e^1 = e.$

Зауваження. Існує ряд границь, у яких невизначеність може бути усунута тільки за допомогою правила Лопіталя.

Приведемо деякі з них.

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin 3x} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot 2\cdot\sin 3x}{\sin 2x\cdot\cos 3x\cdot 3}\left\|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x = 1;\\ \lim\limits_{x\to 0}\cos 3x = 1;\\ \sin 2x \sim 2x;\ \sin 3x \underset{x\to 0}{\sim} 3x\end{array}\right\| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot 3x}{2x\cdot 3} = 1.$

Приклад 2. Обчислити границю функції $y = \dfrac{a^x}{x^n},\ n\in N$ **при** $x\to\infty$**.**

Нехай $a>1$, тоді

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^2}{n(n-1)x^{n-2}} = \ldots = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^n}{n!} = +\infty,$$

Тут правило Лопіталя застосоване n раз.

Якщо $0 < a < 1$, те $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = 0$, якщо $0 < a < 1, \quad n \in N$.

Приклад 3.

$$\lim_{x\to+0} x^n \log_a x = \|0\cdot\infty\| = \lim_{x\to+0} \frac{\log_a x}{x^{-n}} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to+0} \frac{1}{x\ln a}\cdot\frac{1}{(-n)x^{-n-1}} =$$

$$= -\frac{1}{n\ln a}\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^{-n}} = -\frac{1}{n\ln a}\lim_{x\to+0} x^n = 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad n \in N.$$

5.4.3. Умови монотонності функції. Екстремуми

Теорема 1. Нехай *f(x)* неперервна на *[a, b]* і диференційовна на *(a,b).* Для того щоб функція *f(x)* була постійною на *[a,b]* необхідно й достатньо, щоб $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Теорема 2. Нехай *f(x)* неперервна на *[a,b]* і диференційовна на *(a,b),* тоді *а)* якщо $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$, то *f(x)* зростає; б) якщо $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$, то *f(x)* спадає.

Теорема 3. Якщо диференційовна на інтервалі *(a,b)* функція *f(x)* зростає, то $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$. Якщо функція *f(x)* спадає, то $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Точка x_0 називається точкою *локального максимуму* (*мінімуму*) функції *y=f(x),* якщо існує такий її окіл ($x_0 - \delta, x_0 + \delta$), у якому *f(x₀)* є найбільшим (найменшим) серед всіх інших значень цієї функції. Точки локального максимуму й мінімуму функції називаються точками *екстремума* цієї функції.

Теорема 4. (*Необхідна ознака існування екстремума.*)

Якщо неперервна функція *f(x)* має в точці $x = x_0$ екстремум, то похідна функції $f'(x_0) = 0$ або не існує. *Точки*, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними*.

Теорема 5. (*Достатня ознака існування екстремума функції по першій похідній*).

Нехай x_0 – критична точка. Тоді, якщо функція *f(x)* має похідну $f'(x)$ в деякому околі точки x_0 і якщо похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 міняє знак із плюса на мінус, то функція в цій точці має максимум, а при зміні знака з мінуса на плюс – мінімум.

Теорема 6. (*Достатня ознака існування екстремума функції по другій похідній*).

Якщо функція *f(x)* у деякому околі точки x_0 неперервна й двічі диференційовна, причому $f'(x_0) = 0, \ f''(x_0) \neq 0$, то, якщо $f''(x_0) > 0$, у точці x_0 функція має мінімум; якщо $f''(x_0) < 0$, функція в точці x_0 має максимум.

5.4.4. Опуклість і ввігнутість кривої. Точки перегину

Крива називається *опуклою* в точці x_0, якщо в деякому околі цієї точки

$(x_0-\delta, x_0+\delta\ )$ вона розташована нижче дотичної (рис. 5.4.а), проведеної в точці x_0. Якщо крива розташована вище дотичної, то вона називається *ввігнутою* (рис. 5.4.б).

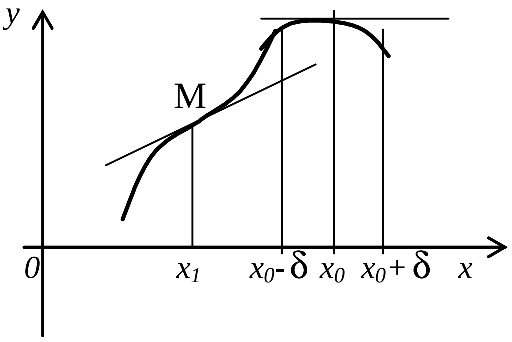


Рис. 5.4.а

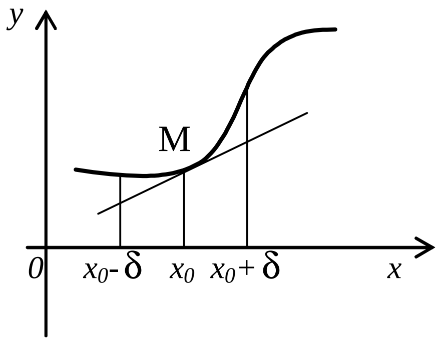


Рис. 5.4.б

Теорема 1. Якщо функція *f(x)* у деякому околі точки x_0 двічі неперервно диференційовна й $f''(x_0)\neq 0$, то необхідною й достатньою умовою опуклості кривої у точці x_0 є умова $f''(x_0)<0$; увігнутості — $f''(x_0)>0$.

Точка $M(x_1, f(x_1))$ називається *точкою перегину* даної кривої (рис. 5.4.а), якщо існує такий окіл точки x_1 що при $x<x_1$ у цьому околі ввігнутість кривій спрямована в одну сторону, а при $x>x_2$ – в іншу сторону (рис. 5.4.а)

Для того щоб точка $x=x_0$ була точкою перегину даної кривої необхідно,щоб друга похідна функції в цій точці або була рівна нулю ($f''(x_0)=0$), або не існувала.

Теорема 2. (*Достатня умова існування точки перегину*). Нехай крива визначається рівнянням *y=f(x).* Якщо $f''(x_0)=0$ або $f''(x_0)$ не існує й при переході через $x=x_0$ похідна $f''(x)$ міняє знак, то точка кривої з абсцисою x_0 є точка перегину.

5.4.5. Асимптоти кривих

Пряма $x=x_0$ називається *вертикальною асимптотою*, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$.

Приклад. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

Прямі $x=\pm 1$ – вертикальні асимптоти, оскільки $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{1}{1-x^2}=\mp\infty$; $\lim\limits_{x\to -1\pm 0}\dfrac{1}{1-x^2}=\pm\infty.$

Під похилою асимптотою графіка функції *y=f(x)* розуміють пряму, що володіє тією властивістю, що відстань від прямої до змінної точки на кривій наближається до нуля, якщо точка, рухаючись уздовж кривої, необмежено віддаляється ($x\to\pm\infty$).

Рівняння *похилої асимптоти* має вигляд *y=kx+b*. Зокрема, якщо *k=0*, асимптот є горизонтальною. Якщо похила асимптот існує, то k і b знаходяться за формулами $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right).$

Якщо хоча б одна з границь не існує, то похилих асимптот крива не має. Асимптоти можуть бути різними при $x\to+\infty$ й при $x\to-\infty$.

5.4.6. Загальна схема дослідження функції й побудови графіка

1) Визначення області існування функції;
2) Дослідження функції на неперервність. Визначення точок розриву функції і їхнього характеру. Знаходження вертикальних асимптот.
3) Дослідження функції на парність і непарність.
4) Дослідження функції на періодичність.
5) Знаходження похилих і горизонтальних асимптот.
6) Дослідження функції на екстремум. Визначення інтервалів монотонності функції.
7) Визначення точок перегину функції, інтервалів опуклості й увігнутості.
8) Знаходження точок перетину з осями координат.
9) Дослідження поведінки функції на нескінченності.

Приклад. Побудувати графік функції $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

1) $(x+1)^2\ne 0,\ x\ne -1.$

2) $x=-1$ – точка розриву функції, оскільки $\lim\limits_{x\to -1\pm 0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty$, отже, $x=-1$ – вертикальна асимптот.

3) $y(-x)=\frac{(-x)^3}{2(-x+1)^2}=-\frac{x^3}{2(-x+1)^2};\ y(-x)\ne y(x),\ y(-x)\ne -y(x)\Rightarrow y(x)$ – функція загального виду.

4) Функція неперіодична, оскільки не існує такого числа T, щоб виконувалася рівність $f(x+T)=f(x),\ \forall x\in D(f)$.

5) Похилі асимптоти

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2\left(1+1/x\right)^2}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right)\left|\infty-\infty\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x(x+1)^2}{2(x+1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-x}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-\frac{1}{x}}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=-1,$$

$y=1/2x-1$ – похила асимптота.

6) Для визначення інтервалів монотонності й екстремумів функції необхідно

знайти її першу похідну й визначити точки, у яких вона дорівнює нулю або не існує:

$$y' = \frac{6x^2(x+1)^2 - 4(x+1)x^3}{4(x+1)^4} = \frac{x^2(3x^2+6x+3-2x^2-2x)}{2(x+1)^4} = \frac{x^2(x^2+4x+3)}{2(x+1)^4}$$

$$y' = \frac{x^2(x+1)(x+3)}{2(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} = 0,$$

$$x^2 = 0,\ \ x = 0, x+3 = 0, x = -3, x+1 \neq 0, x \neq -1$$

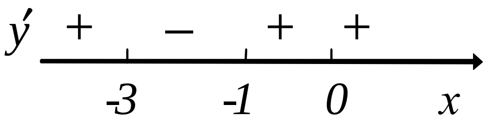


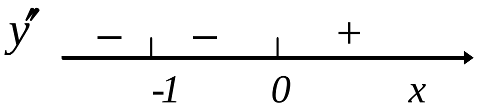
Рис. 5.5

При $x \in (-\infty;-3) \cup (-1;0) \cup (0;+\infty)$ функція зростає; при $x \in (-3;-1)$ функція спадає $\quad y_{\max}(-3) = -\frac{27}{2 \cdot 4} = -\frac{27}{8}$

7) Для визначення інтервалів опуклості (увігнутості) й точок перегину знайдемо другу похідну:

$$y'' = \frac{1}{2}\frac{\left(2x(x+3)+x^2\right)(x+1)^3 - 3(x+1)^2 x^2(x+3)}{(x+1)^2} = = \frac{1}{2}\frac{3x^3+6x^2+3x^2+6x-3x^3-9x^2}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{3x}{(x+1)^4} = 0,\ \ x = 0, x \neq -1\,;$$

Рис. 5.6	При $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;0)$ графік опуклий; $x \in (0;+\infty)$ графік увігнутий. Точка 0$(0;0)$ – точка перегину.

8) Точки перетину графіка з осями координат: $x=0, y=0$.

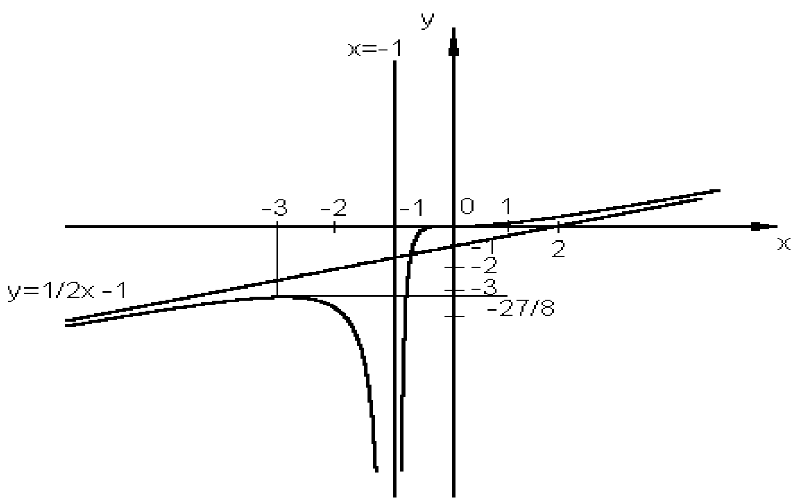


Рис. 5.7.

9) Досліджуємо поведінку функції на нескінченності: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \pm\infty.$

Контрольні завдання до розділу 5

Завдання 1. В задачах (пункти “1”, “2”,”3”,”4”) знайти похідні даних функцій; у пункті “5” продиференціювати неявно задану функцію; у пункті “6” обчислити приблизно за допомогою диференціала значення функції при даному значенні x; у пункті “7” розв′язати задачу.

5.1.1

1) $y = e^{2x}\operatorname{arctg}2x + \dfrac{\ln x}{x}$; 2) $y = \ln^5\left(\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}\right)$; 3) $y = (\ln x)^{\sin 3x}$;

4) $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}; \end{cases}$ 5) $\sqrt{xy} + \sin x + \sin a = 0$; 6) $y = x^3 + 3x^2 - 7, \quad x = 2{,}03.$

7) До кривої y=xlnx написати рівняння дотичної, паралельної прямій y-x-5=0.

5.1.2.

1) $y = (x^2 - 2x + 3)e^{3x} - \dfrac{x}{\ln x}$; 2) $y = 5^{\arcsin^2(x^3 - x + 1)}$; 3) $y = (\cos 3x)^x$;

4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$ 5) $y^3 \sin x + a^2 \cos 2x = 5a$; 6) $y = e^{x^2 - x}, \quad x = 1{,}12.$

7) До кривої y=x-1/x написати рівняння нормалі, паралельної прямій 2y+x+3=0.

5.1.3.

1) $y = x\operatorname{tg}3x - \dfrac{5^x}{\sqrt{7x}}$; 2) $y = \arccos^2\left(\ln\dfrac{x}{1+x^2}\right)$; 3) $y = (\sin 3x)^{\ln x}$;

4) $\begin{cases} x = \ln\left(1 + t^2\right), \\ y = t - \operatorname{arctg} t; \end{cases}$ 5) $y^2 - 2xy + \sin(x+y) = \cos a$; 6) $y = e^{2-x}, \quad x = 1{,}97.$

7) До кривої $y = 2 - \sqrt{x}$ написати рівняння дотичної, перпендикулярної прямій y+4x-4=0.

5.1.4.

1) $y = \dfrac{e^{2x}(\cos 3x + \sin 3x)}{\ln x}$; 2) $y = \sin^3(\cos 3x)$; 3) $y = \left(\sin\dfrac{3}{x}\right)^{x^3}$;

4) $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{t-1}{\sin t}; \end{cases}$ 5) $x^4 + y^4 = x^2y^2$; 6) $y = \left(x^2 - 3\right)^2(x+2), \quad x = 3{,}011.$

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{x^2+1}{x^3-1}$ у точці з абсцисою x_0=-1.

5.1.5.

1) $y = x^{\frac{2}{3}}\arccos 2x - \dfrac{2x+3}{\operatorname{tg}3x}$; 2) $y = \ln^3 x + 3^{\operatorname{tg}3x}$; 3) $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$;

4) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t; \end{cases}$ 5) $\sin(x+y) + \cos(x+y) = \sin a$;6) $y = \arcsin 3x, x = 0{,}05.$

7) Написати рівняння дотичної до кривої $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$ у точці з абсцисою x_0=3.

5.1.6.

$1)\ y=\sqrt{x}\cos x+\dfrac{3x^2+7}{\arcsin 2x};\quad 2)\ y=e^{\cos^3\left(\ln\frac{1-x}{x^2}\right)};\quad 3)\ y=x^{\sin x};$

$4)\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t;\end{cases}\quad 5)\ x^y=y^x;\quad 6)\ y=\mathrm{arctg}x,\quad x=0{,}98.$

7) До кривої $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ написати рівняння дотичної, паралельної прямій y=2x.

5.1.7.

$1)\ y=3^{\sin^2\ln x};\quad 2)\ y=\dfrac{x^2e^{2x}}{\mathrm{arctg}2x};\quad 3)\ y=x^{\cos 2x};$

$4)\begin{cases}x=4-t^2,\\ y=t-t^3;\end{cases}\quad 5)\ \cos(xy)=\sin(xy);\quad 6)\ y=2^{x-3},\quad x=2{,}08.$

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$ у точці з абсцисою x_0=1.

5.1.8.

$1)\ y=\dfrac{x\cos 4x}{1+\mathrm{tg}4x};\quad 2)\ y=\sin^5\left(4^{\mathrm{arctg}2x}\right);\quad 3)\ y=(\cos 2x)^{\mathrm{tg}2x};$

$4)\begin{cases}x=t(1-\sin t),\\ y=t\cos t;\end{cases}\quad 5)\ ye^x-\mathrm{tg}xy=e^a;\quad 6)\ y=\ln x,\quad x=1{,}13.$

7) До кривої y=xcosx написати рівняння дотичної, перпендикулярної прямій y+x+3=0.

5.1.9

$1)\ y=\dfrac{\sqrt[3]{x}\,2^x}{1+\cos 5x};\quad 2)\ y=e^{\sqrt{\cos^3 x}\,\mathrm{tg}3x};\quad 3)\ y=(\mathrm{tg}3x)^x;$

$4)\begin{cases}x=\dfrac{1+t^3}{t^2-1},\\ y=\dfrac{t}{t^2-1};\end{cases}\quad 5)\ y-x=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{y};\quad 6)\ y=\sqrt{1+x},\quad x=3{,}01$

7) До кривої $y=e^{1-x^2}$ написати рівняння нормалі, перпендикулярної прямій y+2x-4=0.

5.1.10.

$1) y=\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{x+x}}\right)\cos 4x;\ 2)\ y=\ln^3 tg\dfrac{x-1}{1-2x};\ 3)\ y=(\sin 5x)^{x^5};$

$4)\begin{cases}x=e^t\sin t,\\ y=e^t\cos t;\end{cases}\ 5)\ y\sin x-\cos(x-y)=0;\ 6)\ y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}},x=0{,}02.$

7) Написати рівняння нормалі до кривої $y=\sqrt[3]{1-x}$ у точці з абсцисою $x_0=1$.

5.1.11 1) $y=\left(\sqrt{x+x^3}\right)\mathrm{tg}3x$; 2) $y=\cos\left(5^{\ln x}\right)$; 3) $y=\dfrac{x^3e^{3x}\sin 2x}{\cos 3x}$;

4) $\begin{cases} x=5\cos^3 t, \\ y=5\sin^3 t; \end{cases}$ 5) $x\sin y-\cos y+\cos 2x=0$; 6) $y=\arccos x,\quad x=0{,}01$.

7) До кривої $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ написати рівняння дотичної, паралельної прямій 2y-x+5=0.

5.1.12. 1) $y=\dfrac{\arccos 3x}{\arcsin 6x}$; 2) $y=tg^3\sin(\ln 2x)$; 3) $y=\left(1+x^2\right)^{x^3}$; 4) $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t}, \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}; \end{cases}$

5) $x+y=\arcsin x+\arcsin y$; 6) $y=x^3-4x^2+6x+3, x=1{,}04$.

7) До кривої y=arctgx написати рівняння дотичної, перпендикулярної прямій y+2x+3=0.

5.1.13. 1) $y=\dfrac{3x^3-5x^2+7}{\mathrm{arctg}3x}$; 2) $y=\sqrt[3]{\ln^2\dfrac{\sin x}{5-x^2}}$; 3) $y=x^2\sin 2x(x+3)^5$;

4) $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t); \end{cases}$ 5) $3^{x+y}=3^x-3^y$; 6) $y=\sqrt[3]{1+x},\quad x=6{,}93$.

7) До кривої y=arccos3x написати рівняння нормалі, перпендикулярної прямій y+3x+3=0.

5.1.14. 1) $y=\cos 4x\cdot 2^x-5\mathrm{tg}4x$; 2) $y=3^{\arccos^2(\mathrm{tg}4x)}$; 3) $y=(\mathrm{tg}4x)^{\ln x}$;

4) $\begin{cases} x=5^t\left(t^2+1\right), \\ y=5^t(1-t); \end{cases}$ 5) $y\ln(x+y)=\ln a$; 6) $y=e^{2-x-x^2},\quad x=-1{,}94$.

7) Написати рівняння дотичної до кривої $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ у точці з абсцисою $x_0=2$.

5.1.15. 1) $y=e^{3x}\ln x-3\arccos 3x$; 2) $y=\sqrt[3]{\mathrm{tg}^2\ln\sqrt{x}}$; 3) $y=(\sin 2x)^{\mathrm{ctg}2x}$;

4) $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{t}, \\ y=\dfrac{t^3}{1+t}; \end{cases}$ 5) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; 6) $y=\sqrt{9+x^2},\quad x=4{,}01$.

7) Написати рівняння нормалі до кривої $y=\sqrt{1+x^2}$ у точці з абсцисою $x_0=0$.

5.1.16.

1) $y=\dfrac{\cos 7x+3}{\ln x+4}$; 2) $y=\sin^2\dfrac{x^5-x}{2-x}$; 3) $y=(\sin 5x)^{\cos 5x}$;

4) $\begin{cases} x=3^t\cos t, \\ y=3^t\sin t; \end{cases}$ 5) $\operatorname{tg} y=\operatorname{atg} x$; 6) $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$, $x=0{,}01$.

7) До кривої y=xsin2x написати рівняння дотичної , паралельної прямій y+πx+9=0.

5.1.17

1) $y=4x^{-3/2}+x\sqrt[4]{x}-1$; 2) $y=\sin\sqrt[3]{1+x^3}$; 3) $y=\left(x^3+5\right)^{\operatorname{ctg}5x}$;

4) $\begin{cases} x=t^3\ln t, \\ y=(1-t)\sqrt{t}; \end{cases}$ 5) $y=\operatorname{tg}^2(y-x)$; 6) $y=\operatorname{arctg}x^2$, $x=0{,}97$.

7) До кривої $y=\dfrac{x^3+1}{x^2+4}$ написати рівняння дотичної і нормалі у точці з абсцисою $x_0=-1$.

5.1.18.

1) $y=\cos 2x\cdot 2^x-5\operatorname{tg}3x$; 2) $y=\dfrac{\ln x}{\cos^3 3x}$; 3) $y=(\cos 3x)^{\sin 5x}$;

4) $\begin{cases} x=t^3\cos t, \\ y=\left(t^2-1\right)\sin t; \end{cases}$ 5) $e^{xy}=\arcsin x$; 6) $y=\sqrt[3]{2+x^2}$, $x=4{,}97$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=e^{\sqrt{x}-1}$ у точці з ординатою $y_0=e$.

5.1.19

1) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot\operatorname{tg}3x}{1+\cos 4x}$; 2) $y=\sqrt{\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}}$; 3) $y=(\operatorname{ctg}5x)^{x/3}$;

4) $\begin{cases} x=\dfrac{t^3-3}{2t}, \\ y=\dfrac{t^2+1}{\ln t}; \end{cases}$ 5) $x^3+ax^2y+y^3=a$; 6) $y=\dfrac{x^3-2}{x^2+1}$, $x=1{,}07$.

7) До кривої y=cosx написати рівняння дотичної, паралельної до прямої y+x+3=0.

5.1.20.

1) $y=\dfrac{x+\arcsin 2x}{3x+\operatorname{arctg}3x}$; 2) $y=\arcsin\left(\cos x^3\right)$; 3) $y=(\arcsin 3x)^x$;

4) $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t; \end{cases}$ 5) $\cos(xy)=e^{x+y}$; 6) $y=\sqrt[4]{2x-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$, $x=1{,}03$.

7) До лінії $y=x^3-3x^2-5$ скласти рівняння дотичної, перпендикулярної прямій 2x-6y+1=0.

5.1.21. 1) $y=\sqrt[3]{x}\left(x^2-3\sqrt{x}+6\right)$; 2) $y=\arccos\left(\sin x^2\right)$; 3) $y=\left(\mathrm{arctg}3x\right)^{x+3}$;

4) $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t; \end{cases}$ 5) $2y\ln y=e^x$; 6) $y=\left(x^2-1\right)^3\left(x+2\right)$, $x=2{,}03$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої y=xln(1+x2) у точці з абсцисою x_0=1.

5.1.22. 1) $y=((x^2+\sqrt{x}-1)tg5x)/x^3$; 2) $y=\sqrt[4]{\ln tg\frac{x}{3}}$; 3) $y=\left(arctg5x\right)^{7+x}$;

4) $\begin{cases} x=t/(1-t^2), \\ y=t^2/(1-t^2); \end{cases}$ 5) $2^{x+y}=\ln(x+y)$; 6) $y=\dfrac{x^2+1}{1-x}$, $x=-0{,}93$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої y=sinx+cosx у точці з абсцисою $x_0=\pi/4$.

5.1.23. 1) $y=\dfrac{e^{2x}arctg3x}{cos4x}$; 2) $y=ln^3x+ln\left(ctg3x\right)$; 3) $y=\left(sin3x\right)^{\frac{5}{x}}$;

4) $\begin{cases} x=\sqrt{1+t^3}, \\ y=t\sqrt{1+t}; \end{cases}$ 5) $arctg\dfrac{x}{y}=ln\,y$; 6) $y=arcsin2x$, $x=0{,}249$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=4^{x-x^2}$ у точці з абсцисою x_0=1.

5.1.24. 1) $y=\sqrt[4]{x^3}+3^{-2x}$; 2) $y=\sqrt[3]{\ln\sin\frac{x}{2}}$; 3) $y=\left(\arccos5x\right)^{x+7}$;

4) $\begin{cases} x=\dfrac{t-2}{t}, \\ y=\dfrac{1-t}{\sqrt{t}}; \end{cases}$ 5) $y^3-3y+2a\ln x=0$; 6) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $x=1{,}02$.

7) До кривої $y=1-\dfrac{1}{x^2}$ написати рівняння дотичної, паралельної до прямої 2y+32x+7=0.

5.1.25. 1) $y=\dfrac{xe^{2x}}{\sin2x}$; 2) $y=4^{\frac{x}{\cos2x}}$; 3) $y=\dfrac{(x-1)^2\sqrt[3]{(x+1)^5}(x-3)^3}{\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{(1-x)^5}}$;

4) $\begin{cases} x=t^5, \\ y=1-\cos t; \end{cases}$ 5) $\mathrm{arctg}\sqrt{x/y}+\sin y=\ln a$; 6) $y=\sqrt{5-x^2}$, $x=0{,}98$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої y=x-arctgx у точці з абсцисою x_0=1.

5.1.26. 1) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot2^x}{\sin3x}$; 2) $y=5^{\mathrm{ctg}^3\left(\ln\sqrt{x}\right)}$; 3) $y=\left(\mathrm{ctg}5x\right)^{\frac{7}{x}}$;

4) $\begin{cases} x=\sin t+\ln t, \\ y=\cos t+\ln t; \end{cases}$ 5) $\sin\sqrt{x+y}=\ln\mathrm{tg}y$; 6) $y=e^{2x-x^2}$, $x=2{,}014$.

7) До кривої $y = x - \sqrt{x}$ написати рівняння нормалі, перпендикулярної до прямої 4y-3x+5=0.

5.1.27.

1) $y = \dfrac{x \cdot \operatorname{arctg} 4x}{\ln x}$; 2) $y = \ln^2 x + \ln(\ln x)$; 3) $y = (\cos 2x)^{\frac{3}{x}}$;

4) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}; \end{cases}$ 5) $\arcsin xy = 2^x$; 6) $y = (3x-1)^2(x+1)$, $x = 1{,}01$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{x^3 - 2}{x^2 - 4}$ у точці з абсцисою x_0=3.

5.1.28.

1) $y = \dfrac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{\sqrt[4]{x} + x^2}$; 2) $y = 3^{\operatorname{tg}^2(\ln\sqrt{x})}$; 3) $y = (\operatorname{tg} 4x)^{\frac{6}{x}}$;

4) $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t; \end{cases}$ 5) $x \ln(x + y) = a$; 6) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$, $x = 2{,}031$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ у точці з абсцисою x_0=1.

5.1.29.

1) $y = \dfrac{\sqrt{x} \cdot \cos 5x}{e^{2x}}$; 2) $y = 5^{\frac{\sin 3x}{x}}$; 3) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2(x^3+1)\sin 2x}{x^2 - 2}}$;

4) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 + t^3; \end{cases}$ 5) $\arccos\dfrac{x}{y} = 2^a$; 6) $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $x = 2{,}03$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = xe^{-x^2}$ у точці з абсцисою x_0=1.

5.1.30.

1) $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} \arcsin 2x$; 2) $y = \cos^3(\sin 2x)$; 3) $y = \left(\cos\dfrac{5}{x}\right)^{x^2}$;

4) $\begin{cases} x = e^t(t^3 + 1); \\ y = e^t(1 - t^3); \end{cases}$ 5) $\ln \operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = a$; 6) $y = \sqrt{1 + x + \sin x}$; $x = 0{,}02$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 + \sqrt[3]{x}$ у точці з абсцисою x_0=-1.

РОЗДІЛ 6

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

6.1. Первісна, властивості невизначеного інтеграла

Функція *F(x)* є *первісна* для функції *f(x)* на інтервалі *(a, b)*, якщо *F(x)* диференційовна $\forall x \in (a,\ b)$ й $F'(x) = f(x)$.

1°. Якщо *F(x)* є первісною на інтервалі *(a,b)*, то *F(x)+C*, де *C* – довільна постійна, також є первісною.

2°. Якщо $F_1(x)$ й $F_2(x)$ – будь-які дві первісні, то $F_1(x) - F_2(x) = C$, звідки $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Сукупність первісних *F(x)+C* називається *невизначеним інтегралом* і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Властивості невизначеного інтеграла

1°. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

2°. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

3°. $\int dF(x) = F(x) + C.$

4°. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx.$

5°. $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx.$

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C.$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C \quad (x \neq 0).$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\, a} + C \quad (0 < a \neq 1).$
5. $\int e^x dx = e^x + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$
14. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$
15. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$
16. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + c = -\dfrac{1}{a}arcctg\dfrac{x}{a} + c.$
17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + c = -\arccos\dfrac{x}{a} + c$.
18. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C.$
19. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$.

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}x + C. \\ -\mathrm{arcctg}x + C. \end{cases}$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c.$

20. $\int shx\, dx = chx + C.$

21. $\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C$.

22. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C.$

23. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$.

При інтегруванні функцій можливість безпосередньо використати основні формули буває вкрай рідкою. Як правило, підінтегральну функцію доводиться так чи інакше перетворювати для того, щоб інтеграл звести до табличного. Нижче наведені приклади таких перетворень.

Приклади.

1. $\int \frac{(1+x)^2}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{1+2x+x^2}{x^{3/2}} dx = \int x^{-3/2} dx + 2\int x^{-1/2} dx + \int x^{1/2} dx = -2x^{-1/2} + 4x^{1/2} + \frac{2}{3} x^{3/2} + C.$

2. $\int \frac{(1+2x^2)dx}{x^2(1+x^2)} = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + arctgx + C.$

3. $\int \frac{dx}{(x^2-1)(1+x^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{2}{(x^2-1)(1+x^2)} dx = \left\| x^2 + 1 - (x^2-1) \equiv 2 \right\| =$

$= \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-(x^2-1)}{(x^2-1)(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| - \frac{1}{2} arctgx + C.$

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$

5. $\int \frac{dx}{1-\cos 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2} ctgx + C$

Зауваження. При інтегруванні однієї й тієї ж функції результати можуть бути по своєму зовнішньому вигляду різними. У дійсності ж вони або тотожні, або відрізняються між собою тільки на постійну величину.

Теорема (*про інваріантість формул інтегрування*). *Вид формули інтегрування залишається незмінним незалежно від того, чи є змінна інтегрування незалежною змінною чи деякою диференційовною функцією; тобто, якщо* $\int f(x)dx = F(x) + C$, *то* $\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$.

Наведена теорема дозволяє багато інтегралів приводити до табличних.

Приклади.

1. $\int xe^{x^2} dx = \left\| xdx = \frac{1}{2} d(x^2) \right\| = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$.

2. $\int sin^5 x\, cos\, xdx = \| cos\, xdx = d(sin\, x) \| = \int sin^5 xd(sin\, x) = \frac{sin^6 x}{6} + C.$

3. $\int \frac{(arctgx)^2}{1+x^2}dx = \left\| \frac{dx}{1+x^2} = d(arctgx) \right\| = \int (arctgx)^2 d(arctgx) = \frac{(arctgx)^3}{3} + C.$

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{2^2-(x^2)^2}} = \frac{1}{2} arcsin \frac{x^2}{2} + C.$

5. $\int \frac{dx}{x \ln x} = \left\| \frac{dx}{x} = d(\ln x) \right\| = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C.$

6. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}} = \left\| e^x dx = d(e^x) \right\| = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{2^2-(e^x)^2}} = arcsin \frac{e^x}{2} + C.$

7. $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} = \left\| 2(a^2-b^2)\sin x \cos x dx = d(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) \right\| =$

$= \frac{1}{2(a^2-b^2)}\int \frac{d(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} = \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{(a^2-b^2)} + C, \ a \neq b.$

8. $\int \frac{\cos 5x dx}{\sqrt{3-\sin 5x}} = \left\| \cos 5x dx = \frac{1}{5} d(\sin 5x) \right\| = -\frac{1}{5}\int (3-\sin 5x)^{-\frac{1}{2}} d(3-\sin 5x)$

$= -\frac{2}{5}\sqrt{3-\sin 5x} + c.$

9. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1+x)}}{1+x}dx = \int \ln^{\frac{2}{3}}(1+x) d \ln(1+x) = \frac{3}{5}\ln^{\frac{5}{3}}(1+x) + C$

10. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$

Якщо позбавитися від ірраціональності в знаменнику, одержимо:

$J = \frac{1}{2}\int \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}\int (x+1)^{1/2} d(x+1) - \frac{1}{2}\int (x-1)^{1/2} d(x-1) =$

$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}\right) + C.$

11. $I = \int x^3 \sqrt[3]{1+x^2}dx = \left\| xdx = \frac{1}{2}d(x^2) \right\| = \frac{1}{2}\int x^2 \sqrt[3]{1+x^2} d(x^2) =$

$= \frac{1}{2}\int (x^2+1-1)\sqrt[3]{1+x^2} d(x^2+1) = \frac{1}{2}\int (x^2+1)\sqrt[3]{1+x^2} d(x^2+1) - \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+x^2} d(x^2+1) =$

$= \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{4/3} d(x^2+1) - \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{1/3} d(x^2+1) = \frac{3}{14}(x^2+1)^{7/3} - \frac{3}{8}(x^2+1)^{4/3} + C.$

12. $I = \int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx$ ‖ В чисельнику запишемо похідну знаменника і виконаємо перетворення таким чином, щоб одержаний вираз в чисельнику був рівним початковому ‖ $=$

$$\int \frac{\frac{3}{8}(8x-4)+\frac{3}{2}-1}{4x^2-4x+17}dx = \frac{3}{8}\int \frac{d(4x^2-4x+17)}{4x^2-4x+17} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2-x+\frac{17}{4}}.$$

Виділимо повний квадрат:

$$x^2 - x + \frac{17}{4} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 4;$$

$$I = \frac{3}{8}\ln\left(4x^2-4x+17\right) + \frac{1}{8}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{3}{8}\ln(4x^2-4x+17) + \frac{1}{16} arctg\,\frac{2x-1}{4} + c.$$

13. $I = \int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+6x+2}}dx = \int \frac{(2x+6)-1}{\sqrt{x^2+6x+2}}dx = \int (x^2+6x+2)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+6x+2) - \int \frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2-7}} =$

$$2\sqrt{x^2+6x+2} - \ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+2}\right| + c.$$

6.2. Методи інтегрування

6.2.1. Метод заміни змінної

Одним з основних методів обчислення інтегралів є метод заміни змінної, суть якого полягає в тому, що якщо $x=\varphi(t)$ – неперервно диференційовна монотонна функція, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Нижче цей метод проілюстрований на ряді прикладів.

Приклади.

1. $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{1+x^2}} \left\| \begin{array}{l} \sqrt{1+x^2}=t, \\ 1+x^2=t^2, \\ 2xdx=2tdt, \\ xdx=tdt \end{array} \right\| = \int \frac{tdt}{1+t} = \int \frac{(t+1)-1}{1+t}dt = \int dt - \int \frac{dt}{1+t} \left\| dt = d(t+1) \right\|$

$$t - \ln(1+t) + c = \sqrt{1+x^2} - \ln(1+\sqrt{1+x^2}) + c.$$

2. $\int \frac{e^{4x}}{e^x-1}dx \left\| \begin{array}{l} e^x=t, \\ e^x dx = dt \end{array} \right\| = \int \frac{t^3}{t-1}dt = \int \frac{(t^3-1)+1}{t-1}dt = \int \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t-1}dt + \int \frac{dt}{t-1} =$

$$\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| + c = \frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{2x}}{2} + e^x + \ln\left|e^x-1\right| + c.$$

3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx \left\| \begin{array}{l} \sqrt{2x-1}=t,\ 2x-1=t^2, \\ 2dx=2tdt,\ dx=tdt, \\ x=\frac{1}{2}\left(t^2+1\right) \end{array} \right\| = \int \frac{\frac{1}{2}\left(t^2+1\right)-1}{t}tdt =$

$$\frac{1}{2}\int t^2 dt - \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + c = \frac{1}{2}\left(\frac{(2x-1)^{3/2}}{3} - \sqrt{2x-1}\right) + c =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}\left(\frac{2x-1}{3}-1\right)+c=\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}(x-2)+c.$$

4. $I=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}.$

1-й спосіб (заміна змінної).

$$I=\left\|\begin{matrix} x=tgt \quad dx=\dfrac{dt}{cos^2 t} \\ \left(x^2+1\right)^{3/2}=\dfrac{1}{cos^3 t}\end{matrix}\right\|;\ I=\int cos\,tdt=sin\,t+C==\left\|\begin{matrix} 1+ctg^2 t=\dfrac{1}{sin^2 t} \\ sin\,t=\sqrt{\dfrac{tg^2 t}{1+tg^2 t}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C\ .$$

2-й спосіб (безпосереднє обчислення).

$$I=\int\frac{dx}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{3/2}}=-\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-3/2}d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}(-2)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Інтеграли виду: $\int R\left(x^{\frac{m}{n}},x^{\frac{l}{s}},...,x^{\frac{p}{r}}\right)dx,$ де R – раціональна функція своїх аргументів, обчислюються заміною $x=t^k$ (k – загальний знаменник дробів), що дозволяє позбутися від ірраціональностей.

5. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$

У даному прикладі *k=2*, тому слід зробити заміну $x=t^2$. Тоді

$$I=\int\frac{2tdt}{t\left(t^2+1\right)}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\ \sqrt{x}+C.$$

Цей інтеграл можна обчислити й безпосередньо.

Другий спосіб.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}=\left\|\frac{dx}{\sqrt{x}}=2d\left(\sqrt{x}\right)\right\|=2\int\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}=2arctg\sqrt{x}+C.$$

6. $$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}\quad\left|\begin{matrix} x=t^4 \\ \sqrt[4]{x}=t \\ dx=4t^3dt\end{matrix}\right|=\int\frac{4t^3dt}{t+t^2}=4\int\frac{t^2dt}{t+1}=4\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t+1}dt=$$

$$=4\left(\int (t-1)\,dt+\int\frac{dt}{t+1}\right)=4\left(\frac{(t-1)^2}{2}+\ln(t+1)\right)+C=4\left(\frac{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^2}{2}+\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\right)+\mathrm{C}$$

При інтегруванні виразів виду: $R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right),\ R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right),\ R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$ використовують заміни:

$$a)\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx\quad \left|x=a\cdot tgt;\quad dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt\right|$$

$$b)\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx\quad \left|\begin{matrix}x=a\sin t; & dx=a\cos tdt\\ x=a\cos t; & dx=-a\sin tdt\end{matrix}\right|$$

$$c)\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dt\quad \left|x=\frac{a}{\sin t};\quad dx=-\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt\right|.$$

7. $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx=\int sin^2\,t\sqrt{1-sin^2\,t}\,cos\,tdt=\int sin^2\,t\,cos^2\,tdt=\frac{1}{4}\int sin^2\,2tdt=$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{1}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)+C=\frac{1}{8}\left(\arcsin x-\frac{\sin(4\arcsin x)}{4}\right)+C.$$

8. $I=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx\left\|\begin{matrix}x=tgt\\ dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}\end{matrix}\right\|=\int\frac{\sqrt{1+tg^2t}}{tg^4t}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\frac{\cos^4 tdt}{\cos t\cdot\sin^4 t\cdot\cos^2 t}=$

$\int\frac{\cos t}{\sin^4 t}dt=\int\sin^{-4}t\quad d\sin t=-\frac{1}{3\sin^3 t}+c$.

Зробимо зворотну заміну, тобто виразимо *sint* через *x*: $\sin t=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\quad I=-\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+c$.

9. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}\left\|x=\frac{3}{\sin t},\,dx=-\frac{3\cos tdt}{\sin^2 t},\,\sin t=\frac{3}{x}\right\|=-\int\frac{3\cos t\cdot\sin^2 tdt}{\sin^2 t\cdot 9\cdot\sqrt{\left(\dfrac{3}{\sin t}\right)^2-9}}=$

$$-\frac{1}{9}\int\sin tdt=\frac{1}{9}\cos t+c=\frac{1}{9}\sqrt{1-\sin^2 t}+c=\frac{1}{9}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}+c=\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+c\,.$$

10. $J=\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$

1-й спосіб (заміна змінної):

$$J=\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}\left\|\begin{matrix}x=sint,\quad dx=costdt\\ \sqrt{1-x^2}=cost\end{matrix}\right\|=\int sin^5\,tdt=-\int\left(1-cos^2\,t\right)^2d\,cos\,t=$$

$$=-\int\left(1-2cos^2\,t+cos^4\,t\right)d\,cos\,t=-cos\,t+\frac{2}{3}cos^3\,t-\frac{1}{5}cos^5\,t=$$

$$=\left\|\begin{matrix}x=\sin t\\ \cos t=\sqrt{1-x^2}\end{matrix}\right\|=-\sqrt{1-x^2}\left(1-\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)+\frac{1}{5}\left(1-x^2\right)^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{15}\sqrt{1-x^2}\left(8+4x^2+3x^4\right)+C.$$

2-й спосіб:

Якщо під знаком інтеграла міститься змінна x у непарному степені, то можливо використання заміни $\sqrt{1-x^2}=t$.

$$J=\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left\|\begin{matrix}t^2=1-x^2, \quad 2tdt=-2xdx \\ x^4=1-2t^2+t^4,\ x^5dx=\left(1-2t^2+t^4\right)tdt\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\int\frac{t\left(1-2t^2+t^4\right)}{t}dt=-\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=-\left(t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right)+C=$$

$$-\frac{1}{15}\left(8+4x^2+3x^4\right)\sqrt{1-x^2}+C.$$

6.2.2. Метод інтегрування частинами

Нехай функції $u=u(x),\ v=v(x)$ мають неперервні похідні, тоді справедлива формула *інтегрування частинами*

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du. \qquad (6.2.1)$$

Зауваження. Назва інтегрування частинами пояснюється тим, що формула не дає остаточного результату, а тільки зводить задачу знаходження інтеграла $\int udv$ до задачі знаходження іншого інтеграла $\int vdu$, що при *вдалому* виборі *u* й *v* виявляється більше простим. Загальних правил вибору функцій *u* й *v* немає, однак можна дати деякі рекомендації для окремих випадків.

Як правило, метод інтегрування частинами застосовується у випадку, коли підінтегральна функція містить добуток раціональних і трансцендентних функцій і при цьому інші методи незастосовні.

Наприклад, $\int P_n(x)\cos\alpha x dx,\ \int P_n(x)\sin\alpha x dx,\ \int P_n(x)e^{\alpha x}dx,\ \int x^k \ln x dx,$ $\int x^k arctg\ x\, dx$ і т.д.

Якщо підінтегральна функція має вигляд $P_n(x)\cos\alpha x,\ P_n(x)\sin\alpha x,$ $P_n(x)e^{\alpha x}$, то за "u" приймають многочлен $P_n(x)$.

Якщо підінтегральна функція є добуток логарифмічної або оберненої тригонометричної функції й многочлена, то за "u" приймають ці функції.

Приклади.

1. $\int x\sin xdx\left|\begin{matrix}u=x, \quad du=dx \\ dv=\sin xdx \\ v=-\cos x\end{matrix}\right|=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C.$

2. $\int xarctgxdx=\left\|\begin{matrix}u=arctgx;\ du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx;\ \ v=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right\|=arctgx\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int x^2\frac{dx}{1+x^2}=$

$$=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}arctgx+C$$

У деяких випадках методом інтегрування частинами зводиться до розв'язування алгебраїчного рівняння щодо вихідного інтеграла.

3. $$I=\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx\left\|\begin{matrix}e^{\alpha x}=u, \sin\beta x dx=dv,\\ \alpha e^{\alpha x}dx=du, -\frac{1}{\beta}\cos\beta x=v\end{matrix}\right\|=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=$$

$$\left\|\begin{matrix}e^{\alpha x}=u, \cos\beta x dx=dv,\\ \alpha e^{\alpha x}dx=du, \frac{1}{\beta}\sin\beta x=v\end{matrix}\right\|=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx\right)=$$

$$-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx\Rightarrow$$

$I=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha^2}{\beta^2}I$ – рівняння щодо вихідного інтеграла *I*.

Звідси $I=\frac{\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}+c$.

4. $I=\int\sqrt{a^2+x^2}dx$.

$$I=\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\left\|\begin{matrix}u=\sqrt{a^2+x^2}, & du=\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}\\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right\|=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=$$

$$=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\frac{(x^2+a^2)-a^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=x\sqrt{a^2+x^2}-\underbrace{\int\sqrt{a^2+x^2}dx}_{I}+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=$$

$$=x\sqrt{a^2+x^2}-I+a^2\,ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+2C$$

Таким чином, отримане рівняння щодо вихідного інтеграла, тобто відносно I. Розв'язуючи це рівняння, одержимо

$$2I=x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\,ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+2C$$

$$I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\,ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)+C$$

5. $$\int\sin(\ln x)dx\left\|\begin{matrix}u=\sin(\ln x);\ du=\cos(\ln x)\frac{dx}{x};\\ dv=dx; \qquad v=x.\end{matrix}\right\|=x\times\sin(\ln x)-\int x\times\cos(\ln x)\frac{dx}{x}=$$

$$=x\cdot\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx\left\|\begin{matrix}u=\cos\ln x;\ du=-\sin(\ln x)\frac{dx}{x};\\ dv=dx; \quad v=x\end{matrix}\right\|x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int\sin(\ln x)dx$$

Отримано рівняння щодо шуканого інтеграла, звідси:

$$\int\sin(\ln x)dx=\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)+C\ .$$

Часто метод інтегрування частинами застосовується з методом заміни змінних.

6. $I=\int \sin^2\left(\sqrt{x}\right)dx=\left\|\begin{matrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{matrix}\right\|=2\int t\sin^2 tdt=2\int t\frac{1-\cos 2t}{2}dt=$

$\frac{t^2}{2}-\int t\cos 2tdt \left\|\begin{matrix} u=t, & du=dt \\ dv=\cos 2tdt, & v=\frac{\sin 2t}{2} \end{matrix}\right\|=\frac{t^2}{2}-t\frac{\sin 2t}{2}+\frac{1}{2}\int \sin 2tdt=\frac{t^2}{2}-t\frac{\sin 2t}{2}-$

$-\frac{1}{4}\cos 2t+C=\frac{\sqrt{x}}{2}\left(\sqrt{x}-\sin 2\sqrt{x}\right)-\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{x}+C$

6.2.3. Інтегрування раціональних дробів

Первісна функція існує для всякої неперервної функції (за теоремою про існування первісної для неперервної функції). Однак, задача знаходження аналітичного виразу первісної функції в скінченному виді, тобто у вигляді скінченної комбінації елементарних функцій, має точний розв’язок тільки в окремих випадках. У скінченному виді інтегрується досить вузький клас функцій.

Раціональні дроби належать до класу функцій, інтеграли від яких виражаються через елементарні функції. Під раціональним дробом розуміється відношення

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m}.$$

Будь-який раціональний дріб може бути представлений як сума многочлена й елементарних дробів. Під елементарними дробами розуміють дроби наступних чотирьох видів:

а) $\frac{A}{x-a}$; б) $\frac{A}{(x-a)^n}$; в) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, де $(p^2-4q)<0;$ г) $\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}$.

Знаходження інтегралів від раціональних дробів рекомендується виконувати за наступною схемою:

1. Якщо $n\geq m$ (дріб *неправильний*), то треба *виділити цілу частину* представивши підінтегральну функцію у вигляді суми цілої частини (многочлена) і правильного раціонального дробу.

2. Знаменник правильного раціонального дробу $Q_m(x)$ розкласти на множники, що відповідають дійсним і парам комплексно спряжених коренів, тобто множники виду $(x-a)^k, \left(x^2+px+q\right)^r$, де $p^2-4q<0.$

3. Розкласти правильний раціональний дріб на найпростіші, використовуючи теорему:

Теорема. *Якщо* $Q_m(x)=b_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}...\left(x^2+px+q\right)^{\mu}...\left(x^2+lx+s\right)^{\nu}$, *то правильний нескоротний раціональний дріб* $R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *може бути* *представлений у вигляді*

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)}+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+$$

$$+\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu}}+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}}+\ldots+\frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{\left(x^2+px+q\right)}+\ldots+$$

$$+\frac{Px+Q}{\left(x^2+lx+s\right)^{\nu}}+\frac{P_1x+N_1}{\left(x^2+lx+s\right)^{\nu-1}}+\ldots+\frac{P_{\nu-1}x+N_{\nu-1}}{\left(x^2+lx+s\right)}.$$

Коефіцієнти $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots$ можна визначити з наступних міркувань. Написана рівність є тотожність, тому, привівши дроби до загального знаменника, одержимо тотожні многочлени в чисельниках праворуч і ліворуч. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях х, одержимо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots$

Поряд із цим, для визначення коефіцієнтів можна використати наступний прийом: оскільки многочлени, отримані в правій і лівій частинах рівності після приведення до загального знаменника, повинні бути тотожно рівні, то їхні значення рівні при будь-яких значеннях *x*. Надаючи *x* конкретні значення, одержимо рівняння для визначення коефіцієнтів. Як такі значення зручно вибирати дійсні корені знаменника. На практиці для знаходження коефіцієнтів можна використати обидва підходи одночасно.

4. Інтеграли від найпростіших раціональних дробів знаходяться за формулами

а) $\int \frac{A\,dx}{x-a}=A\,ln|x-a|+C$

б) $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx=A\int (x-a)^{-n}\,d(x-a)=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C,\ n\neq 1$

в) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{A}{2}p+B}{x^2+px+q}\,dx=\frac{A}{2}ln\left(x^2+px+q\right)+$

$$+\left(B-\frac{A}{2}p\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=\frac{A}{2}ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{B-\frac{A}{2}p}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C,$$

де $p^2-4q<0.$

г) Обчислення інтегралів від найпростіших дробів четвертого типу досить складно; при необхідності можна скористатися рекурентним співвідношенням, що дозволяє виразити $I_n=\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}\,dx$ через I_{n-1}.

Приклади інтегрування раціональних дробів**.**

1. $I=\int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}dx$.

Дріб $\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}$ – правильний, тому що степінь чисельника менше степеня знаменника. Знаменник дробу має дійсні кратні корені. Розкладемо підінтегральну функцію на найпростіші дроби.

$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}$.

Приведемо до загального знаменника дроби й прирівняємо чисельники:

$x^2-3x+2=A(x+1)^2+Bx+Cx(x+1)$

Для знаходження коефіцієнта A покладемо $x=0$, тоді $A=2$. Покладаючи $x=-1$, знаходимо коефіцієнт $B=-6$.

Для відшукання коефіцієнта С прирівнюємо коефіцієнти при x^2:

$1=A+C$, тоді $C=-1$.

Отже, $I=2\int\frac{dx}{x}-6\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\int\frac{dx}{x+1}=2\ln|x|+\frac{6}{x+1}-\ln|x+1|+C$.

2. $\int\frac{dx}{x^3-1}=\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)}$;

розкладемо дріб на найпростіші $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$;

тоді $\quad 1=A(x^2+x+1)+(Bx+\tilde{N})(x-1)$

Нехай $x=1$, тоді $1=3A$, $A=1/3$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x; (наприклад, перш ому і другому) одержимо систему рівнянь для знаходження інших коефіцієнтів:

$x^1\quad A+C-B=0;\ \ C=-2/3$

$x^2\quad A+B=0\ ;\ \ B=-1/3.$

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{3}ln|x-1|-\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}+2}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}ln|x-1|-\frac{1}{6}ln(x^2+x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{d(x+1/2)}{(x+1/2)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}ln|x-1|-\frac{1}{6}ln(x^2+x+1)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Зауваження. При обчисленні інтегралів від раціональних функцій іноді можна обійтися без розкладання їх на найпростіші, застосовуючи інші прийоми, наприклад

1. $I=\int \frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt$.

Цей інтеграл можна знайти методом інтегрування частинами. Дійсно, покладаючи:

$$u=t,\ dv=\frac{tdt}{\left(t^2-1\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{d\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)^2};\ \ du=dt,\ v=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)^2}=-\frac{1}{2\left(t^2-1\right)},$$

одержимо

$$I=-\frac{t}{2\left(t^2-1\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}=-\frac{t}{2\left(t^2-1\right)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-C.$$

4. $$\int\frac{dt}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+4\right)}=\left\|t^2+4-\left(t^2-1\right)\equiv 5\right\|=\frac{1}{5}\int\frac{t^2+4-\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+4\right)}dt=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-1}-$$

$$-\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{5}ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{10}arctg\frac{t}{2}+C.$$

5. $I=\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

Дріб $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$ – неправильний, тому що степінь чисельника більше степеня знаменника. Виділимо цілу частину, розділивши чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \underline{x^5-4x^3} & x^2+x+4 \\ -\,x^4+4x^3-8 & \\ \underline{x^4-4x^2} & \\ -\,4x^3+4x^2-8 & \\ \underline{4x^3-16x} & \\ 4x^2+16x-8 & \end{array}$$

Тоді вихідний інтеграл зводиться до суми наступних двох інтегралів

$$I=\int(x^2+x+4)dx+\int\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}dx$$

Розкладемо підінтегральну функцію другого інтеграла на найпростіші дроби:

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$$

Приведемо до загального знаменника, прирівняємо чисельники

$$4x^2+16x-8=A(x^2-4)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

При $x=0: -8=-4A\Rightarrow A=2.$

При $x=2: 40=8B\Rightarrow B=5.$

При $x=-2: -24=8C\Rightarrow C=-3.$

Виходить,

$$I=\int(x^2+x+4)dx+2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+c=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3}+c.$$

6.2.4. Інтегрування тригонометричних виразів

Теорема 1. Інтеграл виду $\int R(\sin x,\cos x)dx$, де $R(\sin x,\cos x)$ – раціональна функція відносно *sinx* й *cosx*, підстановкою, $t=tg\frac{x}{2}$ приводиться до інтеграла від раціональної функції змінної *t*.

Підстановка $t=tg\frac{x}{2}$ застосовна до будь-яких раціональних відносно *sinx* й *cosx* функцій, у зв'язку із чим вона називається *універсальною*. Однак, у силу своєї універсальності, дана підстановка звичайно приводить до громіздких викладень, тому вона використовується в тих випадках, коли інші підстановки застосувати не можна.

При обчисленні інтегралів виду $\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$ застосовується *універсальна тригонометрична підстановка* $tg\frac{x}{2}=t$, або $x=2arctgt$.

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

Приклад 1. $I=\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}$

Враховуючи наведені вище формули, одержимо

$$I=\int\frac{2dt}{t^2+2t+17}=2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+4^2}==\frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{4}+C$$

Теорема 2**.** Якщо $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тобто підінтегральна функція непарна відносно *cosx*, то підстановкою *t*= *sinx* інтеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$ приводиться до інтеграла від раціональної функції *t*.

Приклад 2.

$$\int\frac{\cos^3 x}{2+\sin x}dx\,\left|t=\sin x\right|=\int\frac{(1-t^2)dt}{2+t}=\int(-t+2-\frac{3}{2+t})dt=$$

$$=-\frac{t^2}{2}+2t-3\ln(2+t)+C=-\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x-3\ln(2+\sin x)+C\,.$$

Приклад 3.

$$\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{2+\cos 2x}}=\left\|\begin{matrix}\cos xdx=d(\sin x)\\ \cos 2x=1-2\sin^2 x\\ 2+\cos 2x=3-2\sin^2 x\end{matrix}\right\|=\int\frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt2}\int\frac{d(\sqrt2\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\arcsin\frac{\sqrt2\sin x}{\sqrt3}+C.$$

Терема 3. Якщо $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тобто підінтегральна функція непарна відносно *sinx*, то підстановкою *t=cosx* інтеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$ приводиться до інтеграла від раціональної функції *t*.

Приклад 4. $\int\sin^5 xdx=\int(1-\cos^2 x)^2\sin xdx=\left\|\begin{matrix}\cos x=t\\ dt=-\sin xdx\end{matrix}\right\|=-\int(1-t^2)^2dt=$

$$=-\int(1-2t^2+t^4)dt=-(t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5})+C=\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x-\cos x+C$$

Приклад 5. $I=\int\frac{\sin xdx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}=\left\|\begin{matrix}\cos x=t\\ -\sin xdx=dt\end{matrix}\right\|=-\int\frac{dt}{t\sqrt{2-t^2}}=\left\|\begin{matrix}t=\sqrt2\sin u\\ dt=\sqrt2\cos udu\end{matrix}\right\|=$

$$=-\sqrt2\int\frac{\cos udu}{\sqrt2\sin u\sqrt2\cos u}=-\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|tg\frac{u}{2}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|tg\left(\arcsin\frac{t}{\sqrt2}\right)\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|tg\left(\arcsin\frac{\cos x}{\sqrt2}\right)\right|+C.$$

Теорема 4. Якщо $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, тобто підінтегральна функція парна відносно *sinx* й *cosx*, то інтеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$ підстановкою *t=tgx* приводиться до інтеграла від раціональної функції *t*.

Приклад 6.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+6\sin x\cos x-16\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+6\frac{\sin x}{\cos x}-16\right)}=$$

$$=\int\frac{d(tgx)}{tg^2x+6tgx-16}=|t=tgx|==\int\frac{dt}{(t+3)^3-25}=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{t-2}{t+8}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx-2}{tgx+8}\right|+C.$$

$$\int\frac{\sin x\cos xdx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int\frac{\cos^2 xtgxdx}{\cos^4 x(1+tg^4x)}=\int\frac{tgxdx}{\cos^2 x(1+tg^4x)}=$$

$$=\left\|\frac{tgxdx}{\cos^2 x}=\frac{1}{2}d(tg^2x)\right\|=\frac{1}{2}\int\frac{d(tg^2x)}{(1+tg^4x)}=\frac{1}{2}arctg(tg^2x)+C.$$

Інтеграли виду $\int\sin ax\cos bxdx;\int\cos ax\cos bxdx;\int\sin ax\sin bxdx,$ де $a\neq b$, знаходяться за допомогою формул:

$$\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}[\sin(a-b)x+\sin(a+b)x];$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x];$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x].$$

Приклад. $\int \sin\frac{x}{12}\cos\frac{x}{3}dx = \frac{1}{2}\left(\int \sin\left(\frac{x}{12}-\frac{x}{3}\right)dx + \int \sin\left(\frac{x}{12}+\frac{x}{3}\right)dx\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(-\int \sin\frac{x}{4}dx + \int \sin\frac{5x}{12}dx\right) = \frac{1}{2}\left(-4\int \sin\frac{x}{4}d\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{12}{5}\int \sin\frac{5x}{12}d\left(\frac{5x}{12}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4\cos\frac{x}{4} - \frac{12}{5}\cos\frac{5x}{12}\right) + C$$

Інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$**,**

де m й n – додатні парні числа, знаходяться за допомогою формул:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad (6.2.2)$$

Приклад 1. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$;

Розв'язання. 1) Застосовуючи формули (6.2.2), одержуємо

$$I = \int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \frac{1+\cos 2x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

Приклад 2. $\int \cos^4 x dx = \int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

Інтеграли виду $\int tg^n x dx, \int ctg^n x dx, n \in N (n \geq 3)$

знаходяться за допомогою формул $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, при цьому відокремлюємо множники $tg^2 x$ або $ctg^2 x$:

$$tg^n x = tg^{n-2} x \cdot tg^2 x.$$

Приклад. $\int tg^5 x dx = \int tg^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int tg^3 x d(tgx) - \int tgx\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$

$$= \frac{tg^4 x}{4} - \int tgx d(tgx) + \int tgx dx = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C.$$

Контрольні завдання до розділу 6

Завдання 1. Знайти невизначені інтеграли.

6.1.1.

$1.\int \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}dx;\ \ 2.\int \frac{1+ln(x-1)}{x-1}dx;\ \ 3.\int (4-3x)e^{-3x}dx;\ \ 4.\int \frac{arcsin\frac{1}{x}}{x^2}dx;$

$5.\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx;\ \ 6.\int \sqrt{256-x^2}dx;\ \ 7.\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)\cdot(x+2)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{(x^2+1)\cdot(x-2)}dx;\ 9.\int \frac{1}{sin\,x+cos\,x+3}dx;\ \ 10.\int \frac{\sqrt{tg\,x}}{sin\,x\cdot cos\,x}dx.$

6.1.2.

$1.\int \frac{1+ln\,x}{x}dx;\ \ 2.\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2}dx;\ \ 3.\int arctg\sqrt{4x-1}dx;\ \ 4.\int \frac{x\cdot cos\,x}{sin^3 x}dx;$

$5.\int \frac{4x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx;\ \ 6.\int x^2\sqrt{1-x^2}dx;\ \ 7.\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x\cdot(x+2)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{x\cdot(x^2+1)}dx; 9.\int \frac{1}{2\cdot sin\,x+3\cdot cos\,x+2}dx;\ \ 10.\int \frac{1}{e^x+1}dx.$

6.1.3.

$1.\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx;\ \ 2.\int \frac{4\cdot arctg\,x-4}{1+x^2}dx;\ \ 3.\int x\cdot ln(x-1)dx;\ \ 4.\int sin\,4x\cdot e^{sin\,2x}dx;$

$5.\int \frac{7x-1}{\sqrt{3x^2-6x+9}}dx;\ \ 6.\int \frac{1}{(25+x^2)\cdot\sqrt{25+x^2}}dx;\ \ 7.\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)\cdot(x-2)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{1-x^4}dx;\ \ 9.\int \frac{1}{7\cdot cos\,x-6\cdot sin\,x+9}dx;\ \ 10.\int \sqrt{1+sin\,x}dx.$

6.1.4.

$1.\int \frac{x^2+ln\,x^2}{x}dx;\ \ 2.\int \frac{x^3}{x^2+4}dx;\ \ 3.\int (4-16x)\cdot sin\,4x dx;\ \ 4.\int \frac{arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;$

$5.\int \frac{4x+3}{\sqrt{-x^2+2x+4}}dx;\ \ 6.\int \frac{1}{(9+x^2)^{3/2}}dx;\ \ 7.\int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)\cdot(x+2)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{(x^2+1)\cdot(x^2+x)}dx;\ \ 9.\int \frac{1}{2\cdot sin\,x+3\cdot cos\,x+2}dx;\ \ 10.\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx.$

6.1.5.

$1.\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot(x+1)}dx;\ \ 2.\int \frac{x+cos\,x}{x^2+2\cdot sin\,x}dx;\ \ 3.\int (3x+4)\cdot e^{3x}dx;\ \ 4.\int \frac{arctg\,ln\,x}{x}dx;$

$5.\int \frac{3x+4}{\sqrt{9x^2+6x-5}}dx;\ \ 6.\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx;\ \ 7.\int \frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1)\cdot(x+2)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{(x^2+4)\cdot(x-1)}dx;$ $9.\int \frac{1}{3\cdot \sin x+11\cdot \cos x+12}dx;$ $10.\int e^{2x}\sqrt{1+e^x}dx.$

6.1.6.

$1.\int \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ $2.\int \frac{2\cdot \cos x+3\cdot \sin x}{(2\cdot \sin x-3\cdot \cos x)^3}dx;$ $3.\int \ln(x^2+4)dx;$

$4.\int x^3\cdot e^{-x^2}dx;$ $5.\int \frac{1-4x}{\sqrt{x^2-x+2}}dx;$ $6.\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx;$ $7.\int \frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)\cdot(x-2)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{(x+1)\cdot(x^2+1)}dx;$ $9.\int \frac{1}{18\cdot \cos x-\sin x+17}dx;$ $10.\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$

6.1.7.

$1.\int \operatorname{tg} x\cdot \ln\cos x dx;$ $2.\int \frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx;$ $3.\int (1-6x)\cdot e^{2x}dx;$ $4.\int \frac{x\cdot \sin x}{\cos^3 x}dx;$

$5.\int \frac{2-5x}{\sqrt{4x^2-8x+1}}dx;$ $6.\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx;$ $7.\int \frac{2x^2+6x^2+7x+1}{(x-1)\cdot(x+1)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{(x+1)(x^2+2)}dx;$ $9.\int \frac{1}{8\cos x+\sin x+9}dx;$ $10.\int \sqrt{1+\cos^2 x}\sin 2x\cos 2x dx.$

6.1.8.

$1.\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx;$ $2.\int \frac{(1/2\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+x)^2}dx;$ $3.\int (4x-2)\cdot \cos 2x dx;$ $4.\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x^2}dx;$

$5.\int \frac{4x-1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}dx;$ $6.\int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx;$ $7.\int \frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)\cdot(x+2)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{16-x^4}dx;$ $9.\int \frac{1}{5\cdot \cos x-5\cdot \sin x+7}dx;$ $10.\int \sqrt{e^x-1}dx.$

6.1.9.

$1.\int \frac{x^3+x}{(x^2+1)^2}dx;$ $2.\int \frac{x\cdot e^{x^2}}{\cos^2\left(e^{x^2}\right)}dx;$ $3.\int (2-4x)\cdot \sin 2x dx;$ $4.\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;$

$5.\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2-4x+4}}dx;$ $6.\int \frac{x^4}{(4-x^2)^{3/2}}dx;$ $7.\int \frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x\cdot(x+1)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)}dx;$ $9.\int \frac{1}{25\cdot \cos x+2\cdot \sin x+23}dx;$ $10.\int \frac{\ln\operatorname{tg} x}{\sin x\cdot \cos x}dx.$

6.1.10.

$1.\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx;$ $2.\int \frac{x}{x^4+1}dx;$ $3.\int (5x-2)\cdot e^{3x}dx;$ $4.\int \sin x\cdot \ln\cos x dx;$

$5.\int \frac{3x+2}{\sqrt{-x^2+x+4}}dx;$ $6.\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx;$ $7.\int \frac{x^3-6x^2+13x-8}{x\cdot(x-2)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{(x-1)\cdot\left(x^2+1\right)}dx;$ $9.\int \frac{1}{5\cdot\cos x+3\cdot\sin x+3}dx;$ $10.\int \frac{x^5}{\left(x^2-4\right)^2}dx.$

6.1.11.

$1.\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}dx;$ $2.\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ $3.\int arctg\sqrt{6x-1}dx;$ $4.\int x^3\arcsin x^2dx;$

$5.\int \frac{2x+4}{\sqrt{4x^2+4x-2}}dx;$ $6.\int \sqrt{4-x^2}dx;$ $7.\int \frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)\cdot(x-2)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{\left(x^2+2\right)\cdot x}dx;$ $9.\int \frac{1}{2\cdot\cos x-3\cdot\sin x+1}dx;$ $10.\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$

6.1.12.

$1.\int \frac{x\cdot\cos x+\sin x}{(x\cdot\sin x)^2}dx;$ $2.\int \frac{arctg\,x+x}{1+x^2}dx;$ $3.\int e^{-2x}(4x-3)dx;$ $4.\int \frac{arcctg\ln x}{x}dx;$

$5.\int \frac{-3x+1}{\sqrt{-x^2+3x-1}}dx;$ $6.\int \frac{1}{\left(16+x^2\right)^{3/2}}dx;$ $7.\int \frac{x^3-6x^2+14x-6}{(x+1)\cdot(x-2)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{(1-x)\cdot\left(x^2+2\right)\cdot x}dx;$ $9.\int \frac{1}{7\cdot\cos x-\sin x+5}dx;$ $10.\int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}dx.$

6.1.13.

$1.\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx;$ $2.\int \frac{x-(arctg\,x)^4}{1+x^2}dx;$ $3.\int \frac{x}{\cos^2 x}dx;$ $4.\int \sin 4x\cdot e^{\cos 2x}dx;$

$5.\int \frac{-3x+6}{\sqrt{6x^2-2x-7}}dx;$ $6.\int x^2\sqrt{16-x^2}dx;$ $7.\int \frac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)\cdot(x-2)^3}dx;$

$8.\int \frac{x}{(x+1)\cdot\left(x^2+1\right)}dx;$ $9.\int \frac{1}{11\cdot\cos x+8\cdot\sin x+13}dx;$ $10.\int \frac{1-tg\,x}{1+tg\,x}dx.$

6.1.14.

$1.\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx;$ $2.\int \frac{\cos x-x\sin x}{(x\cdot\cos x)^3}dx;$ $3.\int arctg\sqrt{2x-1}dx;$ $4.\int \sin 4x\ln\sin 2x dx;$

$5.\int \frac{3x-2}{\sqrt{-x^2-3x-2}}dx;$ $6.\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx;$ $7.\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)\cdot x^3}dx;$

$8.\int \frac{x}{x^2\cdot\left(x^2+2\right)}dx;$ $9.\int \frac{1}{\cos x+2\cdot\sin x+2}dx;$ $10.\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx.$

6.1.15.

$1.\int \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}dx;$ $2.\int \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ $3.\int \ln\left(4x^2+1\right)dx;$ $4.\int \frac{arcctg\,\frac{1}{x}}{x^2}dx;$

$5.\int \frac{4-x}{\sqrt{x^2+8x+3}}dx;$ $6.\int x^2\sqrt{25-x^2}dx;$ $7.\int \frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)\cdot(x+1)^3}dx;$

$8.\int \frac{x}{(x-1)\cdot\left(x^2+4\right)}dx;$ $9.\int \frac{1}{7\cdot\sin x-19\cdot\cos x-17}dx;$ $10.\int x\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx.$

6.1.16.

$1.\int \frac{1+ln(x-1)}{x-1}dx;\ 2.\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot(x+1)}dx;\ 3.\int (5x+6)\cdot cos\,2xdx;$

$4.\int e^{2x}\,arcsine^{x}dx;5.\int \frac{3x-4}{\sqrt{-x^2-x+5}}dx;\ \ 6.\int \sqrt{16-x^2}dx;\ \ 7.\int \frac{2x^3+x+1}{(x+1)\cdot x^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{(x-2)\cdot(x^2+1)}dx;\ \ 9.\int \frac{1}{sin\,x-3\cdot cos\,x-1}dx;\ \ 10.\int \frac{sin\,x}{1+sin\,x}dx.$

6.1.17.

$1.\int \frac{(x^2+1)}{(x^3+3x+1)^5}dx;\ 2.\int \frac{1}{cos^2 x\sqrt{1+tg\,x}}dx;\ 3.\int (2x-5)cos\,4xdx;$

$4.\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;5.\int \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x-8}}dx;\ 6.\int \frac{1}{\sqrt{(16-x^2)^3}}dx;$

$7.\int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)\cdot(x+1)^3}dx;8.\int \frac{1}{(x^2+1)x}dx;9.\int \frac{1}{2+cos\,x+sin\,x}dx;10.\int x\sqrt{a-x}dx.$

6.1.18.

$1.\int \frac{arctg\,x-x}{1+x^2}dx;\ \ 2.\int \frac{1+ln\,x}{x}dx;\ \ 3.\int (3x-2)\cdot cos\,5xdx;\ \ 4.\int cos\,x\cdot ln\,sin\,xdx;$

$5.\int \frac{2x+5}{\sqrt{-x^2+2x+1}}dx;\ \ 6.\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx;\ \ 7.\int \frac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)\cdot(x+1)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{x^4-1}dx;\ \ 9.\int \frac{1}{5-3\cdot cos\,x-12\cdot sin\,x}dx;\ \ 10.\int \frac{cos\,2x}{1+sin\,x\cdot cos\,x}dx.$

6.1.19.

$1.\int \frac{x^3}{x^2+4}dx;\ 2.\int \frac{sin^2 x-sin\,x}{cos^4 x}dx;\ 3.\int (x\cdot\sqrt{2}-3)\cdot cos\,2xdx;\ 4.\int \frac{arcsin\,ln\,x}{x}dx;$

$5.\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+12x+1}}dx;\ \ 6.\int \frac{x^4}{(16-x^2)\cdot\sqrt{16-x^2}}dx;\ \ 7.\int \frac{2x^3+6x^2+7x}{(x-2)\cdot(x+1)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{(x^2+x)\cdot(x^2+1)}dx;\ \ 9.\int \frac{1}{6-4\cdot sin\,x-2\cdot cos\,x}dx;\ \ 10.\int \frac{sin^3 x}{\sqrt{cos\,x}}dx.$

6.1.20.

$1.\int \frac{x+cos\,x}{x^2+2\cdot sin\,x}dx;\ \ 2.\int \frac{x^2+ln\,x^2}{x}dx;\ \ 3.\int (4x+7)\cdot cos\,3xdx;\ \ 4.\int \frac{x\cdot cos\,x}{sin^2 x}dx;$

$5.\int \frac{2x+3}{\sqrt{-x^2-3x+4}}dx;\ \ 6.\int x^2\sqrt{9-x^2}dx;\ \ 7.\int \frac{2x^3+6x^2+5x+4}{(x-2)\cdot(x+1)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{(x^2+1)\cdot(x+1)}dx;\ \ 9.\int \frac{1}{2\cdot sin\,x+3\cdot cos\,x+2}dx;\ \ 10.\int \frac{1+sin\,x}{1-sin\,x}dx.$

6.1.21.

$$1.\int\frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx;\ 2.\int\frac{e^{\sqrt{x}}\cos e^{\sqrt{x}}}{2\cdot\sqrt{x}}dx;\ 3.\int\frac{x}{\sin^2 x}dx;\ 4.\int\sin(x^2)x^3dx;$$

$$5.\int\frac{1-5x}{\sqrt{x^2+x+9}}dx;\ \ 6.\int\frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}dx;\ \ 7.\int\frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)\cdot(x+2)^3}dx;$$

$$8.\int\frac{1}{(x-1)\cdot\left(x^2+4\right)}dx;\ \ 9.\int\frac{1}{2-2\cdot\sin x+\cos x}dx;\ \ 10.\int\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}dx.$$

6.1.22.

$$1.\int\frac{8x-\mathrm{arctg}\,2x}{1+4x^2}dx;\ \ 2.\int\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^3}dx;\ \ 3.\int(8-3x)\cdot\cos 5x dx;\ \ 4.\int\frac{\arccos\frac{1}{x}}{x^2}dx;$$

$$5.\int\frac{1-2x}{\sqrt{-x^2-3x+4}}dx;\ \ 6.\int\frac{1}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}dx;\ \ 7.\int\frac{x^3+6x^2+14x+4}{(x-2)\cdot(x+2)^3}dx;$$

$$8.\int\frac{1}{\left(x^2+2\right)\cdot(x+1)}dx;\ \ 9.\int\frac{1}{12\cdot\cos x-3\cdot\sin x+13}dx;\ \ 10.\int\frac{1}{(2+x)\cdot\sqrt{1+x}}dx.$$

6.1.23.

$$1.\int\frac{\left(1/2\sqrt{x}\right)+1}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2}dx;\ 2.\int\mathrm{tg}\,x\cdot\ln\cos x dx;\ 3.\int\mathrm{arctg}\sqrt{5x-1}dx;\ 4.\int e^{2x}\mathrm{arctg}\,e^x dx;$$

$$5.\int\frac{3x+2}{\sqrt{6x^2+12x+24}}dx;\ \ 6.\int\frac{x^4}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx;\ \ 7.\int\frac{x^3+6x^2+18x-4}{(x-2)\cdot(x+2)^3}dx;$$

$$8.\int\frac{1}{x^4-16}dx;\ \ 9.\int\frac{1}{3\cdot\sin x+4\cdot\cos x+3}dx;\ \ 10.\int x\cdot\sqrt{3+x}dx.$$

6.1.24.

$$1.\int\frac{x+x^3}{x^4+1}dx;\ \ 2.\int\frac{\mathrm{tg}\,(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx;\ \ 3.\int(2-3x)\cdot\sin 2x dx;\ \ 4.\int\sin 4x\cdot e^{\sin 2x}dx;$$

$$5.\int\frac{3-2x}{\sqrt{-x^2+10x-6}}dx;\ \ 6.\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}dx;\ \ 7.\int\frac{x^3+6x^2+10x+12}{(x-2)\cdot(x+2)^3}dx.$$

$$8.\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot x\cdot(x+1)}dx;\ \ 9.\int\frac{1}{19-\sin x+18\cos x}dx;\ \ 10.\int\frac{\sqrt[3]{\mathrm{ctg}\,x}}{\sin x\cdot\cos x}dx.$$

6.1.25.

$$1.\int\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)dx;\ \ 2.\int\frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx;\ \ 3.\int(4x+3)\cdot\sin 5x dx;$$

$$4.\int\frac{\mathrm{arcctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;5.\int\frac{4x+6}{\sqrt{4x^2+8x+3}}dx;6.\int\sqrt{4-x^2}dx;7.\int\frac{x^3-6x^2+14x-4}{(x+2)\cdot(x-2)^3}dx;$$

$$8.\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot(x-1)}dx;\ \ 9.\int\frac{1}{2\cdot\sin x+3\cdot\cos x+1}dx;\ \ 10.\int\frac{\mathrm{tg}\,x+1}{\mathrm{tg}\,x-1}dx.$$

6.1.26.

$$1.\int\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{1/\sqrt{x}}{1+x}\right)dx;\ 2.\int\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx;\ 3.\int(7x-10)\sin 4x dx;\ 4.\int\frac{\arccos\ln x}{x}dx;$$

$$5.\int\frac{5-2x}{\sqrt{-x^2+6x-5}}dx;\ \ 6.\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx;\ \ 7.\int\frac{x^3+6x^2+15x+2}{(x-2)\cdot(x+2)^3}dx;$$

$$8.\int\frac{1}{x\cdot\left(x^2+2\right)}dx;\ \ 9.\int\frac{1}{5\cdot\cos x+3\cdot\sin x+3}dx;\ \ 10.\int\frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}dx.$$

6.1.27.

$$1.\int\frac{\mathrm{arctg}\,x+x}{1+x^2}dx;\ 2.\int\frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}dx;\ 3.\int\left(\sqrt{2}-8x\right)\sin 3x dx;\ 4.\int e^{2x^2}x^3 dx;$$

$$5.\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+6x+8}}dx;\ \ 6.\int\frac{1}{\left(4+x^2\right)\cdot\sqrt{4+x^2}}dx;\ \ 7.\int\frac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x-2)\cdot(x-1)^3}dx;$$

$$8.\int\frac{1}{x\cdot\left(x^2+2\right)(x-1)}dx;\ 9.\int\frac{1}{8\cdot\sin x+11\cdot\cos x+13}dx;\ 10.\int(x+3)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$$

6.1.28.

$$1.\int\frac{x-(\mathrm{arctg}x)^4}{1+x^2}dx;2.\int\frac{x\cos x+\sin x}{(x\cdot\sin x)^2}dx;3.\int e^{-3x}(2-9x)dx;4.\int x^3\arccos x^2 dx;$$

$$5.\int\frac{3+x}{\sqrt{-x^2+6x-1}}dx;\ \ 6.\int\frac{x^4}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}dx;\ \ 7.\int\frac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)\cdot(x-1)^3}dx;$$

$$8.\int\frac{x}{\left(x^2+1\right)\cdot(x+1)}dx;\ \ 9.\int\frac{1}{17+18\cdot\cos x-\sin x}dx;\ \ 10.\int\frac{1}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2}dx.$$

6.1.29.

$$1.\int\frac{x^3+x}{x^4+1}dx;\ \ 2.\int\frac{\cos^2 x+\cos x}{\sin^4 x}dx;\ \ 3.\int\mathrm{arctg}\,\sqrt{3x-1}dx;\ \ 4.\int x^3\cdot\sin x^2 dx;$$

$$5.\int\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+6x+1}}dx;\ \ 6.\int\frac{1}{\left(1-x^2\right)\cdot\sqrt{1-x^2}}dx;\ \ 7.\int\frac{x^3+6x^2-10x+52}{(x-2)\cdot(x+2)^3}dx;$$

$$8.\int\frac{x}{\left(x^2+2\right)\cdot x^2}dx;\ \ 9.\int\frac{1}{7\cdot\sin x-19\cdot\cos x-17}dx;\ \ 10.\int\frac{\sin^3 x}{(\cos x)^{5/2}}dx.$$

6.1.30.

$$1.\int\frac{(\arcsin x)^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx;\ \ 2.\int\frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}dx;\ \ 3.\int x\cdot\sin^2 x dx;\ \ 4.\int\cos x\cdot\ln\sin x dx;$$

$$5.\int\frac{x-5}{\sqrt{-x^2+10x+1}}dx;\ \ 6.\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx;\ \ 7.\int\frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)\cdot(x-2)^3}dx;$$

$$8.\int\frac{x}{\left(x^2+4\right)\cdot(x-1)}dx;\ \ 9.\int\frac{1}{9+\sin x+8\cdot\cos x}dx;\ \ 10.\int\frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx.$$

РОЗДІЛ 7

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

7.1. Означення, властивості, геометричний зміст визначеного інтеграла

До поняття визначеного інтеграла приводять задачі обчислення площ, об'ємів тіл, довжини дуги кривої, фізичні задачі.

Нехай на відрізку $[a,b]$ визначена функція *y=f(x)*. Розіб'ємо відрізок на *n* частин точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$.

На кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ візьмемо довільну точку ξ_i й складемо суму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, що називається *інтегральною сумою*.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми S_n при $\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} \to 0$, що не залежить від способу розбивки області на елементарні ділянки й вибору точок ξ_i, то вона називається *визначеним інтегралом* функції *f(x)* на відрізку $[a,b]$ й позначається

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Функція *f(x)* у цьому випадку називається інтегровною на відрізку $[a,b]$.

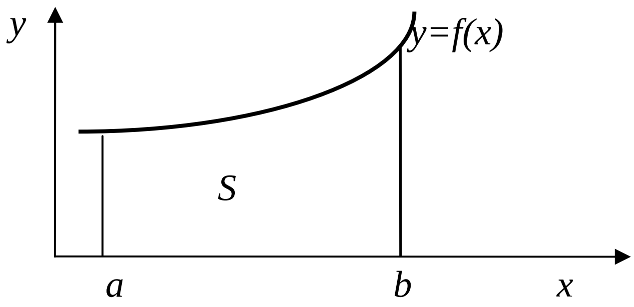


Рис. 7.1

Геометричний зміст визначеного інтеграла: якщо $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції з основою *[a,b]*, обмеженої прямими *x=a*, *x=b* і кривою *y=f(x)* (рис. 7.1).

Властивості визначеного інтеграла.

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3. *Лінійність* інтеграла. Якщо $f(x)$ й $g(x)$ – функції, інтегровні на $[a,b]$, то

а) $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx,\ (c = const)$; б) $\int\limits_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$

Поєднуючи властивості а) і б), можна записати властивість лінійності визначеного інтеграла: $\int\limits_a^b \left(c_1 f(x) + c_2 g(x)\right)dx = c_1\int\limits_a^b f(x)dx + c_2\int\limits_a^b g(x)dx.$

4. *Адитивність* інтеграла. Якщо $f(x)$ – функція інтегровна на $[a,c]$ й $[c,b]$, де $c \in (a,b)$, то вона інтегровна на *[a,b]* й

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

5. Якщо $a < b$ й $f(x) \geq 0$, те $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$, причому рівність нулю можлива тільки в тому випадку, коли $f(x) \equiv 0, \forall x \in (a,b)$.

6. Якщо $a < b$ й $f(x) \geq g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$ – теорема про інтегрування нерівностей.

7. Якщо $f(x)$ – функція, інтегровна на *[a,b]*, то $|f(x)|$ – інтегровна на *[a,b]* і справедлива нерівність:

$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$ – теорема про модуль визначеного інтеграла.

8. Теорема про оцінку визначеного інтеграла. Якщо $m \leq f(x) \leq M$, *m*– найменше, *M* – найбільше значення функції *f(x)* на відрізку *[a; b]*,то

$$m(в - a) \leq \int\limits_a^в f(x)dx \leq M(в - a).$$

9. Теорема про середнє значення. Якщо $f(x)$ неперервна $\forall x \in [a,b]$, то

$\exists \xi \in (a,b)$, що $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$

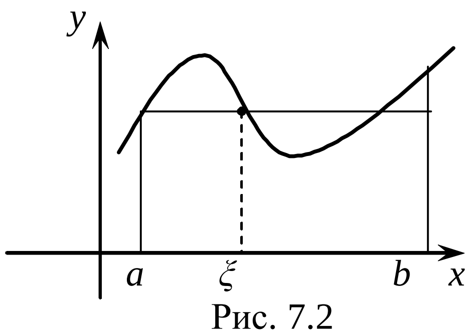


Рис. 7.2

Геометричний зміст теореми: нехай $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$, тоді існує принаймні одна точка $\xi \in (a,b)$, що площа криволінійної трапеції, обмеженої зверху неперервною кривою $y = f(x)$ буде рівна площі прямокутника з тією ж основою й висотою, рівною $f(\xi)$ (рис. 7.2). Значення $f(\xi)$ називається середнім значенням функції на відрізку *[a, b]*.

10. Якщо функції $f(x)$ й $\varphi(x)$ – неперервні на *[a, b]*, а $\varphi(x)$ зберігає знак на цьому відрізку, то (узагальнена теорема про середнє):

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx, \quad a<\xi<b$$

11. Якщо неперервна функція $f(x)$, $x\in[-l,l]$ – парна, то $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_0^l f(x)dx$.

Якщо $f(x)$ – непарна, то $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$.

7.2. Методи обчислення визначеного інтеграла

Фундаментальним результатом математичного аналізу й поворотним моментом у розвитку інтегрального числення з'явилося відкриття зв'язку між визначеним і невизначеним інтегралами. Це дозволило визначені інтеграли обчислювати не як границі інтегральних сум, а через невизначені інтеграли.

Теорема. *Похідна визначеного інтеграла від неперервної функції по його верхній межі існує й дорівнює значенню підінтегральної функції у верхній межі, тобто*

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x).$$

Наприклад, а) $\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)'_x = e^{-x^2}$; б) $\left(\int_x^0 \sqrt{\sin^3 t}\,dt\right)'_x = \left(-\int_0^x \sqrt{\sin^3 t}\,dt\right)'_x = -\sqrt{\sin^3 x}$.

Формула Ньютона-Лейбніца: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$ – основна формула інтегрального числення, що встановлює зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами й дозволяє знаходити значення визначеного інтеграла як різницю значень первісної на верхній і нижній межах визначеного інтеграла.

Приклади**.**

Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int_1^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin \ln x\Big|_1^e = \arcsin\ln e - \arcsin\ln 1 =$

$\arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$

2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\sin^2 x)d(\sin x)}{(\sin x)^{\frac{1}{3}}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} (\sin x)^{-\frac{1}{3}} d(\sin x) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin^{\frac{5}{3}} x d(\sin x) =$

$\left(\frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{8}\sin^{\frac{8}{3}} x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}\left(\sin^{\frac{2}{3}}(-\frac{\pi}{4}) - \sin^{\frac{2}{3}}(-\frac{\pi}{2})\right) - \frac{3}{8}\left(\sin^{\frac{8}{3}}(-\frac{\pi}{4}) - \sin^{\frac{8}{3}}(-\frac{\pi}{2})\right) =$

$$\frac{3}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right)-\frac{3}{8}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{8}{3}}-1\right)=-\frac{9}{8}+\frac{21}{16}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

3. $$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2\sin^2 x+\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{2tg^2x+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_9^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sqrt{2}\cdot tgx)}{(\sqrt{2}\cdot tgx)^2+1}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}\cdot tgx)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(arctg(\sqrt{2}\cdot tg\frac{\pi}{4}-arctg0\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\sqrt{2}.$$

4. $$\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{d(x+1)}{\sqrt{-(x+1)^2+2^2}}=\arcsin\frac{x+1}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}-1}=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}.$$

5. $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{cos\,x-cos^3 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{cos\,x\left(1-cos^2 x\right)}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|sin\,x|(cos\,x)^{1/2}dx=$$

Скористаємося парністю підінтегральної функції.

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(\cos x)^{1/2}dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{1/2}d(\cos x)=-2\cdot\frac{(\cos x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}.$$

6. Обчислити середнє значення функції

$$f(x)=\cos\frac{\pi}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\quad \text{на відрізку } \left[0;\frac{1}{2}\right].$$

Розв’язання. Середнє значення функції за теоремою про середнє дорівнює:

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,\ \text{ãäå}\ b-a=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{1-x}d\left(\frac{1}{1-x}\right)=\sin\frac{\pi}{1-x}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\sin 2\pi-\sin\pi=0.$$

Отже, середнє значення функції дорівнює

$$f(\xi)=\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot 0=0.$$

7. Оцінити інтеграл $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx$.

Точне значення інтеграла в цьому випадку знайти не можна, тому що первісна не виражається через елементарні функції.

Для дослідження поведінки підінтегральної функції $f(x)=\frac{sin\,x}{x}$ на відрізку

$\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ знаходимо її похідну:

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\left\|x<tgx,\ x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]\right\|=\frac{(x-tgx)\cos x}{x^2}<0$$

Підінтегральна функція $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ спадає на відрізку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, тому що її похідна $f'(x)<0.$.

Найменше значення функції $m=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$, а найбільше значення функції $M=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

$\forall x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ має місце нерівність: $\frac{2}{\pi}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Скориставшись теоремою про оцінку інтеграла, одержимо:

$$\frac{1}{2}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

8. Оцінити абсолютну величину інтеграла $\int_{10}^{19}\frac{\sin x}{1+x^8}dx$.

Оскільки $|\sin x|\le 1$, то при $x>10$ виконується нерівність $\left|\frac{\sin x}{1+x^8}\right|\le 10^{-8}$.

Використовуючи властивість 7, одержимо:

$$\left|\int_{10}^{19}\frac{\sin x}{1+x^8}dx\right|<\int_{10}^{19}\left|\frac{\sin x}{1+x^8}\right|dx<(19-10)10^{-8}<10^{-7}.$$

Заміна змінної в визначеному інтегралі

Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, а функція $x=\varphi(t)$ – монотонна й має неперервну похідну на відрізку $[\alpha,\beta]$, де $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, тоді має місце формула заміни змінної в визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Зауваження. Заміну змінної інтегрування звичайно роблять за допомогою монотонних неперервних функцій, тому що монотонність гарантує однозначність як прямої, так і оберненої функції. При цьому, якщо змінна t змінюється в проміжку $[\alpha;\beta]$, значення функції $\varphi(t)$ не повинні виходити за межі проміжку $[a, b]$.

Відзначимо, що до інтегралів виду $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ застосовна підстановка $x\text{-}\alpha=1/t$ (підстановка приводить до менш громіздких викладень, ніж тригонометричні підстановки).

Приклад 1. Обчислити інтеграл. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

1-й спосіб: застосуємо підстановку $x=1/t$. Знайдемо межі інтегрування для змінної t . Маємо $t=1/x$, тоді при $x=1$ змінна t приймає значення, рівне 1 (нижня межа інтегрування). При $x=2$ змінна t дорівнює $1/2$ (верхня межа інтегрування). Таким чином, при зміні змінної x від 1 до 2 змінна t, монотонно спадаючи, змінюється від 1 до ½. Функція $x=1/\,t$ – монотонна й неперервно диференцційовна функція на відрізку $[1/2;1]$. Отже,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\left\|\begin{array}{l} x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2}, \\ x=1\Rightarrow t=1, \\ x=2\Rightarrow t=\frac{1}{2}. \end{array}\right\| = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{tdt}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$=\arcsin 1-\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\ .$$

2-й спосіб:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\int_1^2 \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\arcsin\frac{1}{x}\Big|_1^2 = -\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin 1 = -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

3-й спосіб:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\left\|\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sin t},\ dx=-\frac{\cos tdt}{\sin^2 t}; \\ \sqrt{x^2-1}=\frac{\cos t}{\sin t};\ x=1\Rightarrow \\ \sin t=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2};\ x=2\Rightarrow \\ \sin t=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}. \end{array}\right\| = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin t\cdot\frac{\sin t\cdot\cos tdt}{\sin^2 t\cdot\cos t} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dt = t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Заміна: $x=a\,sin\,t$. Визначимо межі інтегрування для змінної t. Нехай $x=0$, тобто беремо x рівним нижній межі інтегрування у вихідному інтегралі. Тоді в якості t можна взяти будь-який розв’язок рівняння $a\,sin\,t=0$, наприклад $t=0$. При знаходженні верхньої межі для змінної t замість x підставляємо верхню межу інтегрування, рівну a, і розв’язуємо рівняння $a = a\sin t$, звідки $\sin t = 1$, $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in z$, тобто рівняння має нескінченну множину розв'язків. При цьому, взявши розв'язок $t = \frac{\pi}{2}$, (при $n = 0$), ми одержимо, що при зміні t від 0 до $\frac{\pi}{2}$ змінна x буде монотонно змінюватися від 0 до a. Таким чином,

$$I = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t, \\ dx = a\cos t dt \\ x = 0,\ t = 0 \\ x = a,\ t = \pi/2 \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, a\cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1 - e^{2x}}\, dx$.

Функція $\sqrt{1-e^{2x}}$ — неперервна й монотонна на проміжку *[-ln2;0]*. Вважаючи $t = \sqrt{1-e^{2x}}$, знаходимо межі інтегрування для змінної *t*. При *x=0* одержимо: *t=0*; при *x=-ln2* знаходимо: $t = \sqrt{1-e^{-2\ln 2}} = \sqrt{1-e^{-\ln 4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Очевидно, обернена функція, рівна $x = \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{2}$ – неперервно диференційовна на проміжку $0 < t < \frac{\sqrt{3}}{2}$, тоді

$$I = \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}\, dx = \left\| \begin{array}{l} 1 - e^{2x} = t^2, -2e^{2x}dx = 2tdt, \\ dx = \frac{-tdt}{e^{2x}} = \frac{tdt}{t^2-1} \end{array} \right\| =$$

$$I = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{t^2 dt}{t^2-1} = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\left(t^2-1\right)+1}{t^2-1} dt = \left(t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}\right| =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\left(2-\sqrt{3}\right).$$

3. При обчисленні інтеграла $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$, застосовуючи підстановку $t = tg\frac{x}{2}$, знаходимо нижню межу інтегрування $t = tg 0 = 0$, верхня межа $t = tg\pi = 0$. Тоді

$$I = 2\int_0^0 \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int_0^0 \frac{dt}{t^2+3} = 0,$$

що неможливо, тому що підінтегральна функція $\frac{1}{2+cos\,x} > 0$. Пояснюється це тим, що функція $tg\frac{x}{2}$ в точці $x = \pi \in [0, 2\pi]$ терпить розрив й, отже, не має неперервної похідної. Підстановка $t = tg\frac{x}{2}$ незастосовна на проміжку $[0, 2\pi]$. Наведений інтеграл може бути обчислений у такий спосіб.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+cos\,x} = \left\| \begin{matrix} x-\pi = t \\ 0 \to -\pi \\ 2\pi \to \pi \end{matrix} \right\| = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2-cos\,t} = 2\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+2\,sin^2\frac{t}{2}} = \int_0^{\pi} \frac{dt}{sin^2\frac{t}{2}\left(\frac{1}{2\,sin^2\frac{t}{2}}+1\right)} =$$

$$= -2\int_0^{\pi} \frac{dctg\frac{t}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}ctg^2\frac{t}{2}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{ctg\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Відзначимо, *що на відміну від заміни змінної в невизначеному інтегралі, у визначеному інтегралі не потрібно виконувати обернену підстановку, тобто переходити у відповіді до старої змінної.*

При використанні формули заміни змінної в визначеному інтегралі необхідно перевіряти виконання умов:

1) Функція $x = \varphi(t)$ – неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha, \beta]$ або $[\beta, \alpha]$ ($\alpha \ge \beta$ або $\alpha \le \beta$) осі ot.
2) При зміні t від α до β значення функції $x = \varphi(t)$ не виходять за межі відрізка $[a, b]$.
3) $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$.

Приклад 4. При обчисленні інтеграла $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x}$ формальне застосування формули заміни змінної інтегрування приводить до наступного результату:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1+tg^2 x} \left\| \begin{matrix} t = tgx \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \pi \Rightarrow t = 0 \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{matrix} \right\| = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0.$$

З іншого боку, $\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\int\limits_0^{\pi}dx=x\Big|_0^{\pi}=\pi$

У цьому випадку перераховані умови застосовності формули заміни змінної порушуються, тому що функція $t = tgx$ в точці $x=\frac{\pi}{2}\in[0;\pi]$ терпить розрив й, отже, не має неперервної похідної. Підстановка $t=tgx$ незастосовна на проміжку $[0;\pi]$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^9-3x^7+4x^5-2x^3+x+2}{\cos^2 x}dx$

Розв'язання. Представимо інтеграл у вигляді суми двох інтегралів, тоді

$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^9-3x^7+4x^5-2x^3+x}{\cos^2 x}dx+2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Скористаємося властивістю (11) визначених інтегралів, тоді, оскільки функція $\frac{x^9-3x^7+4x^5-2x^3+x}{\cos^2 x}$ непарна, як частка непарної й парної функції, а проміжок інтегрування симетричний відносно початку координат, перший інтеграл дорівнює нулю. Тоді, в силу парності функції $\frac{1}{\cos^2 x}$,

$$I=2\cdot 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=4tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=4\left(tg\frac{\pi}{4}-tg0\right)=4.$$

Приклад 6. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}}$

Застосуємо підстановку $t=tgx$, тоді $x=arctgt$ – монотонна, неперервно диференційовна функція.

При $x=\frac{\pi}{4}$ одержимо $t=1$, при $x=\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ $t=\sqrt{3}$, тобто $1\le t\le\sqrt{3}$; $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

$$I=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{(1+t^2)\sqrt[4]{\frac{t^3}{(1+t^2)^4}}}=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t^{3/4}}=\int\limits_1^{\sqrt{3}}t^{-\frac{3}{4}}dt==4t^{\frac{1}{4}}\Big|_1^{\sqrt{3}}=4\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{4}}-1\right)=4\left(\sqrt[8]{3}-1\right)$$

Приклад 7. $I=\int\limits_1^{4,5}\frac{dx}{1+\sqrt[3]{2x-1}}$.

Скористаємося заміною: $\sqrt[3]{2x-1}=t$. Визначимо новий проміжок інтегрування. Якщо $x=1$, то $t=1$; якщо $x=4{,}5$, те $t=\sqrt[3]{8}=2$. Отже, *$2x-1=t^3$, $2dx=3t^2dt$, $dx=3/2t^2dt$.*

$$I=\frac{3}{2}\int\limits_1^2\frac{t^2dt}{1+t}=\frac{3}{2}\int\limits_1^2\frac{(t^2-1)}{1+t}dt=\frac{3}{2}\left(\int\limits_1^2(t-1)dt+\int\limits_1^2\frac{dt}{1+t}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{(t-1)^2}{2}+\ln(1+t)\right)\Bigg|_1^2=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\ln 3-\ln 2\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}\right).$$

Формула інтегрування по частинах: $\int\limits_a^b u\cdot dv=u\cdot v\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\cdot du$.

Приклади.

1. $I=\int\limits_1^2 x\log_2 xdx$.

Покладаємо $u=\log_2 x$, тоді $du=\frac{dx}{x\ln 2}$, $dv=xdx$, $v=\frac{x^2}{2}$.

Отже,

$$I=\log_2 x\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2-\frac{1}{2}\int\limits_1^2 x^2\cdot\frac{dx}{x\ln 2}=\log_2 2\cdot 2-\log_2 1\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2\ln 2}\int\limits_1^2 xdx=2-\frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2=$$
$$2-\frac{1}{2\ln 2}\cdot 2+\frac{1}{4\ln 2}=2-\frac{3}{4\ln 2}.$$

2. $I=\int\limits_0^3 x\cdot arctgxdx$.

Покладаємо $u=arctgx$, тоді $du=\frac{dx}{1+x^2}$, $dv=xdx$, $v=\frac{x^2}{2}$, тоді:

$$I=arctgx\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3-\frac{1}{2}\int\limits_0^3\frac{x^2dx}{1+x^2}=\frac{9}{2}arctg3-\frac{1}{2}\int\limits_0^3\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx=\frac{9}{2arctg3}-\frac{1}{2}(x-arctgx)\Bigg|_0^3$$
$$=\frac{9}{2}arctg3-\frac{1}{2}(3-arctg3)=5arctg3-\frac{3}{2}.$$

3. Обчислити інтеграл: $I_n=\int\limits_0^{\pi/2}sin^n xdx$.

Нехай $u=sin^{n-1}x$, тоді $du=(n-1)sin^{n-2}x\cos xdx$, $dv=sinx\,dx$, $v=-cosx$.

$$I_n=-cos\,x sin^n x\Big|_0^{\pi/2}+(n-1)\int\limits_0^{\pi/2}sin^{n-2}x\left(1-sin^2 x\right)dx=(n-1)\int\limits_0^{\pi/2}sin^{n-2}xdx-$$
$$-(n-1)I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n.$$

Отже, $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. Отримане рекурентне співвідношення дозволяє для будь-якого натурального n одержати значення інтеграла

$$I_{2k}=\frac{(2k-1)(2k-3)...3\cdot 1}{2k(2k-2)...2}I_0=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2},\text{ де } I_0=\int\limits_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

При $n=2k+1$ знаходимо

$$I_{2k+1}=\frac{2k(2k-2)...2}{(2k-1)(2k-3)...3\cdot 1}I_1=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},\text{ де } I_1=\int\limits_0^{\pi/2}sin\,xdx=1.$$

Крім того, $\int\limits_0^{\pi/2} cos^n xdx = \int\limits_0^{\pi/2} sin^n xdx$ (що очевидно з геометричних міркувань і можна перевірити заміною $t = \frac{\pi}{2} - x$).

Таким чином,

$$\int\limits_0^{\pi/2} cos^n xdx = \int\limits_0^{\pi/2} sin^n xdx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & \text{якщо } n - \text{парне} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{якщо } n - \text{непарне} \end{cases}.$$

Наприклад, $I_6 = \int\limits_0^{\pi/2} sin^6 xdx = \frac{5!!}{6!!}\frac{\pi}{2} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2}\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$.

7.3. Геометричні застосування визначених інтегралів

Обчислення площ, об'ємів, довжин дуг

Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою $y = f(x)$, прямими: $x = a$, $x = b$, $(a<b)$ $y = 0$ і $f(x) \ge 0$, то її площа

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx \tag{7.3.1}$$

Якщо $f_1(x) \le f_2(x)$, то площа, обмежена цими кривими й прямими $x = a$ й $x = b$ дорівнює $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$.

Об'єм тіла обертання, отриманого при обертанні криволінійної трапеції, обмеженою зверху кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ навколо осі OX, знаходиться за формулою.

$V_{ox} = \pi\int\limits_a^b y^2 dx$, при обертанні навколо осі OY: $V_{oy} = 2\pi\int\limits_a^b xydx$.

Об'єм тіла, отриманого при обертанні фігури, обмеженої лініями $y = y_2(x)$ й $y = y_1(x)$ $(y_1 \le y_2)$, дорівнює

$$V_{ox} = \pi\int\limits_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx, \quad V_{oy} = 2\pi\int\limits_a^b x(y_2 - y_1)dx.$$

Довжина дуги кривої у декартових координатах:

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx \quad (a<b).$$

Випадок параметричного завдання кривої.

Якщо крива задана параметричними рівняннями
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$,

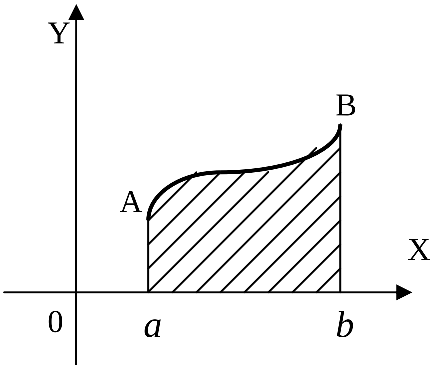


Рис. 7.3

причому точці A відповідає значення параметра $t=\alpha$, точці B – значення $t=\beta$.
Коли t змінюється від α до β, то точка описує криву AB (рис. 7.3).
При цьому $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$, де a й b – абсциси точок A і B. Виконуючи змінної в інтегралі (7.2.1), одержимо заміну $S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$ – площа у випадку параметричного задання кривої.

Довжина дуги AB, заданої параметричними рівняннями:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt \quad (\alpha < \beta).$$

Площа в полярних координатах.

Якщо крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$,
то площа криволінійного сектора AOB (рис. 7.4), обмеженого
дугою кривої і двома полярними радіусами OA й OB, відповідним значенням кута α і β $(\alpha < \beta)$, виразиться інтегралом $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi$.

Довжина дуги *AB* у полярних координатах:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

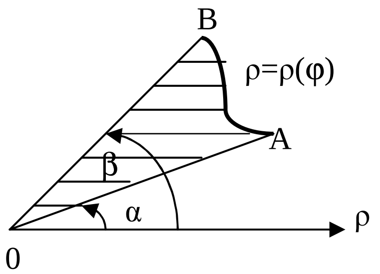


Рис. 7.4

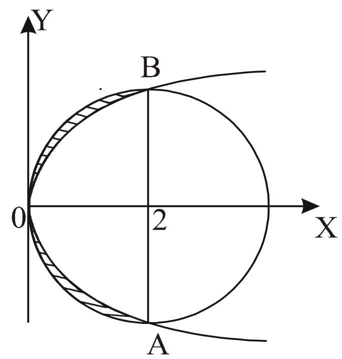


Рис. 7.5

Приклад 1. Знайти площі двох фігур, обмежених параболою $y^2 = 2x$ й колом $y^2 = 4x - x^2$ (Рис.7.5).

Розв'язання. Знайдемо центр і радіус кола, виділивши повний квадрат: $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $\quad (x-2)^2 + y^2 = 2^2$.

Отже, центр кола має координати *(2;0),* $R = 2$.

Знайдемо точки перетину кривих розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y^2 = 4x - x^2, \\ y^2 = 2x. \end{cases}$$

Тоді 0*(0;0), A(2;-2), B(2;2)* – точки перетину.

Площа заштрихованої частини дорівнює

$$S = 2\int_0^2 \left(\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x}\right) = 2\left(\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}\,dx - \sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{x}\,dx\right)$$

Перший інтеграл у правій частині рівності дорівнює $\frac{1}{4}$ площі круга, тобто π, виходить, $S = 2\left(\pi - \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\Big|_0^2\right) = 2\left(\pi - \frac{8}{3}\right)$.

Площа незаштрихованої частини дорівнює

$$S_1 = \pi R^2 - S = 4\pi - 2\left(\pi - \frac{8}{3}\right) = 2\left(\pi + \frac{8}{3}\right).$$

Приклад 2. Обчислити площу кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Тому що крива симетрична щодо полярної осі, обчислимо площу верхньої половини, при цьому кут φ змінюється від 0 до π (рис. 7.6).

Застосуємо формулу: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$.

Площа дорівнює

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^\pi a^2(1 + \cos\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^\pi (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Приклад 3. Знайти довжину астроїди: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

І спосіб $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\,dx$.

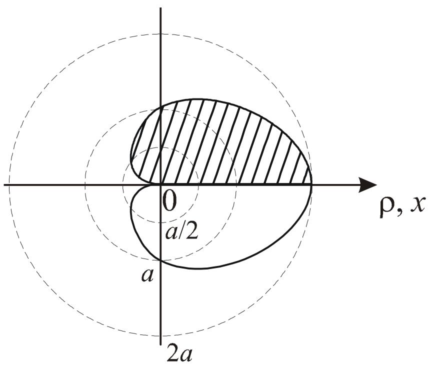


Рис. 7.6

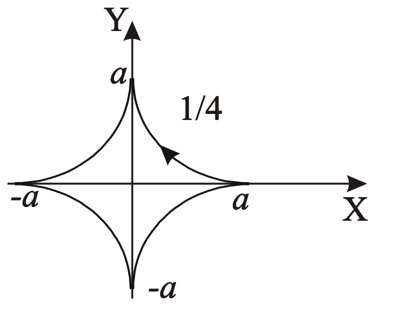


Рис. 7.7

Диференціюючи рівняння астроїди, одержимо $\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y'_x = 0 \Rightarrow y'_x = \frac{-y^{1/3}}{x^{1/3}}$

Крива симетрична щодо обох координатних осей, тому обчислюємо довжину дуги однієї чверті астроїди (рис. 7.7):

$$\frac{1}{4}l=\int_0^a\sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx=\int_0^a\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}dx=\frac{3a^{1/3}x^{2/3}}{2}\Big|_0^a=\frac{3a}{2}\Rightarrow l=6a\,.$$

II спосіб. Використаємо параметричні рівняння астроїди

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}\quad (0\le y\le 2\pi)$$

Для чверті довжини астроїди, параметр t змінюється від $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$.

Використаємо формулу

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt\,.$$

Знаходимо $x_t'^2+y_t'^2=\left(3a\cos^2 t\left(-\sin t\right)\right)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2=$

$$=9a^2(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)=9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)=9a^2\cos^2 t\sin^2 t$$

$$\frac{1}{4}l=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\,dt\;=\;3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,d(\sin t)=3a\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3a}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{2}-\sin^2 0\right)=$$

$$=\frac{3a}{2}\Rightarrow l=6a\,.$$

Приклад 4. Обчислити площу, обмежену віссю абсцис й однією аркою циклоїди

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$$

Використаємо формулу:

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt\,.$$

Знаходимо $x'(t)=a(1-\cos t)$, тоді

$$S=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=$$

$$a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$a^2\left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi-2\sin 2\pi+\frac{\sin 4\pi}{2}\right)=3\pi a^2\,.$$

Приклад 5. Обчислити об'єм кулі радіуса R з центром на початку координат.

Кулю одержимо обертанням навколо осі OX півкола $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

$$V_{ox}=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=2\pi\int_0^R(R^2-x^2)dx=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R=2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3(o\partial^3)$$

Контрольні завдання до розділу 7

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли.

7.1.1. $\int\limits_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^3}$ 7.1.2. $\int\limits_0^2 \frac{x^3}{x^2+4}dx$ 7.1.3. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{2\cos x+3\sin x}{(3\cos x-2\sin x)^3}dx$

7.1.4. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-2/x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 7.1.5. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{2arctgx+x}{1+x^2}dx$ 7.1.6. $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$

7.1.7. $\int\limits_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$ 7.1.8. $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$ 7.1.9. $\int\limits_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$

7.1.10. $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx$ 7.1.11. $\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{4+\ln(x-1)}{x-1}dx$ 7.1.12. $\int\limits_0^1 \frac{3arctgx+x}{x^2+1}dx$

7.1.13. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$ 7.1.14. $\int\limits_0^{1/2} \frac{8x+arctg2x}{4x^2+1}dx$ 7.1.15. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$

7.1.16. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-1/x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 7.1.17. $\int\limits_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2-2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 7.1.18. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

7.1.19. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$ 7.1.20. $\int\limits_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 7.1.21. $\int\limits_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx$

7.1.22. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{2x+arctg^3x}{1+x^2}dx$ 7.1.23. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$ 7.1.24. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x+x\cos x}{(x\sin x)^2}dx$

7.1.25. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$ 7.1.26. $\int\limits_{-1}^0 \frac{tg^2(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$ 7.1.27. $\int\limits_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$

7.1.28. $\int\limits_0^{1/2} \frac{x-arctg2x}{1+4x^2}dx$ 7.1.29. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^4}dx$ 7.1.30. $\int\limits_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$

Завдання 2. Обчислити визначені інтеграли.

7.2.1. $\int\limits_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$ 7.2.2. $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$ 7.2.3. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(16-x^2)^{3/2}}$

7.2.4. $\int\limits_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$ 7.2.5. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx$ 7.2.6. $\int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$

7.2.7. $\int\limits_0^{9/2} \frac{x^2}{\sqrt{81-x^2}}dx$ 7.2.8. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}$ 7.2.9. $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$

7.2.10. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$ 7.2.11. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$ 7.2.12. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{3/2}}$

7.2.13. $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$ 7.2.14. $\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$ 7.2.15. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{3/2}}$

7.2.16. $\int\limits_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\left(5-x^2\right)^{3/2}}$ 7.2.17. $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^4}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx$ 7.2.18. $\int\limits_0^1 \frac{x^4dx}{\left(2-x^2\right)^{3/2}}$

7.2.19. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}dx$ 7.2.20. $\int\limits_0^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2-x^2}dx$ 7.2.21. $\int\limits_0^7 x^2\sqrt{49-x^2}dx$

7.2.22. $\int\limits_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\left(64-x^2\right)^{3/2}}$ 7.2.23. $\int\limits_0^{4/\sqrt{2}} \frac{x^4dx}{\left(16-x^2\right)\sqrt{16-x^2}}$ 7.2.24. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

7.2.25. $\int\limits_0^2 \frac{x^4}{\sqrt{\left(8-x^2\right)^3}}dx$ 7.2.26. $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$ 7.2.27. $\int\limits_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$

7.2.28. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$ 7.2.29. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ 7.2.30. $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$

Завдання 3. Обчислити площі фігур, обмежених указаними лініями.

7.3.1. $x=\frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}, y=e^3, y=1, x=0$; 7.3.2. $y=\frac{1}{x^2}e^{1/x}, y=0, x=1, x=2$;

7.3.3. $y=x^2\sqrt{16-x^2}, (0\le x\le 4), y=0$; 7.3.4. $x=\sqrt{4-y^2}, x=0, y=0, y=1$;

7.3.5. $y=x^2\cos x, x=0, y=0, x=\pi/2$; 7.3.6. $x=4-(y-1)^2, x=y^2-4y+3$;

7.3.7. $y=x\sqrt{9-x^2}, (0\le x\le 3), y=0$; 7.3.8. $y=\sin x\cos^2 x, (0\le x\le \pi/2), y=0$;

7.3.9. $y=x^2\sqrt{4-x^2}, (0\le x\le 2), y=0$; 7.3.10. $y=\sqrt{e^x-1}, x=\ln 2, y=0$;

7.3.11. $y=\arccos x, x=0, y=0$; 7.3.12. $y=2x-x^2+3, y=x^2-4x+3$;

7.3.13. $x=\arccos y, x=0, y=0$; 7.3.14. $y=x^2\sqrt{8-x^2}, \left(0\le x\le 2\sqrt{2}\right), y=0$;

7.3.15. $y=x\sqrt{1-x^2}, (0\le x\le 1), y=0$; 7.3.16. $x=4-y^2, x=y^2-2y$;

7.3.17. $y=\frac{1}{1+\cos x}, x=-\pi/2, x=\pi/2, y=0$; 7.3.18. $y=4-x^2, y=x^2-2x$;

7.3.19. $y=\sin 2x\cos^3 x, (0\le x\le \pi/2), y=0$; 7.3.20. $y=(x-2)^3, y=4x-8$;

7.3.21. $y=\sqrt{4-x^2}, (0\le x\le 1), y=0$; 7.3.22. $y=(x+1)^2, y^2=x+1$;

7.3.23. $y=\sin x\cos^2 x, (0\le x\le \pi/2), y=0$; 7.3.24. $x=\sqrt{e^y-1}, x=0, y=\ln 2$;

7.3.25. $y=2x-x^2+3, y=x^2-4x+3$; 7.3.26. $y=\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}, x=1, y=0$;

7.3.27. $y=x\sqrt{49-x^2}, (0\le x\le 7), y=0$; 7.3.28. $y=x\,arctg\,x, x=\sqrt{3}, y=0$;

7.3.29. $x=(y-2)^3, x=4y-8$; 7.3.30. $y=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}, x=1, y=0$;

Завдання 4. Обчислити довжини дуг кривих, заданих рівняннями в прямокутних координатах.

7.4.1. $y=ln\dfrac{5}{2x}, \quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$ 7.4.2. $y=e^x+6, \quad ln\sqrt{8}\le x\le ln\sqrt{15}$

7.4.3. $y=1-ln\cos x, \quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$ 7.4.4. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x, \quad 0\le x\le\dfrac{7}{9}$

7.4.5. $y=ln(x^2-1), \quad 2\le x\le 3$ 7.4.6. $y=-ln\cos x, \quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$

7.4.7. $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}, \quad 0\le x\le\dfrac{15}{16}$ 7.4.8. $y=2+ch x, \quad 0\le x\le 1$

7.4.9. $y=ln(1-x^2), \quad 0\le x\le\dfrac{1}{4}$ 7.4.10. $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}, \quad \dfrac{1}{4}\le x\le 1$

7.4.11. $y=1-ln(x^2-1), \quad 3\le x\le 4$ 7.4.12. $y=(1-e^x-e^{-x})/2, \quad 0\le x\le 3$

7.4.13. $y=4+\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}, \quad 0\le x\le\dfrac{1}{2}$ 7.4.14. $y=e^x+e, \quad ln\sqrt{3}\le x\le ln\sqrt{15}$

7.4.15. $y=ln\dfrac{7}{4}-ln x, \quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$ 7.4.16. $y=2+ln\cos x, \quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$

7.4.17. $y=(e^{2x}+e^{-2x}+3)/4, \quad 0\le x\le 2$ 7.4.18. $y=3+ch x, \quad 0\le x\le 1$

7.4.19. $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}, \quad 0\le x\le\dfrac{3}{4}$ 7.4.20. $y=e^x+7, \quad ln\sqrt{8}\le x\le ln\sqrt{24}$

7.4.21. $y=ln\sin x, \quad \dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 7.4.22. $y=-\arccos x+\sqrt{1-x^2}+2, \quad 0\le x\le\dfrac{9}{16}$

7.4.23. $y=-\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+5, \quad \dfrac{1}{9}\le x\le 1$ 7.4.24. $y=1-ln\sin x, \dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$

7.4.25. $y=e^x-2, \quad ln\sqrt{3}\le x\le ln\sqrt{8}$ 7.4.26. $y=ln x, \quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$

7.4.27. $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{ln x}{2}, \quad 1\le x\le 2$ 7.4.28. $y=6-e^x, ln\sqrt{8}\le x\le ln\sqrt{15}$

7.4.29. $y=3+\left(e^{x}+e^{-x}\right)/2,\quad 0\le x\le 2$ 7.4.30. $y=1-\ln\cos x,\quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{6}$

РОЗДІЛ 8
НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

При розгляді визначених інтегралів передбачалося, що проміжок інтегрування скінченний і підінтегральна функція обмежена на цьому проміжку. Якщо ж ці умови не виконуються, то говорять про невласні інтеграли, які є узагальненням визначеного інтеграла для цих випадків.

8.1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (I роду) і їх обчислення

8.1.1. Основні поняття

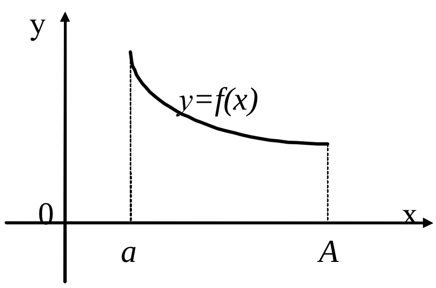
Нехай функція f(x) визначена на нескінченному проміжку $\left[a,+\infty\right)$ й інтегровна в будь-якій скінченній його частині $[a,A]$ $(A\ge a)$, тоді, якщо існує $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx$, то цю межу називають *невласним інтегралом I роду* або інтегралом по нескінченному проміжку $\left[a,+\infty\right)$ від функції $f(x)$ й позначають $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Таким чином, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx$.

У тому випадку, якщо межа існує й скінченна, невласний інтеграл *збігається*. Якщо ж межа нескінченна або взагалі не існує, то невласний інтеграл не існує або *розбігається*.

Аналогічно вводиться поняття інтеграла по нескінченному проміжку $(-\infty,a]$, тобто $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx=\lim\limits_{B\to-\infty}\int\limits_B^a f(x)\,dx$.

Невласний інтеграл з обома нескінченними межами визначається рівністю $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx+\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, де a – будь-яке число. При цьому передбачається існування обох інтегралів, що стоять праворуч.

8.1.2. Геометричний зміст невласного інтеграла



Якщо $f(x)\ge 0$ й неперервна $\forall x\in[a,A]$, то визначений інтеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ геометрично є площа криволінійної трапеції, обмеженої віссю OX, кривою $y=f(x)$ і прямими $x=a$, $x=A$.

Рис. 8.1

При зростанні $A(A\to+\infty)$ пряма $x=A$ переміщається вправо. Якщо невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то його величину приймають за площу нескінченної криволінійної трапеції (рис. 8.1).

Приклад 1.

$$\int_0^{+\infty}\cos x dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \cos x dx=\lim_{A\to+\infty}\sin x\left(\begin{matrix}A\\0\end{matrix}\right.=\lim_{A\to+\infty}(\sin A-\sin 0)=\lim_{A\to+\infty}\sin A.$$

Інтеграл розбігається, тому що $\lim\limits_{A\to+\infty}\sin A$ не існує.

Приклад 2.

Розглянемо $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ $(a>0)$. Дослідимо, при яких значеннях p інтеграл збігається.

а) $p=1$. За означенням знаходимо

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{dx}{x}=\lim_{A\to+\infty}\ln x\left(\begin{matrix}A\\a\end{matrix}\right.=\lim_{A\to+\infty}(\ln A-\ln a)=+\infty,$$ інтеграл розбігається.

б) $p<1$

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A x^{-p}dx=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}x^{1-p}\left(\begin{matrix}A\\a\end{matrix}\right)=\frac{1}{1-p}\lim_{A\to+\infty}\left(A^{1-p}-a^{1-p}\right)=+\infty,\right.$$

інтеграл розбігається.

в) $p>1$

При $p>1$ $\lim\limits_{A\to+\infty}A^{1-p}=0$ і тоді $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{a^{1-p}}{p-1}$, тобто збігається.

Отже, невласний інтеграл $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{a^{1-p}}{p-1}, p>1, & \text{\textit{збігається,}}\\ +\infty, p\le 1, & \text{\textit{розбігається.}}\end{cases}$

Геометрично це означає, що при $p>1$ функція $\frac{1}{x^p}$ наближається до нуля при $x\to\infty$ настільки швидко, що площа нескінченної криволінійної трапеції виявляється скінченною.

Приклад 3.

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x}dx=-\lim_{A\to+\infty}e^{-x}\left(\begin{matrix}A\\0\end{matrix}\right.=-\lim_{A\to+\infty}\left(e^{-A}-e^0\right)=1,$$ збігається.

8.1.3. Узагальнення формули Ньютона-Лейбніца

Нехай $f(x)$ неперервна на $[a,\infty)$ функція, а $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тоді

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} F(x)\Big|_a^A = \lim_{A\to+\infty}\big(F(A)-F(a)\big) = F(\infty)-F(a) = F(x)\Big|_a^{\infty},$$

тут $F(\infty)=\lim\limits_{A\to\infty}F(A)$; користуємося для стислості умовним записом, опускаючи межу, тоді $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{\infty} = F(\infty)-F(a)$.

Приклад 4. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_1^{\infty} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

Для невласних інтегралів справедлива формула *заміни змінної*. Часто в результаті заміни змінної невласний інтеграл зводиться до визначеного.

Приклад 5.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}\left\|\begin{matrix} x=tgz \\ dx=\dfrac{dz}{\cos^2 z}\end{matrix}\right\| = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^4 z}{\cos^2 z}dz = \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2z}{2}dz = \left(\frac{1}{2}z+\frac{\sin 2z}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 6. $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{arctgxdx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$.

Покладаючи $t=arctgx$, знаходимо $\frac{dx}{1+x^2}=dt$, $x=tgt$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\cos t$. Межі інтегрування для змінної t: при $x=0$ маємо $t=0$; при $x\to\infty, t\to\frac{\pi}{2}$. Одержимо

$$I=\int_0^{\pi/2} t\cos t dt = \left\|\begin{matrix} u=t & dv=\cos tdt \\ du=dt & v=\sin t\end{matrix}\right\| = \left(t\sin t+\cos t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}-1.$$

Збіжні невласні інтеграли мають всі основні властивості визначених інтегралів.

При розгляді невласного інтеграла, насамперед, необхідно встановити, чи буде він збіжним. Питання про збіжність може бути вирішено або безпосереднім обчисленням невласного інтеграла, або за допомогою спеціальних ознак збіжності.

Приклад 7. Дослідити збіжність інтеграла

$$\int_e^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}} = \lim_{A\to\infty}\int_e^A\frac{d\ln x}{(\ln x)^{3/2}} = \lim_{A\to\infty}\frac{(\ln x)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\Bigg|_e^A = -2\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\ln A}}-\frac{1}{\sqrt{\ln e}}\right)=2.$$

Виходить, інтеграл збігається.

У багатьох задачах, пов'язаних з невласними інтегралами, досить тільки з'ясувати питання про збіжність інтегралів і не потрібно знаходити його значення. У цьому випадку, як правило, використовуються наступні ознаки збіжності.

8.1.4. Ознаки збіжності невласних інтегралів першого роду для невід’ємних функцій

Зауваження. Збіжність невласного інтеграла першого роду залежить від поведінки функції на нескінченності, тобто. якщо $b>a$, те невласні інтеграли $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ й $\int_{b}^{+\infty} f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Теорема 1. *(ознака порівняння). Нехай при досить великих* x *виконується нерівність* $0 \le f(x) \le g(x)$. *Тоді зі збіжності інтеграла* $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ *випливає збіжність інтеграла* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, *а з розбіжності інтеграла* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *випливає розбіжність інтеграла* $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$.

Приклад 8. У теорії імовірностей важливу роль грає інтеграл Пуассона $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Невизначений інтеграл не береться в елементарних функціях. Порівняємо цей інтеграл зі збіжним інтегралом $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$ (приклад 3). При $x \ge 1$ маємо $x^2 \ge x$, тоді $e^{-x^2} \le e^{-x}$. Виходить, $\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}dx \le \int_{1}^{+\infty} e^{-x}dx$. Зі збіжності інтеграла $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Теорема 2. (*гранична форма ознаки порівняння). Якщо існує* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \ (0 < \lambda < +\infty)$, *то інтеграли* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *й* $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ *збігаються або розбігаються одночасно*.

Приклад 9. Дослідити на збіжність $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ при $x \to \infty$ є нескінченно малою величиною порядку $\frac{1}{x^2}$. Виберемо $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Оскільки інтеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ $(p = 2 > 1)$ збігається, то за ознакою порівняння в граничній формі маємо $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$.

Виходить, інтеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ збігається.

8.1.5. Невласні інтеграли від знакозмінних функцій

Теорема *(достатня ознака збіжності). Нехай функція* $f(x)$ *визначена*

$\forall x \ge a$. *Тоді, якщо* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *збігається, то збігається й інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *називається абсолютно збіжним, якщо збігається* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$. *Невласний інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *називається умовно збіжним, якщо він збігається, а інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається.

Приклад 10. Покажемо, що інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ збігається абсолютно. Дійсно, оскільки $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$, а інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ $(p = 2 > 1)$ збігається, то в силу ознаки порівняння вихідний інтеграл абсолютно збігається.

Приклад 11. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$. Ознаку порівняння застосувати безпосередньо не можна. Для доказу збіжності інтеграла застосуємо метод інтегрування частинами.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \left| \begin{matrix} u = \frac{1}{x};\, du = -\frac{dx}{x^2} \\ dv = \sin x dx;\, v = -\cos x \end{matrix} \right| = -\frac{1}{x}\cos x\Big|_1^{+\infty} - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx = \cos 1 - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Застосовуючи тепер ознаку порівняння, одержимо $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx \le \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ $(p = 2)$. Інтеграл збігається.

Отже, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ збігається. Покажемо тепер, що інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ розбігається, тобто вихідний інтеграл збігається умовно. Дійсно, число $|\alpha| < 1$ більше свого квадрата, тобто $|\alpha| > \alpha^2$, тоді $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \ge \frac{\sin^2 x}{x}$.

За ознакою порівняння досить довести розбіжність інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$; $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx$. Збіжність інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx$ доводиться інтегруванням частинами, а інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ $(p = 1)$ розбігається. Тому інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ також розбігається.

Приклад 12. Дослідити збіжність інтеграла $I = \int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x}$.

Невласний інтеграл I роду

$$\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln\ln x}=\int_{e^2}^{\infty}\frac{d\ln x}{\ln\ln x}=\left|\begin{array}{l}\ln x=t\\ x=e^2,\ t=\ln e^2=2\\ x\to\infty,\ t\to\infty\end{array}\right|=\int_{2}^{\infty}\frac{dt}{\ln t}$$

Оскільки $\ln t<t$ при $t\geq 2$, звідси слідує нерівність $\frac{1}{\ln t}>\frac{1}{t}$. Досліджуваний інтеграл розбігається за ознакою порівняння, тому що $\int_{2}^{\infty}\frac{dt}{t}$ розбігається.

Приклад 13. Дослідити збіжність інтеграла

$$J=\int_{0}^{+\infty}\frac{arctg\ x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx.$$

Підінтегральна функція є нескінченно малою величиною порядку $p=3$ відносно $\frac{1}{x}$: $\frac{arctg\ x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}\underset{x\to\infty}{=}0^*\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Інтеграл $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^3}$ $(p=3>1)$ збігається, звідси випливає збіжність досліджуваного інтеграла.

8.2. Невласні інтеграли другого роду - інтеграли від необмежених функцій

8.2.1. Основні поняття

Нехай функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $[a,b)$, інтегровна на відрізку $[a,b-\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$ й $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=\infty$. Точка b називається при цьому особливою точкою функції $f(x)$. Тоді, якщо існує $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx$, то його називають *невласним інтегралом другого роду*, позначають $\int_{a}^{b}f(x)dx$ і говорять, що інтеграл *збігається*

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx.$$

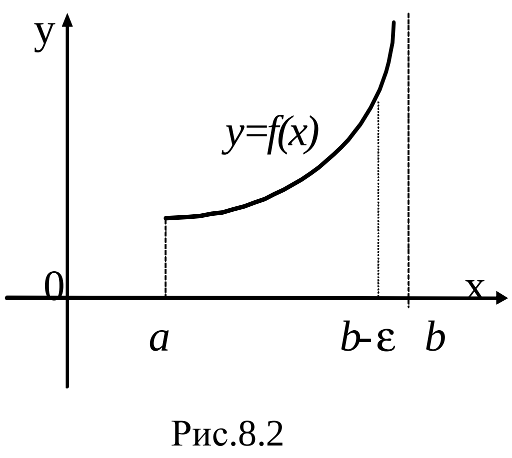


Рис.8.2

Якщо ж границя дорівнює нескінченності або взагалі не існує, то інтеграл розбігається.

Якщо особливою точкою функції $f(x)$ є точка $x=a$, то

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{a+\varepsilon_1}^{b}f(x)dx.$$

Якщо $C\in(a,b)$ є особливою точкою функції *f(x)*, то за властивістю адитивності $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^C f(x)\,dx+\int_C^b f(x)\,dx$ й

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx.$$

Якщо хоча б один з інтегралів $\int_a^C f(x)dx$ або $\int_C^b f(x)dx$ розбігається, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ також розбігається.

Приклад 1.

Дослідити збіжність невласного інтеграла $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$.

Підінтегральна функція в точці $x=a$ має нескінченний розрив.

а) $\alpha\neq 1$. За означенням невласного інтеграла маємо:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-\alpha}(x-a)^{1-\alpha}\Big|_{a+\varepsilon}^{b}=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(b-a)^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}\right]=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}, & \alpha<1 \ \to \text{ збігається}\\ +\infty, & \alpha>1 \ \to \text{розбігається}\end{cases}$$

б) $\alpha=1$. $\int_a^b \frac{dx}{x-a}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln(b-a)-\ln\varepsilon\right]=+\infty$, тобто інтеграл розбігається.

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}-\begin{cases}\text{\textit{збігається, при }}\alpha<1\\ \text{\textit{розбігається, при }}\alpha\geq 1\end{cases}.$$

Зокрема, $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha<1$ збігається; при $\alpha\geq 1$ розбігається.

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл другого роду

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0\right)=\frac{\pi}{2}$$

(інтеграл збігається).

8.2.2. Ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду для невід'ємних функцій

Теорема 1. (ознака порівняння). *Якщо функції* $f(x)$ *й* $g(x)$ *неперервні* $\forall x\in[a,b]$, *за винятком скінченного числа точок, причому* $0\leq f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in[a,b]$, *то а) якщо* $\int_a^b g(x)dx$ *збігається, то й* $\int_a^b f(x)dx$

збігається, б) якщо $\int\limits_a^b f(x)dx$ *розбігається, то й* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *розбігається.*

Приклад. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}dx$.

Тут $0 \le \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$. Оскільки інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$ збігається, то й даний інтеграл за ознакою порівняння збігається.

Теорема 2. (*гранична форма ознаки порівняння*). *Якщо функції* $f(x)$ *й* $g(x)$ *невід'ємні, неперервні* $\forall x \in [a,b)$ *й терплять нескінченний розрив у точці* $x=b$; $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda(0<\lambda<\infty)$, *то невласні* інтеграли від обох функцій сходяться або розходяться одночасно.

8.3. Приклади

1. Розглянемо $J = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$; особлива точка $x=1$. Інтеграл розбігається, тому що

$$J = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln(\ln x)\Big|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln(\ln 2) - \ln(\ln(1+\varepsilon))\right) = +\infty.$$

2. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$.

Підінтегральна функція має особливу точку $x=1$. Зрівняємо зі збіжним інтегралом $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ $\left(\alpha = \frac{1}{3} < 1\right)$, тоді:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{\frac{e^x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}} = \lim_{x\to 1-0} \frac{e^x\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x+x^2}} = \frac{e}{\sqrt[3]{3}}.$$

Звідси випливає збіжність розглянутого інтеграла.

3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-\sin x}$. Особлива точка $x=0$. Знаменник підінтегральної функції $\sqrt{x}-\sin x \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$, тому виберемо $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$, Одержимо $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sin x}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sin x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$. Значить, досліджуваний інтеграл збігається.

Невласні інтеграли другого роду від знакозмінних функцій досліджуються аналогічно невласним інтегралам першого роду.

4. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_0^1\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Розглянемо $\int\limits_0^1\left|\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\right|dx$. Тут $\left|\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\right|\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\alpha=\dfrac{1}{3}<1$, звідси випливає абсолютна збіжність невласного інтеграла.

5. Дослідити збіжність інтеграла $I=\int\limits_0^1\dfrac{\ln x}{1-x^2}dx$.

Маємо $\ln x<0$ при $0<x<1$, тому представимо вихідний інтеграл у вигляді $I=-\int\limits_0^1\dfrac{-\ln x}{1-x^2}dx$. Особливі точки підінтегральної функції: $x=0$ і $x=1$ належать проміжку $[0;1]$. Знайдемо $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{\ln x}{1-x^2}\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-2x}=-\dfrac{1}{2}$.

Виходить, підінтегральна функція обмежена в околі точки $x=1$.

Обчислимо при $0<\alpha<1$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{-\ln x}{1-x^2}}{\dfrac{1}{x^\alpha}}=-\lim_{x\to+0}\frac{1}{1-x^2}\cdot\lim_{x\to+0}\ln x\cdot x^\alpha\left|\infty\cdot0\right|=-\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha\,x^{-\alpha-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{x^\alpha}{\alpha}=0.$$

Підінтегральна функція в околі точки $x=0$ має порядок росту нижчий, ніж нескінченно велика в цьому околі функція $\dfrac{1}{x^\alpha}$ ($0<\alpha<1$), виходить, досліджуваний інтеграл збігається.

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

$I=\int\limits_0^1\dfrac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$, $x=1$ - особлива точка, підінтегральна функція

$$\frac{1}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+2}\right)\underset{x\to 1}{=}0^*\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\Rightarrow$$

інтеграл збігається, тому що $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ при $\alpha=\frac{1}{2}<1$ збігається.

Заміна $x=\sin t$, тоді $dx=\cos t dt$.

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos t dt}{\cos^2 t+2\cos t}=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dt}{\cos t+2}\left|\begin{matrix} z=tg\frac{t}{2} & \cos t=\frac{1-z^2}{1+z^2}\\ dt=\frac{2dz}{1+z^2} & \end{matrix}\right|=2\int\limits_0^1\frac{dz}{\left(1+z^2\right)\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}+2\right)}=$$

$$=2\int\limits_0^1\frac{dz}{z^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{z}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

7. Дослідити збіжність інтеграла $I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx=\left|\begin{matrix} u=\ln\sin x & dv=\frac{dx}{\sqrt{x}}\\ du=\frac{\cos x dx}{\sin x} & v=2\sqrt{x}\end{matrix}\right|=2\sqrt{x}\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2}-2\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{x}\frac{\cos x}{\sin x}dx=$$

$$=-2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{x}\cos x}{\sin x}dx$$

Тут $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln\sin x=0$, а $\frac{\sqrt{x}\cos x}{\sin x}\underset{x\to 0}{=}0^*\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Виходить, інтеграл збігається.

8. Обчислити площу фігури між лінією $y=\frac{a}{a^2+x^2}$ і її асимптотою.

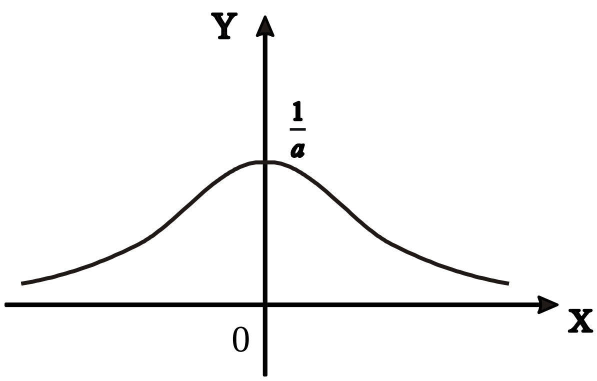


Рис. 8.3

Асимптота має рівняння $y=kx+b$, де $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{(a^2+x^2)x}=0$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{a^2+x^2}=0$,

тобто *y=0* – горизонтальна асимптота.
Розв’язання.
У силу симетрії (Рис.8.3) площа половини фігури дорівнює

$$\frac{S}{2}=\int_0^{\infty}\frac{adx}{a^2+x^2}=\lim_{x\to+\infty}a\int_0^{A}\frac{dx}{a^2+x^2}=\lim_{A\to+\infty}arctg\frac{x}{a}\Big|_0^A=$$

$$\cdot\lim_{A\to+\infty}(arctg\frac{A}{a}-arctg0)=(\frac{\pi}{2}-0)=\frac{\pi}{2}\text{, де }\lim_{A\to+\infty}arctg\frac{A}{a}=\frac{\pi}{2}\,(a>0);\Rightarrow S=\pi.$$

Контрольні завдання до розділу 8

Завдання 1. Дослідити збіжність невласних інтегралів 1-го роду і обчислити, якщо збігаються:

8.1.1 $\int_2^{\infty}\frac{xdx}{x^2-1}$ 8.1.2. $\int_1^{\infty}\frac{x^2dx}{1+x^6}$; 8.1.3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+2}$;

8.1.4. $\int_{-\infty}^{+\infty}xe^xdx$; 8.1.5. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x+x^3}$ 8.1.6. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

8.1.7. $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{xdx}{x^4+9}$; 8.1.8. $\int_{-\infty}^{-3}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$; 8.1.9. $\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$;

8.1.10. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; 8.1.11. $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x)^3}$; 8.1.12. $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

8.1.13. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; 8.1.14. $\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx$; 8.1.15. $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$;

8.1.16. $\int_0^{+\infty}x\sin xdx$; 8.1.17. $\int_2^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$ 8.1.18. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^4}$;

8.1.19. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$; 8.1.20. $\int_1^{+\infty}\frac{arctgx}{x^2}dx$; 8.1.21. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$;

8.1.22. $\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$; 8.1.23. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; 8.1.24. $\int_1^{\infty}x\ln xdx$;

8.1.25 $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}$; 8.1.26. $\int_0^{\infty}x^3e^{-x^2}dx$; 8.1.27. $\int_0^{\infty}xe^{-3x}dx$;

8.1.28. $\int_2^{\infty}\frac{dx}{3+2x}$; 8.1.29. $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$; 8.1.30. $\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x^4}$;

Завдання 2. Дослідити на збіжність невласні інтеграли 2-го роду і обчислити, якщо збігаються.

8.2.1. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; 8.2.2. $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. 8.2.3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx$;

8.2.4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx$; 8.2.5. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; 8.2.6. $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

8.2.7. $\int_0^1 \ln x dx$; 8.2.8. $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{(1-x)}}$; 8.2.9. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

8.2.10. $\int_3^6 \frac{dx}{x^2-7x+10}$; 8.2.11. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-1}$; 8.2.12. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

8.2.13. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 8.2.14. $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln x}$; 8.2.15. $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$;

8.2.16. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$; 8.2.17. $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; 8.2.18. $\int_{-1}^1 \frac{x+2}{\sqrt[5]{x^3}} dx$;

8.2.19. $\int_{-1}^1 \frac{x+2}{\sqrt[5]{x^3}} dx$; 8.2.20. $\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; 8.2.21. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

8.2.22. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ctgx\, dx$; 8.2.23. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$; 8.2.24. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x-2}$;

8.2.25. $\int_0^1 \frac{3x^2+1}{\sqrt[3]{x}} dx$; 8.2.26. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-x}$; 8.2.27. $\int_0^1 \ln x\, xdx$;

8.2.28. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$; 8.2.29. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$; 8.2.30. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^3}}$.

РОЗДІЛ 9
ФУНКЦІЯ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

9.1. Основні поняття

Означення 1. *Змінна z називається функцією двох незалежних змінних x і y, визначеною на множині D, якщо кожній парі (x, y) їхніх значень із D за певним законом ставиться у відповідність одне або кілька значень змінної z: позначають z = f(x, y).*

Означення 2. *Множина пар чисел (x, y), для яких функція z визначена, називається областю визначення функції.*

Множина значень z називається областю зміни функції.

Приклад 1.

Знайти область визначення функції $z = ln(y^2 - 4x + 8)$.

Розв’язання.

Областю визначення даної функції є множина точок площини, що задовольняють умові

$y^2 - 4x + 8 > 0$ або $y^2 > 4(x - 2)$.

Парабола розбиває площину на дві частини, для однієї з яких виконується дана нерівність.

Областю визначення є зовнішня стосовно параболи частина площини, що не включає саму параболу (Рис.9.1).

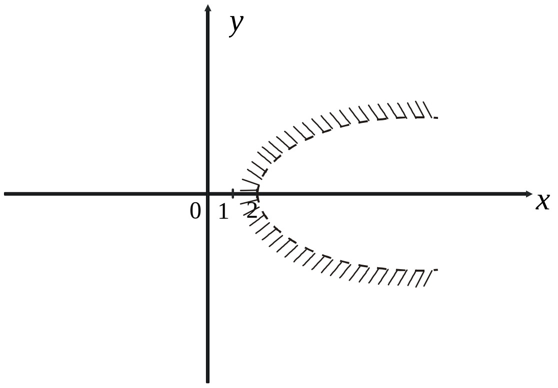


Рис. 9.1

Приклад 2. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$

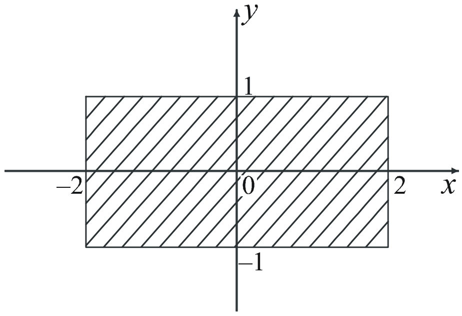


Рис. 9.2

Розв'язання.

Маємо

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 1-y^2 \geq 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$$

Область визначення — прямокутник, обмежений прямими $x = \pm 2$, $y = \pm 1$ (Рис.9.2).

Функція двох змінних $z = f(x, y)$ може бути визначена або на всій площині XOY, або на деякій множині D площини.

Для характеристики таких множин введемо кілька понять.

ε - околом точки $M_0(x_0, y_0)$ називається множина точок $M(x, y)$, що задовольняють умові $|MM_0| < \varepsilon$, тобто множина точок круга радіуса $\varepsilon > 0$ із центром у точці M_0 без обмежуючого його кола.

Точка $M_1 \in D$ називається *внутрішньою* точкою множини D, якщо існує ε-окіл цієї точки, що належить даній множині.

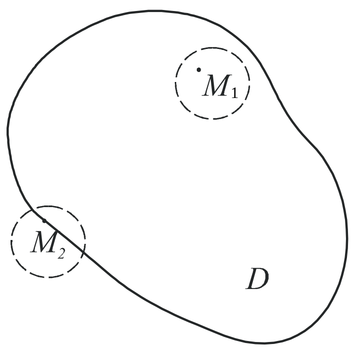


Рис. 9.3

Точку M_2, що належить або не належить множині D, будемо називати *граничною* точкою множини D, якщо будь-який її ε-окіл містить як точки належні D, так і не належні D. Множина всіх граничних точок називається границею множини D. Множина, що містить всі свої граничні точки, називається замкнутою, інакше відкритою або незамкнутою. Якщо до відкритої множини приєднати її границю, то одержимо замкнуту множину.

Множина називається зв'язною (*однозв'язною*), якщо будь-які дві її точки можна з'єднати лінією, що складається із точок множини.

Множина, обмежена декількома замкнутими лініями, називається *багатозв'язною*.

Під областю розуміють (відкриту або замкнуту) однозв'язну або багатозв'язну множину.

Область називається *обмеженою,* якщо вона лежить усередині деякого кола із центром на початку координат.

Область називається правильною, якщо будь-яка пряма, паралельна осям координат, перетинає її границю не більш ніж у двох точках.

Поняття границі функції

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена у деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, крім, може, самої точки M_0.

Означення. Число A називається границею функції $z = f(x, y)$ при наближенні точки $M(x, y)$ до точки $M_0(x_0, y_0)$, якщо $\forall \varepsilon < 0\ \exists \delta > 0$, що для всіх точок $M(x, y)$, крім, може, точки M_0, для яких виконується нерівність $\rho\ (M_0, M) < \delta$, має місце нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$,

де $\rho(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Записують $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$

Із самого означення випливає, що границя не залежить від способу наближення точки M до точки M_0.

Приклади

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(x^2 + y^2\right) = 0$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} |y = kx| = \lim\limits_{x \to 0} \frac{kx}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}$

Надаючи k різні значення, тобто при наближенні точки до початку координат вздовж різних прямих, одержимо різні границі. Це означає, що дана границя не існує.

Неперервність. Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, включаючи саму точку M_0.

Означення 1. *Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Означення 2. *Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, що для всіх точок $M(x, y)$, що задовольняють умові $\rho\ (M_0, M) < \delta$, має місце нерівність $|f(x, y) - f(x_0, y_0)\ | < \varepsilon$.*

Повний приріст функції $z = f(x, y)$ у т. M_0 дорівнює $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, де Δx й Δy — прирости аргументів.

Покладемо $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, одержимо $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$ або $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \right] = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$

Означення 3. *Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо нескінченно малим приростам аргументів x і y відповідає нескінченно малий приріст z, тобто* $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$

9.2. Частинні похідні

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякій області D.

Нехай т. $M_0(x_0, y_0) \in D$; дамо приріст Δx, залишаючи y постійним. Тоді функція $z = f(x, y)$ одержить приріст

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, $(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$, що називається частинним приростом функції по x.

Означення. *Границя відношення при Δx>0*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x},$$

якщо вона існує й скінченна, називається частинною похідною функції z = f(x, y) по змінній x.

Частинні похідні по x позначають одним із символів

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ z_x,\ \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x},\quad f_x'\left(x,y\right).$$

Аналогічно визначається частинна похідна по y:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta y}.$$

Частинна похідна є звичайною похідною, обчисленою в припущенні, що змінюється лише змінна, по якій виконується диференціювання, інші аргументи вважаються постійними.

Приклад 1.

$$z=x^{\lg y};\ \frac{\partial z}{\partial x}=\lg y\cdot x^{\lg y-1};\frac{\partial z}{\partial y}=x^{\lg y}\ \frac{\ln x}{y\ln 10}.$$

Приклад 2.

$$z=x^4+3xy^2+6y;\ \frac{\partial z}{\partial x}=4x^3+3y^2;\frac{\partial z}{\partial y}=6xy+6.$$

9.3. Диференційованість функції

Означення. *Функція z = f(x, y) називається диференційованою у точці (x, y), якщо її повний приріст у цій точці можна представити у вигляді*

$\Delta z = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$, де $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha_1=0,\ \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha_2=0.$

Теорема. *Якщо функція z = f(x, y) диференційована в точці (x, y), то вона має в цій точці похідні* $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, при цьому

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\left(x,y\right)\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\left(x,y\right)\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y.$$

9.3.1. Диференціал

Повним диференціалом функції z = f(x, y) називається головна частина приросту функції $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$, де $d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x,\ d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ — частинні диференціали відповідно за змінними x і y.

Нехай $z = x$, тоді $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial x}=1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial x}{\partial y}=0.$ Звідси одержуємо $dx = \Delta x$; аналогічно $dy = \Delta y$.

Повний диференціал можна записати у вигляді $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial y}{\partial y}dy.$

Приклади.

1). Знайти повний диференціал функції

$z=x^y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1};\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x;\quad dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy.$$

2) Знайти повний диференціал функції $z=\operatorname{arctg}^3\frac{x}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3\operatorname{arctg}^2\frac{x}{y}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y};\ \frac{\partial z}{\partial y}=3\operatorname{arctg}^2\frac{x}{y}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right);$$

$$dz=3\operatorname{arctg}^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\left(ydx-xdy\right).$$

9.3.2. Застосування повного диференціала в наближених обчисленнях

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці (x, y), то її повний приріст у цій точці можна представити у вигляді $\Delta z = dz + \alpha\Delta\rho$, де $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\alpha=0,\ \Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Звідси випливає, що $\Delta z \approx dz$ або $f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)\approx f\left(x_0,y_0\right)+\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y}\Delta y.$

При досить малих Δx й Δy похибка може бути зроблена як завгодно малою.

Приклад.

Обчислимо наближено $\sqrt{(4,05)^2+(2,93)^2}$.

Розглянемо функцію $f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2}$, покладемо $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, тоді $\Delta x = 0.05$; $\Delta y = -0.07$ й $f\left(4;3\right)=\sqrt{16+9}=5.$

Знайдемо частинні похідні:

$$f'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_x\left(4;3\right)=\frac{4}{5};$$

$$f'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_y\left(4;3\right)=\frac{3}{5}.$$

Одержимо $\sqrt{4,05^2+2,93^2}\approx 5+0,8\cdot 0,05-0,07\cdot 0,6=4,998$

9.4. Геометричні зображення функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області D. Кожній точці $M(x, y)\in D$ відповідає певне значення функції $z = f(M)$. Приймаючи це значення z за аплікату деякої точки $N(x, y, z)$, одержимо, що кожній точці $M\in D$ відповідає певна точка N простору. Сукупність точок являє собою (можливі виключення) деяку поверхню.

Більше зручним є метод ліній рівня.

Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається геометричне місце точок площини XOY, у яких функція $z = f(x, y)$ приймає постійне значення, тобто $z = f(x, y) = c$..

По лініях рівня можна судити про поверхні. Покладаючи c рівним: c, $c + h$, $c + 2h$, …, ми одержимо множину ліній рівня, за взаємним розташуванням яких можна судити про характер зміни функції. Рідкіші (при постійному h) лінії рівня вказують на більш повільну зміну функції.

Приклад.

Накреслити лінії рівня функції $z=xy$, надаючи значення від –3 до 3 через 1 (рис. 9.4)

Розв'язання.

При $z = h$ $(h\neq 0)$ лініями рівня є гіперболи $xy = h$. При $h = 0$ — осі координат $x = 0$, $y = 0$.

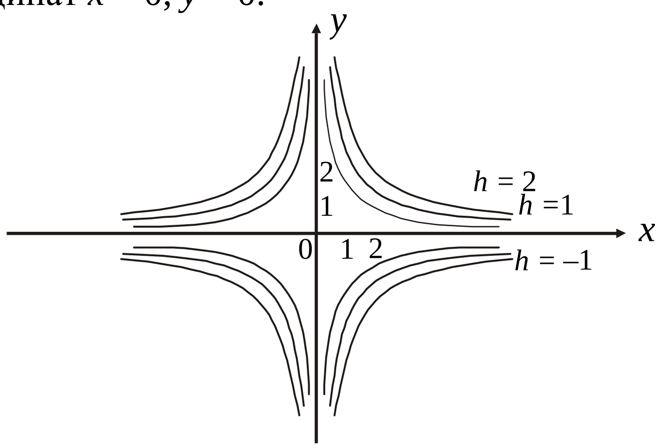


Рис. 9.4

9.5. Частинні похідні вищих порядків

Частинні похідні функції декількох змінних є функціями тих же змінних. Ці функції, у свою чергу, можуть мати частинні похідні, які називаються *другими частинними похідними* (або *частинними похідними другого порядку*) вихідної функції.

Так, наприклад, функція $z = f(x, y)$ двох змінних має чотири частинних похідних другого порядку, які визначаються й позначаються в такий спосіб:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'_{x^2}(x,y);\ \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f'_{yx}(x,y);\ \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f'_{y^2}(x,y).$$

Аналогічно визначаються й позначаються частинні похідні третього й більш високого порядку функції декількох змінних: *частинною похідною n-го порядку функції декількох змінних називається частинна похідна першого* *порядку від частинної похідної (n–1) -го порядку тієї ж функції.*

Наприклад, частинна похідна третього порядку $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ функції $z = f(x, y)$ є частинна похідна першого порядку по y від частинної похідної другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)}{\partial y}.$$

Частинна похідна другого або більше високого порядку, узята по декількох різних змінних, називається *мішаною частинною похідною*.

Наприклад, частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial z \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial z \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial z \partial y \partial x}$ є мішаними частинними похідними функції двох змінних $z = f(x, y)$.

Приклад.

Знайти мішані частинні похідні другого порядку функції $z = x^2 y^3$.

Розв’язання.

Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2.$$

Потім знаходимо мішані частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \left(2xy^3\right)'_y = 6xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \left(3x^2 y^3\right)'_x = 6xy^2.$$

Ми бачимо, що мішані частинні похідні даної функції $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, що відрізняються між собою лише порядком диференціювання, тобто послідовністю, у якій виконується диференціювання по різних змінних, виявилися тотожно рівними. Щодо мішаних частинних похідних має місце наступна теорема:

Теорема

Дві мішані частинні похідні однієї й тієї ж функції, що відрізняються лише порядком диференціювання, рівні між собою за умови їх неперервності.

Зокрема, для функції двох змінних $z = f(x, y)$ маємо:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Приклад.

Знайти частинні похідні $z'_x, \quad z'_y, \quad z'_{xx}, \quad z''_{yy}, \quad z''_{xy}$, якщо $z = 2x^2 + \dfrac{x}{y} - \cos^2\sqrt{y}.$

При знаходженні частинних похідних по x вважаємо, що y постійне і навпаки.

$$z'_x = 4x + \frac{1}{y},$$

$$z'_y = -\frac{x}{y^2} + 2\cos\sqrt{y}\sin\sqrt{y}\,\frac{1}{2\sqrt{y}} = -\frac{x}{y^2} + \frac{\sin\left(2\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}},$$

$$z''_{xx} = 4,$$

$$z''_{yy} = \frac{2x}{y^3} + \frac{\cos 2\sqrt{y}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{y}}\cdot\sqrt{y} - \sin\left(2\sqrt{y}\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}}}{2y} = \frac{2x}{y^3} + \frac{2\sqrt{y}\cos 2\sqrt{y} - \sin\left(2\sqrt{y}\right)}{4y^{3/2}}.$$

9.6. Диференціювання складних функцій

Змінна z називається складною функцією від незалежних змінних x, y,…,t, якщо вона задана за посередництвом проміжних аргументів u, v,…w:

$z=F(u, v,\ldots w)$, де

$u = f(x, y, \ldots, t)$, $v = \varphi(x, y, \ldots, t)$, …, $w = \psi(x, y, \ldots, t)$...

Частинна похідна складної функції по одній з незалежних змінних дорівнює сумі добутків її частинних похідних по проміжних аргументах на частинні похідні цих аргументів по незалежній змінній:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y};$$

……………………………………

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Якщо, зокрема, всі аргументи u, v,…w будуть функціями від однієї незалежної змінної x, то й z буде складною функцією від x. Похідна такої складної функції (від однієї незалежної змінної) називається повною похідною й визначається за формулою.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

9.6.1. Окремі випадки

Нехай $z = f(x, y)$ — диференційована функція своїх аргументів x та y, *а* x та y, у свою чергу, є функціями від деякого аргументу t. Тоді складна функція $z = z(t)=f(x(t), y(t))$ також диференційована, а її похідна знаходиться за формулою

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (9.6.1)$$

Якщо x та y залежать від декількох змінних, наприклад $x(u, v)$, $y(u, v)$, то формули частинних похідних складної функції $z = z(u, v)=f(x(u, v), y(u, v))$ мають аналогічний вигляд:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};\ \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (9.6.2)$$

Похідні складних функцій, що залежать від більшого числа аргументів, знаходяться за аналогічними правилами. Наприклад, якщо $u = f(x, y, z)$, а x, y, z самі є функціями від якихось змінних t, s, …, то

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}. \qquad (9.6.3)$$

Якщо x, y, z залежать тільки від t, то в цій формулі частинні похідні по t заміняють на звичайні:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \qquad (9.6.4)$$

Приклад 1.

Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = x^2+xy+y^2$, де $x = t^2$, $y = t^3$.

Розв’язання.

За формулою (9.6.1) маємо

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\left(2x+y\right)2t+\left(x+2y\right)3t^2=$$

$$=\left(2t^2+t^3\right)2t+\left(t^2+2t^3\right)3t^2=4t^3+5t^4+6t^5.$$

Той же результат можна одержати й іншим шляхом; спочатку виразити z явно через t, а потім знайти похідну отриманої функції:

$z = z(t) = (t^2)^2 + t^2\cdot t^3 + (t^3)^2 = t^4 + t^5 + t^6$;

$$\frac{dz}{dt}=4t^3+5t^4+6t^5.$$

Приклад 2.

Задано складну функцію $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

$$z=\sqrt{x-y+3xy},\begin{cases}x=4u-\cos\left(uv\right)\\ y=\operatorname{tg}^2\left(u-v^2\right)\end{cases}.$$

Маємо: $z = z(x, y) = z(x(u,v), y(u, v))$;

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$, тоді $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+3y}{2\sqrt{x-y+3xy}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-1+3x}{2\sqrt{x-y+3xy}}$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=4+\sin\left(u\cdot v\right)v;$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sin(uv)u \, ;$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2\text{tg}\left(u - v^2\right)}{\cos^2\left(u - v^2\right)} \, ;$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-4\text{tg}\left(u - v^2\right)}{\cos^2\left(u - v^2\right)} v \, ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{x - y + 3xy}} \left((1 + 3y)\left(4 + \sin(uv)v\right) + (3x - 1)\frac{2tg\left(u - v^2\right)}{\cos^2\left(u - v^2\right)} \right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{x - y + 3xy}} \left((1 + 3y)\left(s\text{in}(uv)u\right) - 4(3x - 1)\frac{tg\left(u - v^2\right)}{\cos^2\left(u - v^2\right)} v \right).$$

Приклад 3.

Задано функцію $z = e^{5x - y} + \sqrt{t}$, де $\begin{cases} x = \ln^2(t-1) \\ y = \ln(t^2+1) \end{cases}$.

Знайти повну похідну $\dfrac{dz}{dt}$.

Оскільки $z = z(x, y, t) = z(x(t), y(t), t)$, то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Тут $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5e^{5x-y}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -e^{5x-y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2\ln(t-1)}{t-1}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{t^2+1}.$$

$$\frac{dz}{dt} = e^{5x-y}\left(\frac{10\ln(t-1)}{t-1} - \frac{2t}{t^2+1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

9.7. Диференціювання неявних функцій

Змінна u називається неявною функцією від незалежних змінних x, y, …, t, якщо вона задана рівнянням $f(x, y, \ldots, t, u) = 0$, яке не розв'язане відносно u.

При цьому, якщо функція $f(x, y, \ldots, t, u)$ і її частинні похідні $f'_x, f'_y, \ldots f'_t, f'_u$ визначені й неперервні в деякій точці $M_0(x_0, y_0, \ldots, t_0, u_0)$ і поблизу неї й, якщо $f(M_0)=0$, а $f_u'(M_0) \neq 0$, то рівняння $f(x, y, \ldots, t, u) = 0$ поблизу точки $P(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ і в самій цій точці визначає u як однозначну, неперервну й диференційовану функцію від $x, y, \ldots, t$...

Похідні неявної функції u, заданої рівнянням $f(x, y, \ldots, t, u) = 0$, при дотриманні зазначених умов визначаються формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_u};\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_u};\ldots;\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{f'_t}{f'_u}. \qquad (9.7.1)$$

Зокрема, якщо y є неявна функція однієї змінної x, що задана рівнянням $f(x, y) = 0$, то $\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{f'_x}{f'_y}$. (9.7.2)

Приклад 1.

Функція $y(x)$ задана рівнянням $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$; знайти $\frac{dy}{dx}$ й $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Розв'язання.

У цьому випадку $f(x, y) = 1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy})$, тому

$$f'_x=y-\frac{1}{e^{xy}+e^{-xy}}\left(e^{xy}-e^{-xy}\right)y=\frac{2ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}},$$

$$f'_y=x-\frac{1}{e^{xy}+e^{-xy}}\left(e^{xy}-e^{-xy}\right)x=\frac{2xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}};$$

отже,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-f'_x}{f'_y}=\frac{\dfrac{-2ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}}{\dfrac{2xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}}=-\frac{y}{x}.$$

Вважаючи в цій рівності y функцією від x і диференціюючи його, знайдемо другу похідну неявної функції. При цьому використаємо вже знайдений вираз першої похідної:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{x\dfrac{dy}{dx}-y\cdot 1}{x^2}=-\frac{x\left(-\dfrac{y}{x}\right)-y}{x^2}=\frac{2y}{x^2}.$$

9.7.1. Неявна функція двох змінних

Функція z називається *неявною функцією* від x й y, якщо вона задається рівнянням

$$f(x, y, z) = 0, \qquad (9.7.3)$$

не розв'язаним відносно z.

Це значить, що при кожних значеннях аргументів $x = x_0$ й $y = y_0$ з області визначення неявної функції, вона приймає таке значення z_0, для якого $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Якщо $f(x, y, z)$ — диференційована функція трьох змінних x, y, z і $f'_z(x,y,z)\neq 0$, то задана рівнянням (9.7. 3) неявна функція $z = z(x, y)$ також диференційована, і її частинні похідні визначаються за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x(x,y,z)}{f'_z(x,y,z)};\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-f'_y(x,y,z)}{f'_z(x,y,z)}. \qquad (9.7.4)$$

Приклад 2.

Знайти частинні похідні функції $z(x, y)$, заданої рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Розв’язання. У цьому випадку

$$f\left(x,y,z\right)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,$$

тому $f'_x=\frac{2x}{a^2},\ f'_y=\frac{2y}{b^2},\ f'_z=\frac{2z}{c^2};$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{xc^2}{za^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yc^2}{zb^2}.$$

Приклад 3.

Знайти частинні похідні функції $z(x, y)$, заданої рівнянням $x^y - y^z + \sin(yz^2) + a^2 = 0$.

Розв’язання.

Маємо $f(x, y, z) = x^y - y^z + \sin(yz^2) + a^2$,

тоді $f'_x = yx^{y-1},\quad f'_y = x^y \ln x - zy^{z-1} + \cos(yz^2)z^2,\quad f'_z = -y^z \ln y + 2\cos(yz^2)yz,$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_z}=-\frac{yx^{y-1}}{-y^z\ln y+2\cos\left(yz^2\right)yz}=\frac{x^{y-1}}{y^{z-1}\ln y-2\cos\left(yz^2\right)z}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_z}=-\frac{x^y\ln x-zy^{z-1}+\cos(yz^2)z^2}{-y^z\ln y+2\cos\left(yz^2\right)yz}.$$

9.8. Екстремум функції *n* змінних

Нехай функція n незалежних змінних $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(M)$ визначена в якомусь δ-околі точки $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, тобто при $|MM_0|<\delta$, де δ — як завгодно мале додатне число.

Функція $u = f(M)$ має в точці M_0 максимум, якщо існує δ-окіл точки M_0, для всіх точок якого виконується нерівність $f(M) \le f(M_0)$; функція u має мінімум, якщо $f(M) \ge f(M_0)$.

Максимум або мінімум називаються її екстремумами.

9.8.1. Необхідні умови існування екстремуму

Якщо функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у точці M_0 маємо екстремум, то в цій точці або всі частинні похідні 1-го порядку дорівнюють 0, або хоча б одна з них не існує, а інші рівні 0.

Точки, у яких виконуються необхідні умови існування екстремуму функції, називаються *критичними*.

Точки, у яких частинні похідні існують і дорівнюють нулю $\frac{\partial u}{\partial x_i}=0\left(i=\overline{1,n}\right)$, називаються *стаціонарними* точками.

Отримані критичні точки досліджуються на екстремум за допомогою достатніх умов екстремуму.

9.8.2. Достатні умови існування екстремуму

Нехай функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має частинні похідні другого порядку в околі стаціонарної точки M_0.

Це означає, що в даній точці M_0 існує диференціал другого порядку.

$$d^2u\big|_{M_0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\bigg|_{M_0} dx_i dx_k.$$

Позначимо: $a_{ik} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\bigg|_{M_0}$; $a_{ik} = a_{ki}\ \left(i,k = \overline{1,n}\right)$.

Таким чином, $d^2u\big|_{M_0} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}dx_i dx_k$, де a_{ik} – коефіцієнти диференціала другого порядку в точці M_0. Складемо матрицю з елементів a_{ik} диференціала $d^2u\big|_{M_0}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Запишемо головні матриці

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \ldots,\ A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За формулами Тейлора в околі точки M_0 маємо

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(M)$$

Оскільки в стаціонарній точці M_0 $df(M_0) = 0$, знак різниці $f(M) - f(M_0)$ визначається знаком другого диференціала $d^2f(M)$.

На підставі критерія Сільвестра сформулюємо *достатні умови існування екстремуму функції* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$...

1) якщо всі головні мінори матриці A додатні, тобто $A_1 > 0, A_2 > 0, \ldots, A_n > 0$, *то функція* $u = f(M)$ *у точці* M_0 *має мінімум.*

2) якщо знаки головних мінорів чергуються, починаючи з $A_1 < 0$, *тобто* $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \ldots$, *то функція* $u = f(M)$ *у точці* M_0 *має максимум.*

3) якщо $d^2u(M_0) = 0$, *то потрібні додаткові дослідження.*

Якщо умови 1) або 2) не виконуються, то екстремуму немає.

9.8.3. Екстремум функції двох змінних

Функція $f(x, y)$ має максимум (мінімум) $f(x_0, y_0)$, якщо для всіх відмінних від M_0 точок $M(x,y)$ у досить малому околі точки M_0 виконується нерівність $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ (або відповідно $f(x_0, y_0) < f(x, y)$).

Необхідні умови екстремуму

Точки, у яких диференційована функція $f(x, y)$ може досягати екстремуму (стаціонарні точки), є розв'язками системи рівнянь:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}.$$

Достатні умови екстремуму

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ — стаціонарна точка функції $f(x, y)$. Тоді, якщо позначити $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$ й $\Delta = AC - B^2$, то

1) якщо $\Delta > 0$, функція має екстремум у точці $M_0(x_0, y_0)$, а саме максимум, якщо $A < 0$ й $\Delta > 0$, або мінімум, якщо $A > 0$ й $\Delta > 0$.

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $M_0(x_0, y_0)$ немає.

3) якщо $\Delta = 0$, то потрібне подальше дослідження.

Приклад.

Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Розв’язання. Маємо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y^2-15=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=6xy-12=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2xy=4 \end{cases}.$$

$(x + y)^2 = 9$, $|x + y| = 3$, $x + y=\pm3$, звідки одержуємо чотири стаціонарні точки. $M_1(1; 2)$, $M_2(2;1)$, $M_3(-1;-2)$, $M_4(-2; -1)$. Знайдемо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x.$$

Перевіряємо достатні умови екстремуму в кожній із точок.

1) у точці M_1: $A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1}=6,\ B=\left.\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\right|_{M_1}=12,\ C=\left.\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right|_{M_1}=6,$

$\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 < 0$. Виходить, у точці M_1 екстремуму немає.

2) У точці M_2: $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$, $\Delta = 144 - 36 > 0$, і $A > 0 \Rightarrow$ $z_{min}(M_2)=z_{\min}(2;1)=8+6-30-12=-28;$

3) У точці M_3: $A = -6$, $B = -12$, $C = -6$, $\Delta = 36 - 144 <0$. Екстремуму немає.

4) У точці M_4: $A = -12$, $B = -6$, $C = -12$, $\Delta = 144 - 36 > 0$ й $A < 0 \Rightarrow$ $z_{\min}(M_4)=z_{\min}(-2;-1)=-8-6+30+12=28.$

9.9. Дотична площина й нормаль до поверхні

Дотичною площиною до поверхні в точці M називається площина, що містить у собі всі дотичні до кривих, проведених на поверхні через точку M. *Нормаллю* до поверхні називається пряма, що проходить через точку дотику M і перпендикулярна дотичній площини. Якщо поверхня задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежить на ній, то:

дотична площина до поверхні в точці M_0 визначається рівнянням

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0; \tag{9.9.1}$$

нормаль до поверхні в точці M_0 (пряма, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини) визначається рівняннями

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)} \qquad (9.9.2)$$

Точки поверхні $F(x, y, z) = 0$, де одночасно дорівнюють нулю всі частинні похідні першого порядку F'_x, F'_y, F'_z, називають особливими. У таких точках поверхня не має ні дотичної площини, ні нормалі.

Приклад.

Скласти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$ у точці $M_0(1; 2; 3)$.

Розв'язання.

Рівняння дотичної площини до поверхні $F(x, y, z) = 0$ має вигляд (9.9. 1).

Знайдемо частинні похідні: $F'_x(M_0)=2x_0=2,\ F'_y(M_0)=2y_0=4,$ $F'_z(M_0)=2z_0=2\cdot 3=6,$ де $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 3$.

Тоді одержимо рівняння дотичної площини

$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$ або $x+2y+3z-14=0$.

Рівняння нормалі має вигляд (9.9. 2), тобто $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}$

або $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$.

9.10. Похідна по напряму

Розглянемо функцію $U = f(x, y, z)$ і знайдемо величину, що характеризує швидкість її зміни в деякій точці $M_0(x_0, y_0, z_0)\in D$ по напряму одиничного вектора $\vec{l}=(\cos\alpha;\cos\beta,\cos\gamma)$, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

Позначимо через $M(x, y, z)\in D$ змінну точку на промені l (Рис.9.6.).

Означення. *Похідною функції $f(x, y, z)$ по напряму $\vec{l}$ в точці M_0 називається границя*

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{|MM_0|}.$$

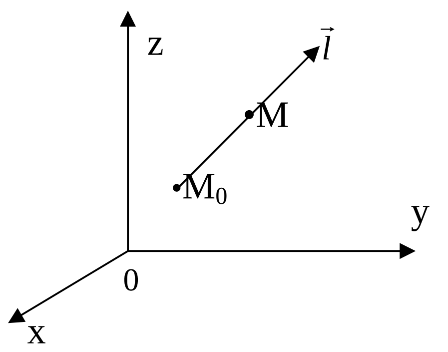


Рис. 9.5

Якщо напрям $\vec{l}$ збігається з додатним напрямом однієї з осей OX, OY або OZ, то $\frac{\partial f}{\partial l}$ є частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ або $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Має місце

Теорема. *Якщо функція $f(x, y, z)$ має в точці M_0 неперервні частинні похідні (тобто диференційована в точці M_0), то в точці M_0 існує похідна по будь-якому напряму, причому, ця похідна визначається формулою*

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (9.10.1)$$

Похідна $\frac{\partial U}{\partial l}$ характеризує *швидкість зміни величини U(M) по напряму* $\vec{l}$.
Зокрема, якщо $U = f(x, y)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta.$$

Приклад 1.

Знайти похідну по напряму бісектриси першого координатного кута в точці $M_0(1; 1)$ функції $U = x^3y - 5xy^2 + 1$.

Розв'язання.

Очевидно, що $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$.

Знаходимо $\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2y - 5y^2$,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^3 - 10xy, \text{ отже, } \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} = -2, \ \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} = -9, \ \frac{\partial U}{\partial l} = -2\cos\frac{\pi}{4} - 9\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{11}{\sqrt{2}}.$$

Приклад 2.

Знайти похідну функції $U = xy^2z^3$ у точці $A(3; 2; 1)$ по напряму вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Розв'язання.

Запишемо формулу (9.10. 1) для похідної від функції U по напряму $\vec{a}$ в точці A:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \left.\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_A$$

Частинні похідні

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_A = \left.y^2z^3\right|_A = 4,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_A = \left.2xyz^3\right|_A = 12,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_A = \left.3xy^2z^2\right|_A = 36.$$

Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ рівні $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}; \ \cos\beta = \frac{2}{3}, \ \cos\gamma = \frac{1}{3},$

де $|\vec{a}| = 3;$ звідси $\frac{\partial U}{\partial a} = 4\cdot\frac{2}{3} + 12\cdot\frac{2}{3} + 36\cdot\frac{1}{3} = 22\frac{2}{3}$.

9.11. Градієнт функції

Градієнт функції - міра зростання величини на одиницю довжини (латинськ. gradiens).

Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена й диференційована в області D.

Означення 1. Вектор, проекції якого на координатні осі рівні відповідно частинним похідним функції $f(x, y, z)$, називається градієнтом функції $f(x, y, z)$

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Користуючись поняттям похідної по напряму, одержимо деякі властивості градієнта.

Властивості градієнта

1. Перепишемо формулу (9.10. 1) для похідної по напряму $\vec{l}$ у вигляді скалярного добутку

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \left(\mathrm{grad}\, f, \vec{l}\right) = \left|\mathrm{grad}\, f\right|\left|\vec{l}\right|\cos\varphi = \left|\mathrm{grad}\, f\right|\cos\varphi, \text{ де } \left|\vec{l}\right| = 1.$$

Отже, $\frac{\partial f}{\partial l} = \left|\mathrm{grad}\, f\right|\cos\varphi.$

Із цієї формули випливає, що похідна функції по напряму $\vec{l}$ має найбільше значення, якщо $cos\varphi = 1$, тобто, якщо кут φ між векторами $grad\, f$ й $\vec{l}$ у точці M_0 дорівнює 0. У цьому випадку напрям $\vec{l}$ збігається з напрямом $grad\, f$.

Отже, якщо вектор $\vec{l}$ має напрям градієнта функції в даній точці, тобто $\vec{l} \uparrow\uparrow \mathrm{grad}\, f$, то $\frac{\partial f}{\partial l} = \left|\mathrm{grad}\, f\right|$ й приймає найбільше значення в даній точці.

Отриманий результат дозволяє тепер замість наведеного вище формального означення градієнта, пов'язаного з вибором системи координат, дати інше означення, що не залежить від вибору системи координат.

Означення 2. *Градієнтом функції U(M) називається вектор, спрямований убік найбільшого зростання функції й по модулю рівний похідній функції U по цьому напряму*. Причому, це найбільше значення дорівнює $\left|\mathrm{grad}\, f\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$

2. Напрям градієнта збігається з напрямом нормалі до поверхні рівня $U(x, y, z) = C$, що проходить через дану точку.

3. Похідна функції по будь-якому напряму, дотичному до поверхні рівня, дорівнює 0.

4. $grad(C_1U_1 + C_2U_2) = C_1grad_1 + C_2grad_2;$

5. $grad(UV) = Ugrad + Vgrad;$

6. $\mathrm{grad}\frac{U}{V} = \frac{\mathrm{grad}U\ V - \mathrm{grad}V\ U}{V^2}.$

Властивості 4-6 випливають безпосередньо з означення градієнта.

Приклад.

Знайти градієнт функції $z = ln(x^2 + y^2)$ у точці $A(3; 4)$.

Розв'язання.

$$grad\, z = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \vec{i} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \vec{j}.$$

Частинні похідні рівні

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = \left.\frac{2x}{x^2+y^2}\right|_A = \frac{6}{25}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = \left.\frac{2y}{x^2+y^2}\right|_A = \frac{8}{25}.$$

Підставимо значення частинних похідних у вираз для grad z:

$\operatorname{grad} z\big|_A = \frac{6}{25}\vec{i} + \frac{8}{25}\vec{j}.$

Контрольні завдання до розділу 9

Завдання 1.

Знайти частинні похідні Z'_x, Z'_y, Z''_{xx}, Z''_{yy}, Z''_{xy}.

9.1.1. $z = \sqrt{x+y}\sqrt{x-y}$.

9.1.2. $z = \ln(y^2 - 4x) + 8$.

9.1.3. $z = 2x^2 - 3xy + \sqrt{x-y}$.

9.1.4. $z = \frac{x+y}{x-y}$.

9.1.5. $z = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + y^2}$.

9.1.6. $z = \ln x - \ln\sin x$.

9.1.7. $z = arctg(x - y^2)$.

9.1.8. $z = 2\cos^2 xy + \frac{x}{y}$.

9.1.9. $z = x\sqrt{y} - 3^{y\cos x}$.

9.1.10. $z = x \cdot arctgy$.

9.1.11. $z = e^{\sin y/x}$.

9.1.12. $z = tg\,\frac{x}{y}$.

9.1.13. $z = 4^{tg\,y/x}$

9.1.14. $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$.

9.1.15. $z = y \cdot x^y$.

9.1.16. $z = x \cdot \arccos y$.

9.1.17. $z = 3\sin^2 x \cdot \sqrt{\cos y}$.

9.1.18. $z = arctg\sqrt{xy}$.

9.1.19. $z = x^2 y - \sin^2 x$.

9.1.20. $z = x^2 arctgxy$.

9.1.21. $z = y \cdot 3^x$.

9.1.22. $z = x\sqrt{y} + \sqrt{\cos x}$.

9.1.23. $z = \arcsin xy$.

9.1.24. $z = xe^{\sqrt{y}} + 2$.

9.1.25. $z = 3xy - \frac{x}{\sqrt{y}}$.

9.1.26. $z = 5\sqrt{xy}$.

9.1.27. $z = \frac{3}{x\sqrt{y}}$.

9.1.28. $z = ctg^2(x - 3y^2)$.

9.1.29. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

9.1. 30. $z = 3\sin^2 xy - \cos\sqrt{y}$.

РОЗДІЛ 10
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Диференціальним рівнянням називається співвідношення, що зв'язує незалежну змінну, невідому функцію і її похідні.

Якщо невідома функція, що входить у диференціальне рівняння, залежить тільки від однієї незалежної змінної, диференціальне рівняння називається *звичайним*.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної, що входить у рівняння.

Звичайне диференціальне рівняння порядку n у загальному випадку містить незалежну змінну, невідому функцію і її похідні до порядку n включно й має вигляд:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

У цьому рівнянні x – незалежна змінна, y – невідома функція, а $y', y'', ..., y^{(n)}$ – похідні невідомої функції.

Будь-яка функція $y = \varphi(x)$, що задовольняє диференціальному рівнянню, тобто перетворює його в тотожність, називається *розв'язком* цього рівняння:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Вираз $\Phi(x,y)=0$, що неявно задає розв'язок рівняння, називається *інтегралом* цього рівняння. Графік розв'язку диференціального рівняння називається його *інтегральною кривою*. Процес відшукування розв'язку диференціального рівняння називається його інтегруванням.

10.1. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію y й її першу похідну y'.

Загальний вид диференціального рівняння І порядку.

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (10.1.1)$$

Рівняння може не містити в явному виді x і y, але обов'язково містить y'.

Припустимо, що рівняння (10.1.1) можна розв'язати відносно похідної. Тоді воно має вигляд:

$$y' = f(x, y) \qquad (10.1.2)$$

Рівняння (10.1.2) називається рівнянням І порядку, розв'язаним відносно похідної. Рівняння першого порядку можна записати у вигляді:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Задача, у якій потрібно знайти розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початковій умові $y\big|_{x=x_0} = y_0$, називається *задачею Коші*.

Розв'язок, що задовольняє початковій умові, називається *частинним розв'язком* диференціального рівняння.

Теорема *існування й єдиності розв'язку задачі Коші:*

Якщо права частина f(x,y) рівняння $y' = f(x,y)$ *і її частинна похідна по y* $f'_y(x,y)$ *визначені й неперервні в області D зміни x і y, то яка б не була внутрішня точка* (x_0,y_0) *цієї області, дане рівняння має єдиний розв'язок* $y = \varphi(x)$*, що приймає при* $x=x_0$ *задане значення* $y=y_0$.

Геометрично це означає, що через кожну точку області *D* проходить (і притім тільки одна) інтегральна крива.

Загальним розв'язком диференціального рівняння І порядку називається функція $y = \varphi(x,C)$, що залежить від однієї довільної постійної С і задовольняє двом умовам:

1) функція $y = \varphi(x,C)$ є розв'язком рівняння при будь-яких допустимих значеннях постійної *C*;

2) вибором довільної постійної *C* можна задовольнити будь-якій початковій умові $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Співвідношення *Ф(x,y,C)=0,* що визначає загальний розв'язок в неявному виді, називається *загальним інтегралом* рівняння.

Частинним розв'язком диференціального рівняння (10.1. 1) називається розв'язок, одержуваний із загального розв'язок при якому-небудь певному значенні довільної С. Розв'язок задачі Коші, тобто розв'язок, що задовольняє початковим умовам, є частинним розв'язком.

Розглянемо методи інтегрування диференціального рівняння (10.1. 2) для окремих випадків правої частини *f*(*x*,*y*).

10.1.1. Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ називається *рівнянням* з *відокремлюваними змінними*, коли кожна з функцій *P(x,y)* і *Q(x,y)* є добутком двох функцій, одна з яких – функція, що залежить тільки від *x*, а друга – тільки від *y*, тобто $P(x,y)= f_1(x)g_1(y)$, а $Q(x,y)=f_2(x)g_2(y)$.

*Р*івняння має вигляд

$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$.

Інтегрування даного рівняння виконується поділом змінних, що здійснюється діленням обох частин рівняння $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ на добуток $g_1(y)f_2(x)$, у якому $g_1(y)$ – функція тільки від *y*, а $f_2(x)$ – функція тільки від *x*. Після ділення на цей добуток рівняння має вигляд

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0.$$

Це рівняння з розділеними змінними. Його загальний інтеграл запишеться так

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C$$

Якщо рівняння $g_1(y)=0$ й $f_2(x)=0$ мають розв'язки, то рівняння $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ може мати так називані особливі розв'язки, що не входять у загальний інтеграл. Однак питання існування особливих розв'язків виходить за рамки нашого викладу.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $(x^2+1)(y^2-1)dx+xydy=0$. Рівняння з відокремлюваними змінними . Розділивши обидві його частини на $(y^2-1)x$, одержимо рівняння $\frac{x^2+1}{x}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0$, що після інтегрування дає $\frac{x^2}{2}+\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=\ln|c|$. Потенціюючи, одержимо $y^2=1+\frac{ce^{-x^2}}{x^2}$ – загальний інтеграл.

Диференціальне рівняння з *відокремлюваними змінними* можна представити також у вигляді

$$y'=f_1(x)f_2(y),$$

права частина якого є добуток двох множників, кожний з яких є функцією тільки одного аргументу. Перепишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y)$, тоді $\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx$. Інтегруючи його почленно, одержимо $\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+c$ – загальний інтеграл рівняння.

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє початковій умові:

$$y'=\frac{y\ln y}{\sin x},\quad y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1.$$

Розв'язання. Рівняння запишемо у вигляді

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\ln y}{\sin x}.$$

Розділяючи змінні, будемо мати:

$$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}.$$

Інтегруючи, знаходимо

$$\ln|\ln y|=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\ln|c|,$$

Після потенціювання одержимо загальний розв'язок

$$\ln y=tg\frac{x}{2}\cdot c,$$

$$y=e^{tg\frac{x}{2}\cdot c}$$

Використовуючи початкову умову, одержимо

$$1=e^{tg\frac{\pi}{4}\cdot c};\quad 1=e^c\Rightarrow c=0.$$

$y=e^0\Rightarrow y=1$ – частинний розв'язок.

Диференціальні рівняння, що приводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними.

Рівняння виду

$$y'=f(ax+by+c)$$

приводиться до рівняння з відокремлюваними змінними

за допомогою підстановки $u = ax + by + c$, тоді $u' = a + by'$, $y' = \frac{u' - a}{b}, u = u(x)$.

Рівняння $y' = f(ax + by + c)$ приймає вигляд

$\frac{u' - a}{b} = f(u), u' = bf(u) + a$, $\frac{du}{dx} = bf(u) + a$ або $\frac{du}{bf(u) + a} = dx$,

Змінні розділені, інтегруючи, одержимо:

$$\int \frac{du}{bf(u) + a} = x + c.$$

У загальному інтегралі потрібно перейти до старої змінної, покладаючи $u = ax + by + c$.

Приклад. $y' = (8x + 2y + 1)^2$.

Права частина рівняння є функція від $(8x + 2y + 1)$. Отже, підстановкою $u = 8x + 2y + 1$ рівняння приводиться до рівняння з відокремлюваними змінними $u' = 8 + 2y', y' = \frac{u' - 8}{2}.$

Одержимо рівняння

$$\frac{u' - 8}{2} = u^2, u' = 2u^2 + 8, \frac{du}{2u^2 + 8} = dx,$$

інтегруючи яке знаходимо загальний інтеграл

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + 2^2} = \int dx, \frac{1}{2 \cdot 2} arctg \frac{u}{2} = x + c, \frac{1}{4} arctg \frac{8x + 2y + 1}{2} = x + c.$$

10.1.2. Однорідні диференціальні рівняння

Однорідним диференціальним рівнянням I порядку називається рівняння виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де $P(x, y)$ й $Q(x, y)$ – однорідні функції одного виміру (або порядку).

Функція $P(x, y)$ називається однорідною функцією своїх аргументів m-го виміру, якщо $\forall t$

$$P(tx, ty) = t^m P(x, y).$$

Якщо $m = 0$, $P(tx, ty) = P(x, y)$, то функція $P(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Взявши в якості $t = \frac{1}{x}$, одержимо: $P(tx, ty) = P(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y) = P(1, \frac{y}{x}) = Y(\frac{y}{x})$,

тобто однорідну функцію нульового виміру можна представити як функцію відношення $\frac{y}{x}$.

Рівняння $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

де права частина рівняння є однорідною функцією нульового виміру.

Таким чином, однорідне рівняння можна записати у вигляді:

$y' = f(\frac{y}{x}), x \neq 0$.

Приклади однорідних функцій:

$P(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, $P_1(x,y) = x - 2y$.

Дійсно, $P(tx,ty) = (tx)^2 + 2(tx)(ty) + 3(ty)^2 = t^2(x^2 + 2xy + 3y^2) = t^2 P(x\ ,y)\ \ (m=2)$;

$P_1(tx,ty) = tx - 2(ty) = t(x - 2y) = t^1 P_1(x,y) \quad (m=1)$.

За допомогою заміни змінної $\frac{y}{x} = U$, де $U = U(x)$, рівняння $y' = f(\frac{y}{x}), x \neq 0$ приводиться до рівняння з відокремлюваними змінними**.**

$y = Ux, \quad y' = U'x + U$.

Підставляючи ці вирази в рівняння, знайдемо $U'x + U = f(U)$ або $U'x = f(U) - U$. Розділяючи змінні й інтегруючи, одержимо загальний інтеграл рівняння:

$$\int \frac{dU}{f(U) - U} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dU}{f(U) - U} = \ln|x| + \ln|C|, \text{ або } \int \frac{dU}{f(U) - U} = \ln|xC|$$

Зауваження: при діленні на різницю $f(U) - U$ ми припускаємо, що $f(U) - U \neq 0$. Якщо ж існують корені рівняння $f(U) - U = 0$, наприклад, $U_1, U_2, ..., U_n$, тоді $y_i = U_i x (i = \overline{1,n})$ розв'язки, які можуть бути загублені при діленні. Графіки функцій $y_i = U_i x (i = \overline{1,n})$ – прямі, що проходять через початок координат на площині *xoy*.

Нехай загальний інтеграл рівняння $y' = f(\frac{y}{x}), x \neq 0$ має вигляд $\Phi(x, U, C) = 0$.

Повертаючись від *u* до *y* с допомогою формули $U = \frac{y}{x}$, одержимо:

$\Phi(x, \frac{y}{x}, C) = 0$ – загальний інтеграл рівняння.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = \frac{x}{y} + 2\frac{y}{x}$.

При заміні $\frac{y}{x} = U,$ де $U = U(x),$ маємо $y = Ux, y' = U'x + U$. Одержимо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними**,** щодо функції $U(x)$:

$U'x + U = \frac{1}{U} + 2U$, або $x\frac{dU}{dx} = \frac{1 + U^2}{U}, \frac{UdU}{1 + U^2} = \frac{dx}{x}$,

що після інтегрування дає

$$\int \frac{UdU}{1 + U^2} = \int \frac{dx}{x}, \frac{1}{2}\ln(1 + U^2) = \ln|Cx|, \sqrt{1 + U^2} = Cx, 1 + U^2 = C^2x^2, 1 + \frac{y^2}{x^2} = C^2x^2.$$

Виходить, $y = \pm x\sqrt{C^2x^2 - 1}$ – загальний розв'язок рівняння.

Диференціальні рівняння, що приводяться до однорідних рівнянь

Рівняння виду $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ приводяться до однорідного диференціального рівняння за допомогою заміни змінної. Варто помітити, що якби $c_1\, i\, c_2$ були рівні нулю, то рівняння було б однорідним. Рівняння $a_1x+b_1y+c_1=0$ й $a_2x+b_2y+c_2=0$ визначають дві прямі. Для знищення в рівняннях прямих вільних членів, треба перенести початок координат у точку перетину цих прямих. Розв'язуючи систему рівнянь: $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$, знайдемо точку перетину прямих (x_0,y_0).

Заміна змінних $\xi = x - x_0, \eta = y - y_0, \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx}$ приводить до рівняння $\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right)$. Це однорідне диференціальне рівняння.

Викладений метод не можна застосовувати, якщо прямі паралельні. Але в цьому випадку коефіцієнти при поточних координатах пропорційні $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$ й диференціальне рівняння може бути записане у вигляді: $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right)$

Отже, заміна змінних $z = a_1x + b_1y$ перетворить рівняння в рівняння з відокремлюваними змінними**.**

Приклад. $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$. Розв'язуючи систему рівнянь, $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$, знайдемо $x_0=1$, $y_0=2$.

Покладаючи $\xi = x-1, \eta = y-2$, будемо мати $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi-\eta}{\xi+\eta}$ або $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1-\eta/\xi}{1+\eta/\xi}$.

Отримане рівняння є однорідним. Заміна $U = \frac{\eta}{\xi}$ або $\eta = U\xi$ приводить до рівняння з відокремлюваними змінними відносно U

$$U + \xi\frac{dU}{d\xi} = \frac{1-U}{1+U};$$

Розділяємо змінні й інтегруємо:

$$\xi\frac{dU}{d\xi} = \frac{1-U}{1+U} - U; \int\frac{(1+U)dU}{1-2U-U^2} = \int\frac{d\xi}{\xi};\ -\frac{1}{2}\ln\left|U^2+2U-1\right| = \ln|\xi| - \frac{1}{2}\ln|c| \Rightarrow (U^2+2U-1)\xi^2 = C;$$

Підставимо $U = \frac{\eta}{\xi}$, тоді $-\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2 = C$.

Повертаючись до змінних x, y, знайдемо $x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C$ – загальний інтеграл рівняння.

10.1.3. Лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння називається *лінійним*, якщо воно лінійне щодо шуканої функції у й її похідної y', тобто якщо воно може бути записане у вигляді

$y' + p(x)y = q(x)$,

де р*(х)* і q*(х)* – неперервні функції.

Якщо q*(х)*$\equiv 0$, то рівняння називається однорідним; якщо *q(x)* $\neq 0$, то рівняння називається неоднорідним, або лінійним рівнянням із правою частиною.

Рівняння $y' + p(x)y = 0$, отримане з рівняння $y' + p(x)y = q(x)$, заміною функції q*(х)* нулями, називається лінійним однорідним рівнянням, що відповідає даному неоднорідному рівнянню.

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

Розділяючи змінні й інтегруючи, знаходимо: $\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx, \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|c|,$,

$y = ce^{-\int p(x)dx}$, де *с* – довільна постійна.

І метод розв'язування лінійного неоднорідного рівняння (ЛНР) – метод варіації довільної постійної.

Відповідно до методу варіації розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = ce^{-\int p(x)dx}$, вважаючи *с=с(х)*, тобто $y = c(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Знайдемо *с(х)* таким чином, щоб задовольнялося рівняння $y' + p(x)y = q(x)$
$c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)e^{-\int p(x)dx}p(x) + p(x)\cdot c(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$.

Функцію *с(х)* визначимо з рівняння $c'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$, тоді $c(x) = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + c$.

Виходить, загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + p(x)y = q(x)$ дорівнює $y = ce^{-\int p(x)dx}\cdot\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right)$.

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $ce^{-\int P(x)dx}$ й частинного розв'язку неоднорідного рівняння $e^{-\int p(x)dx}\cdot\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$, одержаного із загального при *с=0*.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x}$.

Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння
$\dfrac{dy}{dx} + y = 0, \dfrac{dy}{y} = -dx, \int\dfrac{dy}{y} = -\int dx, \ln|y| = -x + \ln|c|$ або $\ln|y| = \ln e^{-x} + \ln|c|$,

звідси знаходимо $y = ce^{-x}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння. Покладаючи *с=с(х)*, знаходимо загальний розв'язок неоднорідного рівняння.

Підставляємо $y = c(x)\cdot e^{-x}$ у вихідне рівняння:

$$c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = e^{-x} \Rightarrow c'(x) = 1,\, c(x) = x + c.$$

Тоді $y = (x+c)e^{-x}$ – загальний розв'язок неоднорідного рівняння.

II метод розв'язання ЛНР – метод Бернуллі.

За методом Бернуллі розв'язок шукається у вигляді добутку двох функцій: $y = u(x)v(x)$, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляючи y й y' в рівняння $y' + p(x)y = q(x)$, одержимо $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ або $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$.

Для відшукання двох функцій *u(x)* і *v(x)* є одне рівняння, тому одне із співвідношень між ними вибираємо довільно.

Нехай *v(x)*=$e^{-\int p(x)dx}$ – частинний розв'язок рівняння $v' + p(x)v = 0$, тоді функція *u(x)* може бути знайдена з рівняння з відокремлюваними змінними**.**

$$u' = \frac{q(x)}{v} \Rightarrow u' = q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}.$$

Загальний розв'язок ЛДР I порядку має вигляд, отриманий методом варіації.

Приклад. $(x^2+1)y' + xy = x(x^2+1)$ або $y' + \frac{x}{x^2+1}y = x$.

Тут $p(x) = \frac{x}{x^2+1};\quad q(x) = x$.

Знайдемо $v(x)$: $v' = -\frac{x}{x^2+1}\cdot v;\quad \frac{dv}{v} = -\frac{xdx}{x^2+1};\quad \ln|v| = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1);\, v = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Тепер знайдемо $u(x)$: $u' = x\sqrt{x^2+1};\ du = x\sqrt{x^2+1}dx;\ u = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + c$.

Розв'язок вихідного рівняння: $y = \left(\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + c\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ або

$$y = \frac{1}{3}(x^2+1) + \frac{c}{\sqrt{x^2+1}}.$$

10.1.4. Рівняння Бернуллі

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad (n \neq 0, n \neq 1).$$

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння за допомогою заміни змінної. Розділимо почленно рівняння на y^n: $y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$ і зробимо заміну змінної $y^{1-n} = z(x)$. Тоді $z' = (1-n)y^{-n}y'$. Відносно z одержимо неоднорідне лінійне рівняння $z' + p(x)(-n+1)z = (-n+1)q(x)$.

Нехай $\Phi(x,y,z) = 0$ – його загальний інтеграл, тоді, підставляючи $z = y^{-n+1}$, одержимо загальний розв'язок вихідного рівняння: $\Phi(x, y^{-n+1}, c) = 0$.

Приклад $y' + xy = x^3y^3\quad (n = 3)$.

Розв'язування.

Підстановкою $z = y^{-2}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння $z' - 2xz = -2x^3$.

Відшукуючи розв'язок його у вигляді $z = uv$, одержимо

$u'v+uv'-2xuv=-2x^3$, тоді функцію v визначимо з рівняння $v'=2xv$, $\frac{dv}{v}=2xdx$, $\ln|v|=x^2$, $v=e^{x^2}$. Функцію $u(x)$ знайдемо з рівняння $u'=-2x^3e^{-x^2}$,

$$u=-2\int x^3e^{-x^2}dx=\begin{vmatrix} x^2=t \\ dt=2xdx \end{vmatrix}=-\int te^{-t}dt=te^{-t}+\int e^{-t}dt=x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+c,$$

виходить $z=y^{-2}=(x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+c)e^{x^2}=x^2+1+ce^{x^2}$.

10.2. Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку

Загальний вид диференціального рівняння другого порядку $F(x,y,y',y'')=0$.

Його *загальний розв'язок* містить дві довільні сталі й має вигляд $y=y(x,c_1,c_2)$.

Задача Коші для рівняння другого порядку ставиться в такий спосіб: знайти розв'язок рівняння, що задовольняє умовам: $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$.

Типи рівнянь другого порядку, що допускають зниження порядку:

1) $y''=f(x)$, тоді $y'=\int f(x)dx+c_1, y=\int(\int f(x)dx+c_1)dx+c_2$ – загальний розв'язок.

Приклад: $y''=\sin x$, тоді $y'=-\cos x+c_1; y=-\sin x+c_1x+c_2$.

2) Рівняння явно не містить $y: f(x,y',y'')=0$.

Покладаємо $y'=p, p=p(x), \quad y''=p'$, тоді відносно p одержимо рівняння першого порядку $f(x,p,p')=0$.

Приклад: $xy''=y', y'=p, y''=p'$. Одержимо рівняння першого порядку $xp'=p$, звідки $\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}, \ln|p|=\ln|c_1x|, p=c_1x$. Підставляємо замість p його значення $\frac{dy}{dx}$, що дає $dy=c_1xdx$ або $y=c_1\frac{x^2}{2}+c_2$.

3) Рівняння явно не містить *x*, тобто рівняння виду $F(y,y',y'')=0$. Інтегрується заміною $y'=p, p=p(y), y''=p'p$, що приводить до рівняння першого порядку відносно *p*: $F(y,p,p'p)=0$.

Приклад 1. $y''=2yy', y'=p, y''=p'p$; одержимо рівняння

$$p\frac{dp}{dy}=2yp, \quad p\left(\frac{dp}{dy}-2y\right)=0;$$

а) *p=0, y=c* (не є загальним розв'язком)

б) $\frac{dp}{dy}=2y; dp=2ydy; p=y^2+c_1; \int\frac{dy}{y^2+c_1}=\int dx$;

Якщо $c_1>0$, то $\frac{1}{\sqrt{c_1}}arctg\frac{y}{\sqrt{c_1}}=x+c_2$, а якщо $c_1<0$, то

$$\frac{1}{2\sqrt{-c_1}}\ln\left|\frac{y-\sqrt{-c_1}}{y+\sqrt{-c_1}}\right|=x+c_2.$$

Приклад 2. $yy''-2(y')^2=0$. Рівняння не містить явно *x*.

Заміна $y' = p(y) \Rightarrow y'' = p\dfrac{dp}{dy} \Rightarrow yp\dfrac{dp}{dy} - 2p^2 = 0$.

а) $p \neq 0;\quad y\dfrac{dp}{dy} = 2p$. Це рівняння з відокремлюваними змінними **.**

$\dfrac{dp}{p} = 2\dfrac{dy}{y} \Rightarrow p = c_1 y^2$.

Заміняючи p на y', знову одержуємо рівняння першого порядку $y' = c_1 y^2$. Розділяючи змінні й інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок рівняння:

$\dfrac{dy}{y^2} = c_1 dx \Rightarrow y = \dfrac{-1}{c_1 x + c_2}$.

б) $p=0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y=c$ – теж є розв'язком вихідного диференціального рівняння, що не може бути отримане зі знайденого загального розв'язку ні при яких значеннях довільних сталих c_1, c_2. Таким чином, розв'язок $y=c$ не є частинний розв'язок даного рівняння.

10.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Диференціальні рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (10.3.1)$$

де $a_i(x)\quad (i = \overline{l,n})$ – деякі функції, називаються однорідними лінійними диференціальними рівняннями n-го порядку (ЛОДР).

Функції $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ називаються лінійно, незалежними, якщо з рівності нулю їхньої лінійної комбінації, тобто, з рівності

$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0$ *витікає, що* $\alpha_i = 0\ \ (i = 1, n)$.

Якщо хоча б один з коефіцієнтів лінійної комбінації $\alpha_i \neq 0$, то функції називаються лінійно залежними.

Фундаментальною системою розв'язків рівняння (10.3. 1), *називають будь-які* n *лінійно незалежних розв'язків.*

Нехай $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ – розв'язки диференціального рівняння n-го порядку. Визначник $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y' & y' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ називається визначником *Вронського*.

Якщо $W(x)$ розв'язків $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ тотожно дорівнює нулю, то ці розв'язки лінійно залежні. Якщо $W(x)$ не дорівнює нулю у жодній точці, то це означає, що розв'язки лінійно незалежні й становлять фундаментальну систему розв'язків. Будь-яке однорідне лінійне рівняння з неперервними коефіцієнтами має фундаментальну систему розв'язків.

Якщо $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків однорідного лінійного рівняння, то його загальний розв'язок має вигляд

$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x)$,
де $c_1, c_2, ...c_n$ – довільні сталі.

10.3.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами

ЛОДР з постійними коефіцієнтами має вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (10.3.2)$$

де a_i – постійні $(i = \overline{1,n})$.

Оскільки шукана функція y й її похідні $y^{(i)}(i = \overline{1,n})$ входять у рівняння лінійно, розв’язок даного рівняння шукається у вигляді $y = e^{\lambda x}$, тому що похідні показникової функції відрізняються від неї тільки постійним множником: $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$.

Підставивши $e^{\lambda x}$ в рівняння, одержимо $e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0$.

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, а коефіцієнти $a_i = const$, то знаходження фундаментальної системи розв’язків рівняння (10.3. 2) зводиться до алгебраїчних операцій, а саме до розв’язання алгебраїчного рівняння n-го степеня:

$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$

Це рівняння називається *характеристичним* рівнянням диференціального рівняння.

Характеристичне рівняння як алгебраїчне рівняння n-го степеня має n коренів (дійсних або комплексних) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

При розв’язуванні характеристичного рівняння можливі випадки:

1. Корені характеристичного рівняння – *дійсні* й *різні*, тоді диференціальне рівняння (10.3. 2) має n лінійно незалежних частинних розв’язків:

$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, ..., y_n = e^{\lambda_n x}$.

Загальний розв’язок диференціального рівняння (10.3.2) має вигляд:

$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + ... + c_n e^{\lambda_n x}$

Приклад 1. $y' + y'' - 2y = 0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ має $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1 -$ дійсні різні корені.

Лінійно незалежні частинні розв’язки мають вигляд: $y_1(x) = e^{-2x}$, $\quad y_2(x) = e^x$.

Тоді загальний розв’язок диференціального рівняння є їхня лінійна комбінація $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$.

2. Корені характеристичного рівняння дійсні, але серед них є кратні. Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = \lambda$, тобто λ − дійсний корінь кратності k, інші корені характеристичного рівняння $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, ..., \lambda_n$ – дійсні й різні. Тоді дійсному

кореню λ кратності *k* відповідає *k* частинних лінійно незалежних розв'язків диференціального рівняння (10.3. 2.):

$$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}, \ldots, y_k = x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (10.3.2.) має вигляд:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} + \ldots + c_k x^{k-1} e^{\lambda x} + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок ЛОДР.

$$y^{v} - 9y''' = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$\lambda^5 - 9\lambda^3 = 0$ або $\lambda^3(\lambda^2 - 9) = 0$.

Корені рівняння: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -3$, $\lambda_5 = 3$.

Корінь $\lambda_1 = 0$ – кратності три, корені $\lambda_4 = -3$, $\lambda_5 = 3$ – прості. Відповідні лінійно незалежні частинні розв'язки:

$$y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2,\ y_4 = e^{-3x},\ y_5 = e^{3x}.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-3x} + c_5 e^{3x},$$

де $c_i\,(i = \overline{1,5})$ – довільні сталі.

3. Серед коренів характеристичного рівняння, крім дійсних, є й комплексно-спряжені, але немає кратних коренів.

Нехай $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

Цим комплексно-спряженим кореням відповідають два частинні лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (10.3.2.) має вигляд:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x + c_3 e^{\lambda_3 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок ЛОДР:

$$y^{vI} - 2y^{Iv} - y'' + 2y = 0.$$

Характеристичне рівняння: $\lambda^6 - 2\lambda^4 - \lambda^2 + 2 = 0$.

Очевидно, що $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = -1$ є коренями рівняння. Розділимо ліву частину рівняння на $\lambda^2 - 1$, тоді $\lambda^6 - 2\lambda^4 - \lambda^2 + 2 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^4 - \lambda^2 - 2)$.

Знаходимо корені рівняння

$$\lambda^4 - \lambda^2 - 2 = 0$$

$$\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{2};\ \lambda_{5,6} = \pm i.$$

Парі комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння відповідають два частинні лінійно незалежні розв'язки:

$$y_5 = \cos x,\ y_6 = \sin x.$$

Інші частинні розв'язки:

$$y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{-x},\ y_3 = e^{+\sqrt{2}x},\ y_4 = e^{-\sqrt{2}x}$$

відповідають дійсним кореням характеристичного рівняння.

Загальний розв'язок:

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{\sqrt{2}x} + c_4 e^{-\sqrt{2}x} + c_5\cos x + c_6\sin x.$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$4y'' - 8y' + 5y = 0.$$

Характеристичне рівняння: $4k^2-8k+5y=0$,

$k_{1,2}=1\pm\frac{1}{2}i$, $\alpha=1$, $\beta=\frac{1}{2}$.

Два лінійно незалежні частинні розв'язки:

$y_1=e^x\sin\frac{x}{2}$; $y_2=e^x\cos\frac{x}{2}$.

Загальний розв'язок рівняння

$y(x)=e^x(c_1\sin\frac{x}{2}+c_2\cos\frac{x}{2})$.

Приклад 5. Знайти частинний розв'язок ЛОДР:

$y'''=-y'$; $y(0)=2$; $y^0(0)=0$; $y''(0)=-1$.

Характеристичне рівняння:

$\lambda^3+\lambda=0$, $\lambda(\lambda^2+1)=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=i$, $\lambda_3=-i$.

Загальний розв'язок рівняння: $y(x)=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$.

Знаходимо: $y'(x)=-c_2\sin x+c_3\cos x$,

$y''(x)=-c_2\cos x-c_3\sin x$.

Задовольняючи початковим умовам одержимо три рівняння для відшукання сталих c_1,c_2,c_3:

$y(0)=2 \quad\Rightarrow\quad c_1+c_2=2$

$y'(0)=0 \quad\Rightarrow\quad c_3=0$

$y''(0)=-1 \quad\Rightarrow\quad -c_2=-1;\Rightarrow c_2=1;c_1=1.$

Підставляючи знайдені сталі в загальний розв'язок, одержимо частинний розв'язок

$y=1+\cos x$.

Серед коренів характеристичного рівняння є кратні комплексно-спряжені корені. Нехай $\lambda_1=\alpha+i\beta$ й $\lambda_2=\alpha-i\beta$ – пара комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння кратності *k*. Тоді парі комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння кратності *k* відповідає 2*k* лінійно незалежних частинних розв'язків диференціального рівняння:

$$\begin{array}{l} y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x \\ y_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x, y_4=xe^{\alpha x}\sin\beta x \\ \ldots \\ y_{2k-1}=x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, y_{2k}=x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array},$$

іншим кореням характеристичного рівняння відповідають *n-2k* частинних лінійно незалежних розв'язків виду: $y_{k+1}=e^{\lambda_{2k+1}x},\ldots,y_n=e^{\lambda_n x}$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (10.3.2) має вигляд:

$$\begin{array}{l} y(x)=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x+x(c_3e^{\alpha x}\cos\beta x+c_4e^{\alpha x}\sin\beta x)+\ldots \\ +x^{k-1}(c_{2k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x+c_{2k}e^{\alpha x}\sin\beta x)+c_{2k+1}e^{\lambda_{2k+1}x}+\ldots+c_ne^{\lambda_n x} \end{array}.$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$64y^{VIII}+48y^{VI}+12y^{IV}+y''=0$

Характеристичне рівняння

$$64\lambda^8+48\lambda^6+\lambda^4+\lambda^2=0,$$
$$\lambda^2(64\lambda^6+48\lambda^4+12\lambda^2+1)=0\Rightarrow$$
$$\lambda^2=0,(4\lambda^2+1)^3=0\Rightarrow 4\lambda^2+1=0.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=\frac{1}{2}i$, $\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=-\frac{1}{2}i$.

Частинні лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння:
$y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=\sin\frac{1}{2}x$, $y_4=\cos\frac{1}{2}x$, $y_5=x\sin\frac{1}{2}x$, $y_6=x\cos\frac{1}{2}x$, $y_7=x^2\sin\frac{1}{2}x$, $y_8=x^2\cos\frac{1}{2}x$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння:
$$y(x)=c_1+c_2x+c_3\sin\frac{1}{2}x+c_4\cos\frac{1}{2}x+x(c_5\sin\frac{1}{2}x+c_6\cos\frac{1}{2}x)+$$
$$+x^2(c_7\sin\frac{1}{2}x+c_8\cos\frac{1}{2}x).$$

Сформулюємо загальне правило розв'язку ЛОДР з постійними коефіцієнтами:

1. Складемо характеристичне рівняння й відшукаємо його корені.
2. Знайдемо частинні розв'язки даного диференціального рівняння, при цьому:

а) кожному простому дійсному кореню λ характеристичного рівняння відповідає розв'язок $e^{\lambda x}$,

б) кожному *k-кратному* дійсному кореню λ характеристичного рівняння відповідають k розв'язків:
$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x},..., x^{k-1}e^{\lambda x}$,

в) Кожній парі простих комплексно-спряжених коренів $\alpha\pm i\beta$ характеристичного рівняння ставляться у відповідність два розв'язки
$e^{\alpha x}\sin\beta x$ и. $e^{\alpha x}\cos\beta x$

г) кожній парі *k-кратних* комплексно-спряжених коренів ставляться у відповідність $2k$ розв'язків
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,..., x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,..., x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

Можна довести, що отримана в такий спосіб множина розв'язків утворить фундаментальну систему розв'язків рівняння.

10.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку. Метод варіації довільних сталих

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку:
$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)\quad \text{(ЛНДР)} \qquad (10.4.1)$$

Відповідне йому лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку:
$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0\qquad \text{(ЛОДР)} \qquad (10.4.2)$$

За теоремою про структуру загального розв'язку ЛНДР загальний розв'язок диференціального рівняння (10.4.1) має вигляд:

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \tilde{y}(x)$,

де $y_1(x)$ й $y_2(x)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки диференціального рівняння (10.4. 2), а $\tilde{y}(x)$ – який-небудь частинний розв'язок диференціального рівняння (10.4. 1); c_1, c_2 – довільні постійні.

Для відшукання загального розв'язку ЛНДР (10.4.1) розглянемо метод варіації довільних постійних.

1. Знаходимо загальний розв'язок ЛОДР (10.4.2.)

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad (10.4.3)$$

де $y_1(x)$ й $y_2(x)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки диференціального рівняння (10.4. 2), c_1, c_2– довільні постійні.

2. Запишемо загальний розв'язок ЛНДР (10.4.1) у формі (10.4.3)

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x), \qquad (10.4.4)$$

де $c_1(x)$ й $c_2(x)$– невідомі функції. Функції $c_1(x)$ й $c_2(x)$ підберемо так, щоб функція $y(x)$ була розв'язком диференціального рівняння (10.4. 1).

3. Для визначення $c_1(x)$ й $c_2(x)$ необхідно розв'язати систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0 \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases} \qquad (10.4.5)$$

Із системи рівнянь (10.4. 5) $c_1'(x)$ і $c_2'(x)$ визначаються єдиним чином, тому що визначник системи

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) y_2(x) \\ y_1'(x) y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

функції $y_1(x)$ й $y_2(x)$– лінійно незалежні.

Нехай $c_1'(x) = \varphi_1(x)$ й $c_2'(x) = \varphi_2(x)$. Тоді $c_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + c_1, c_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + c_2$, де c_1 й c_2 постійні інтегрування.

4. Знайдені $c_1(x)$ й $c_2(x)$, підставимо в співвідношення (10.4. 4) і одержимо загальний розв'язок ЛНДР (10.4. 1).

$$y(x) = \left(\int \varphi_1(x) dx + c_1\right) y_1(x) + \left(\int \varphi_2(x) dx + c_2\right) y_2(x)$$

або $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_1(x) \int \varphi_1(x) dx + y_2(x) \int \varphi_2(x) dx$. (10.4.6)

У співвідношенні (10.4. 6) $c_1 y_1(x)$ + $c_2 y_2(x)$ - загальний розв'язок ЛОДР (10.4.2), а функція $\tilde{y}(x) = y_1(x) \int \varphi_1(x) dx + y_2(x) \int \varphi_2(x) dx$ - частинний розв'язок ЛНДР (10.4.1).

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - y = \frac{e^x}{1 + e^x}. \qquad (10.4.7)$$

Відповідне однорідне диференціальне рівняння $y'' - y = 0$

Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$.

Отже, фундаментальна система розв'язків є $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^x$.
Відповідно до методу варіації довільних постійних загальний розв'язок неоднорідного рівняння (10.4.7) шукаємо у вигляді

$$y = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^x . \qquad (10.4.8)$$

Для відшукання $c_1'(x)$ й $c_2'(x)$ запишемо систему рівнянь (10.4.5)

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^x = 0, \\ -c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^x = \dfrac{e^x}{1+e^x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь за формулами Крамера.
Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^x \\ -e^{-x} & e^x \end{vmatrix} = 2,.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \dfrac{e^x}{1+e^x} & e^x \end{vmatrix} = -\frac{e^{2x}}{1+e^x}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \dfrac{e^x}{1+e^x} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+e^x};$$

$$c_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{e^{2x}}{2\left(1+e^x\right)}; \quad c_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2\left(1+e^x\right)}.$$

У результаті інтегрування знаходимо

$$c_1(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(e^{2x}-1)+1}{1+e^x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{1+e^x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+e^x} = -\frac{1}{2}(e^x - x) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+e^x};$$

Знайдемо $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}dx = \int dx - \int \frac{d(1+e^{x})}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x)$.

Отже, $c_1(x) = -\dfrac{1}{2}(e^x - x) - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\ln(1+e^x) = \dfrac{1}{2}(\ln(1+e^x) - e^x) + \tilde{c}_1$,

$$c_2(x) = \frac{1}{2}(x - \ln(1+e^x)) + \tilde{c}_2 .$$

Підставляючи вирази для $c_1(x)$ й $c_1(x)$ в (10.4.8), одержимо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y(x) = \tilde{c}_1 e^{-x} + \tilde{c}_2 e^x + \frac{1}{2}\ln(1+e^x)(e^{-x} - e^x) + \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}.$$

10.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння *n*-го порядку з постійними коефіцієнтами і з правою частиною спеціального виду. Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x), \qquad (10.5.1)$$

де $a_i (i = \overline{1,n})$ – дійсні числа. Відповідне (10.5.1) ЛОДР:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0 .$$

Загальний розв’язок ЛОДР має вигляд:
$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$,
де c_i – довільні сталі $(i = \overline{1,n})$, а $y_i (i = \overline{1,n})$ – фундаментальна система розв’язків цього диференціального рівняння.

Загальний розв’язок ЛНДР (10.5.1)визначається формулою:
$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n + \tilde{y}(x)$,
де $\tilde{y}(x)$ – який-небудь частинний розв’язок (10.5. 1).
У попередньому параграфі був розглянутий загальний метод відшукання загального розв’язку ЛНДР − метод варіації довільних сталих.

Якщо $f(x)$ має спеціальний вигляд, то частинний розв’язок $\tilde{y}(x)$ може бути знайдено методом невизначених коефіцієнтів.
Метод невизначених коефіцієнтів дозволяє для так називаної спеціальної правої частини знайти частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння без інтегрування.

Загальний вид спеціальної правої частини
$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x), \qquad (10.5.2)$$
де $P_n(x)$ й $Q_m(x)$ – многочлени степенів n і m *відповідно*, тобто
$Pn(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_{n-1}x + c_n$,
$Q_m(x) = D_0 x^m + D_1 x^{m-1} + ... + D_{m-1}x + D_m$,
α і β - дійсні числа.

Частинний розв’язок ЛНДР, що відповідає даній правій частини $f(x)$ шукаємо у вигляді
$$\tilde{y} = e^{\alpha x}(M_r(x)\cos\beta x + N_r(x)\sin\beta x)x^k, \qquad (10.5.3)$$
де $M_r(x)$ й $N_r(x)$ – многочлени степеня r з невизначеними коефіцієнтами:
$M_r(x) = A_0 x^r + A_1 x^{r-1} + ... + A_{r-1}x + A_r$,
$N_r(x) = B_0 x^r + B_1 x^{r-1} + ... + B_{r-1}x + B_r$,
$r = \max(m,n)$;
k – кратність коренів $\alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння; якщо числа $\alpha \pm i\beta$ не є коренями характеристичного рівняння, то треба покласти $k=0$.
Для ЛНДР має місце *принцип накладення розв’язків*: якщо y_1 – *частинний розв’язок неоднорідного рівняння* із правою частиною $f_1(x)$, y_2 – *частинний розв’язок рівняння із правою частиною* $f_2(x)$, то сума $y_1 + y_2$ є *частинний розв’язок рівняння із правої частиною* $f_1(x) + f_2(x)$.
Таким чином, якщо ЛНДР має вигляд:
$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f_1(x) + f_2(x)$, то частинний розв’язок $\tilde{y}(x)$ цього рівняння можна представити у вигляді суми $\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$, де $\tilde{y}_1(x)$ й $\tilde{y}_2(x)$ відповідні частинні розв’язки рівнянь:
$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f_1(x)$; $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f_2(x)$.

Приклад 1**.** Знайти частинний розв’язок рівняння
$$y'' + 4y = \sin 2x, \; y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \qquad (10.5.4)$$
Розглянемо ЛОДР $y'' + 4y = 0$, що відповідає даному неоднорідному.

Характеристичне рівняння:
$\lambda^2 + 4 = 0$, корені цього рівняння $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.
Загальний розв'язок однорідного рівняння
$y_{0.0.} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.
Права частина рівняння $f(x) = \sin 2x$.
Виходячи із загального виду спеціальної правої частини (10.5.2) маємо:
$P_0(x) = 0, \quad Q_0(x) = 1, \ \alpha = 0, \ \beta = 2, \ r = 0$.

Числа $\alpha \pm i\beta = 0 \pm 2i = \pm 2i$ є корені характеристичного рівняння. Частинний розв'язок шукаємо у вигляді: $\tilde{y}(x) = (M \cos 2x + N \sin 2x)x$.
Тут числа $\pm 2i$ є простими коренями характеристичного рівняння $(k = 1, r = 0, r = \max(n, m)$, де $n = 0, m = 0)$. Підставимо функцію $\tilde{y}(x)$ і її похідні $\tilde{y}'(x)$, $\tilde{y}''(x)$ у рівняння (10.5. 4), одержимо:
$\tilde{y}' = -2Mx \sin 2x + 2xN \cos 2x + M \cos 2x + N \sin 2x$,
$\tilde{y}'' = -4M \sin 2x + 4N \cos 2x - 4xM \cos 2x - 4xN \sin 2x$.
Невизначені коефіцієнти M и N визначаємо з тотожності:
$-4M \sin 2x + 4N \cos 2x = \sin 2x$,
звідки прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 2x$ й $\cos 2x$, одержимо систему

$$\begin{array}{l|l} \sin 2x & -4M = 1 \Rightarrow M = -\dfrac{1}{4}. \\ \cos 2x & N = 0 \end{array}$$

Отже, частинний розв'язок: $\tilde{y}(x) = -\dfrac{1}{4} x \cos 2x$.
Загальний розв'язок диференціального рівняння:
$y(x) = y_{0.0.} + \tilde{y}(x)$ або $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \dfrac{1}{4} x \cos 2x$.

Для відшукування частинного розв'язку використаємо початкові умови $y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$.
Знаходимо
$y'(x) = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x - \dfrac{1}{4} \cos 2x + \dfrac{1}{2} x \sin 2x.$
З початкової умови $y'(0) = 1$ маємо
$2c_2 - \dfrac{1}{4} = 1, c_2 = \dfrac{5}{8}$.
Отже, $y = \dfrac{5}{8} \sin 2x - \dfrac{1}{4} x \cos 2x$ – шуканий частинний розв'язок.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння:
$y'' - 6y' + 13y = e^x (x^2 - 5x + 2)$.
Характеристичне рівняння:
$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$, його корені $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$.
Загальний розв'язок однорідного рівняння
$y_{0.0.} = e^{3x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.
Права частина $f(x) = e^x (x^2 - 5x + 2), \ P_n(x) = x^2 - 5x + 2, \ \beta = 0, \ r = 2$.
Число $\alpha = 1$ не є коренем характеристичного рівняння. Частинний розв'язок

шукаємо у вигляді

$\tilde{y}(x) = e^x(Ax^2 + Bx + C)$.

Невизначені коефіцієнти *A*, *B*, *C* визначаємо, диференціюючи двічі $\tilde{y}(x)$ й підставляючи у вихідне рівняння: (e^x скорочуємо)

$\tilde{y}'(x) = e^x(Ax^2 + Bx + C + 2Ax + B)$,

$\tilde{y}''(x) = e^x(Ax^2 + Bx + C + 4Ax + 2B + 2A)$,

$Ax^2 + Bx + C + 4Ax + 2B + 2A - 6(Ax^2 + Bx + C + 2Ax + B) + 13(Ax^2 + Bx + C) =$

$= x^2 - 5x + 2,$

або

$8Ax^2 + (8B - 8A)x + (8C - 4B + 2A) = x^2 - 5x + 2$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях *x*:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 8A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{8}, \\ x^1 & 8B - 8A = -5 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}, \\ x^0 & 8C - 4B + 2A = 2 \Rightarrow C = -\frac{1}{32}, \end{array}$$

одержимо: $\tilde{y}(x) = e^x\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{32}\right)$.

Маємо загальний розв’язок диференціального рівняння:

$y(x) = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) +$ $e^x\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{32}\right)$.

Приклад 3. Знайти розв’язок рівняння

$y'' + y' = x^2 + 2x$

задовольняючий початковим умовам: $y(0) = 4, y'(0) = -2$.

Відповідне однорідне рівняння

$y'' + y' = 0$.

Характеристичне рівняння

$\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$.

Загальний розв’язок однорідного рівняння:

$y_{0.0.} = c_1 + c_2 e^{-x}$.

Права частина $f(x) = x^2 + 2x$, тоді $\alpha = \beta = 0$.

Виходить, $\alpha \pm i\beta = 0$ є простий корінь характеристичного рівняння, тобто *k=1*, тому частинний розв’язок шукаємо у виді

$\tilde{y}(x) = (Ax^2 + Bx + C)x$.

Підставивши функцію $\tilde{y}(x)$ у вигляді:

$\tilde{y}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ і її похідні $\tilde{y}'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $\tilde{y}''(x) = 6Ax + 2B$

у вихідне диференціальне рівняння, одержимо тотожність:

$6Ax + 2B + 3Ax^2 + 2Bx + C = x^2 + 2x$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях *x*, знайдемо *A*, *B*, *C*

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 3A=1, A=\frac{1}{3}, \\ x^1 & 6A+2B=2; B=0, \\ x^0 & 2B+C=0, C=0. \end{array}$$

Тоді $\tilde{y}(x)=\frac{1}{3}x^3$ – частинний розв'язок рівняння. Загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y(x)=c_1+c_2e^{-x}+\frac{1}{3}x^3$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок ЛНДР: $y''-y'-2y=e^x+e^{-2x}$,

$f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=e^{-2x}$

Розглянемо відповідне ЛОДР: $y''-y'-2y=0$.

Характеристичне рівняння $\lambda^2-\lambda-2=0$, корені $\lambda_1=2, \lambda_2=-1$.

Частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді $\tilde{y}(x)=\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)$, де $\tilde{y}_1(x)$ й $\tilde{y}_2(x)$,

відповідні частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

$y''-y'-2y=e^x$, $y''-y'-2y=e^{-2x}$.

Частинні розв'язки цих диференціальних рівнянь відповідно рівні:

$\tilde{y}_1(x)=-\frac{1}{2}e^x$, $\tilde{y}_2(x)=\frac{1}{4}e^{-2x}$.

Частинний розв'язок ЛНДР: $\tilde{y}(x)=-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{4}e^{-2x}$.

Загальний розв'язок ЛНДР: $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{4}e^{-2x}$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$y''-6y'+8y=3e^{2x}$.

Відповідне однорідне рівняння:

$y''-6y'+8y=0$.

Корені його характеристичного рівняння $\lambda^2-6\lambda+8=0$

рівні: $\lambda_1=2,\quad \lambda_2=4$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$y_{0.0.}=c_1e^{2x}+c_2e^{4x}$

Знайдемо частинний розв'язок.

Порівняємо праву частину рівняння з (10.5. 2), одержимо $\alpha=2, \beta=0$. Число $\alpha\pm i\beta=2$ є простий корінь характеристичного рівняння.

Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$\tilde{y}(x)=Ae^{2x}\cdot x$, де $k=1$.

$P_0(x)$ і $Q_0(x)$– многочлени нульового степеня, у зв'язку із цим $r=0$ і коефіцієнт при e^{2x} беремо у вигляді константи. Знаходимо похідні $\tilde{y}'(x)$, $\tilde{y}''(x)$ і підставляємо їх у неоднорідне рівняння, що дає

$8Ax-6A-12Ax+4A+4Ax=3$ (e^{2x} скорочується).

Звідси маємо $A=-\frac{3}{2}$, $\tilde{y}(x)=-\frac{3}{2}e^{-2x}\cdot x$.

Загальний розв'язок: $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{4x}-\frac{3}{2}e^{2x}\cdot x$

Приклад 6. Записати вид частинних розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь.

а) $y''+4y=\sin 2x$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}=2i$.

Аналізуємо праву частину: $f(x)=\sin 2x$, тоді $\alpha=0,\ \beta=2$, тобто $\alpha+i\beta=+2i$ є простими коренями характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок має вигляд

$\tilde{y}(x)=(A\cos 2x+B\sin 2x)x$.

б) $y''-2y'+y=(6x^2-4)e^x$.

Характеристичне рівняння $\lambda^2-2\lambda+1=0$.

Його корені $\lambda_{1,2}=1$. Порівнюючи праву частину з (10.5.2) визначаємо, що $\alpha=1,\quad r=2,\quad k=2$. Отже, частинний розв'язок запишеться

$\tilde{y}(x)=e^x(Ax^2+Bx+C)x^2$.

в) $y''+6y'+9y=2xe^{-3x}\sin x$.

Корені характеристичного рівняння

$\lambda_{1,2}=-3$. По правій частині маємо: $\alpha=-3,\quad \beta=1,\quad r=1$.

Вид частинного розв'язку $\tilde{y}(x)=e^{-3x}((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x)$.

г) $y''-6y'+13y=8e^{3x}\sin 2x$.

Корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}=3\pm 2i$.

По правій частині знаходимо: $\alpha=3,\quad \beta=2,$ тобто $\alpha\pm i\beta=3\pm 2i$ – прості корені характеристичного рівняння: $r=0,\quad k=1$

Частинний розв'язок:

$\tilde{y}(x)=e^{3x}(A\cos 2x\ +B\sin 2x)x$.

Контрольні завдання до розділу 10

Завдання 1. a), b), c) Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

d), e). Знайти розв'язок задачі Коші.

10.1.1 a) $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$; b) $y'=\frac{y^2}{x^2}+4\frac{y}{x}+2$; c) $y'=\frac{x+2y-3}{2x-2}$;

d) $y'-y/x=x^2,\quad y(1)=0.$; e) $y'+xy=(1+x)e^{-x}y^2,\quad y(0)=1.$

10.1.2 a) $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$; b) $xy'=\frac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}$; c) $y'=\frac{x+y-2}{2x-2}$;

d) $y'-yctgx=2x\sin x,\quad y(\pi/2)=0$; e) $xy'+y=2y^2\ln x,\quad y(1)=1/2$.

10.1.3 a) $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy$; b) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$; c) $y' = \dfrac{3y-x-4}{3x+3}$.

d) $y' + y\cos x = (1/2)\sin 2x, \quad y(0) = 0$; e) $2(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 2$

10.1.4 a) $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy$; b) $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$; c) $y' = \dfrac{2y-2}{x+y-2}$;

d) $y' + ytgx = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 1/2$; e) $y' + 4x^3y = 4(x^3+1)e^{-4x}y^2, \quad y(0) = 1$.

10.1.5 a) $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$; b) $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3$; c) $y' = \dfrac{x+y-2}{3x-y-2}$;

d) $y' - y/(x+2) = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 3/2$.; e) $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x, \quad y(1) = 1$.

10.1.6 a) $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$; b) $xy' = \dfrac{3y^3+4yx^2}{2y^2+2x^2}$; c) $y' = \dfrac{2x+y-3}{x-1}$;

d) $y' - y/(x+1) = e^x(x+1), \quad y(0) = 1$; e) $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 2$.

10.1.7 a) $(e^{2x}+5)dy + ye^{2x}dx = 0$; b) $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$; c) $y' = \dfrac{x+7y-8}{9x-y-8}$;

d) $y' - y/x = x\sin x, \quad y(\pi/2) = 1$; e) $3(xy' + y) = y^2\ln x, \quad y(1) = 3$.

10.1.8 a) $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$; b) $xy' = 2\sqrt{x^2+y^2} + y$; c) $y' = \dfrac{x+3y+4}{3x-6}$;

d) $y' + y/x = \sin x, \quad y(\pi) = 1/\pi$; e) $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1+\sin x), y(0) = 1$.

10.1.9 a) $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$; b) $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 4$; c) $y' = \dfrac{3y+3}{2x+y-1}$;

d) $y' + y/(2x) = x^2, \quad y(1) = 1$.; e) $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1-x^3), y(0) = -1$.

10.1.10 a) $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$; b) $xy' = \dfrac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}$; c) $y' = \dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}$;

d) $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \dfrac{2}{3}$; e) $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, y(0) = -1$.

10.1.11 a) $y(4+e^x)dy - e^xdx = 0$; b) $y' = \dfrac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}$; c) $y' = \dfrac{x-2y+3}{-2x-2}$;

d) $y' - \dfrac{2x-5}{x^2}y = 5, \quad y(2) = 4$; e) $2xy' - 3y = -(5x^2+3)y^3, y(1) = 1/\sqrt{2}$.

10.1.12 a) $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$; b) $xy' = \sqrt{2x^2+y^2} + y$; c) $y' = \dfrac{x+8y-9}{10x-y-9}$;

d) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}e^x, \quad y(1) = e$; e) $3xy' + 5y = (4x-5)y^4, \quad y(1) = 1$.

10.1.13 a) $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$; b) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6$; c) $y' = \dfrac{2x+3y-5}{5x-5}$.

d) $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1$; e) $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2+3\cos x)y^{-1}; y(0) = 1$.

10.1.14 a) $x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$; b) $xy'=\dfrac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}$; c) $y'=\dfrac{4y-8}{3x+2y-7}$;

d) $y'-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{12}{x^3}$, $y(1)=4$; e) $3(xy'+y)=xy^2$, $y(1)=3$.

10.1.15 a) $(e^x+8)dy-ye^x dx=0$; b) $y'=\dfrac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$; c) $y'=\dfrac{x+3y-4}{5x-y-4}$;

d) $y'+\dfrac{2}{x}y=x^3$, $y(1)=-5/6$; e) $y'-y=2xy^2$, $y(0)=1/2$.

10.1.16 a) $\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0$; b) $xy'=3\sqrt{x^2+y^2}+y$; c) $y'=\dfrac{y-2x+3}{x-1}$;

d) $y'+\dfrac{y}{x}=3x$, $y(1)=1$. e) $2xy'-3y=-(20x^2+12)y^3; y(1)=1/2\sqrt{2}$.

10.1.17 a) $6xdx-ydy=yx^2dy-3xy^2dx$; b) $2y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+8$; c) $y'=\dfrac{x+2y-3}{x-1}$;

d) $y'-\dfrac{2xy}{1+x^2}=1+x^2$, $y(1)=3$; e) $y'+2yx=2x^3y^3$, $y(0)=\sqrt{2}$.

10.1.18 a) $y\ln y+xy'=0$; b) $xy'=\dfrac{3y^3+10yx^2}{2y^2+5x^2}$ c) $y'=\dfrac{3x+2y-1}{x+1}$;

d) $y'-\dfrac{1-2x}{x^2}y=1$, $y(1)=1$; e) $xy'+y=y^2\ln x$, $y(1)=1$.

10.1.19 a) $(1+e^x)y'=ye^x$; b) $y'=\dfrac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}$; c) $y'=\dfrac{5y+5}{4x+3y-1}$;

d) $y'+\dfrac{3y}{x}=\dfrac{2}{x^3}$, $y(1)=1$; e) $2y'+3y\cos x=(8+12\cos x)e^{2x}y^{-1}; y(0)=2$.

10.1.20 a) $\sqrt{1-x^2}y'+xy^2+x=0$; b) $xy'=3\sqrt{2x^2+y^2}+y$; c) $y'=\dfrac{x+4y-5}{6x-y-5}$;

d) $y'+2xy=-2x^3$, $y(1)=e^{-1}$; e) $4y'+x^3y=(x^3+8)e^{-2x}y^2, y(0)=1$.

10.1.21 a) $6xdx-2ydy=2yx^2dy-3xy^2dx$; b) $y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+12$; c) $y'=\dfrac{x+y+2}{x+1}$;

d) $y'+\dfrac{xy}{2(1-x^2)}=\dfrac{x}{2}$, $y(0)=\dfrac{2}{3}$; c) $8xy'-12y=-(5x^3+3)y^3$, $y(1)=\sqrt{2}$.

10.1.22 a) $y(1+\ln y)+xy'=0$; b) $xy'=\dfrac{3y^3+12yx^2}{2y^2+6x^2}$; c) $y'=\dfrac{2x+y-3}{4x-4}$;

d) $y'+xy=-x^3$, $y(0)=3$; e) $2(y'+y)=xy^2$, $y(0)=2$.

10.1.23 a) $(3+e^x)yy'=e^x$; b) $y'=\dfrac{x^2+xy-3y^2}{x^2-4xy}$; c) $y'=\dfrac{2x+y-3}{2x-2}$;

d) $y'-\dfrac{2}{x+1}y=e^x(x+1)^2$, $y(0)=1$; e) $y'+xy=(x-1)e^x y^2$, $y(0)=1$.

10.1.24 a) $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}\,yy'=0$; b) $xy'=2\sqrt{3x^2+y^2}+y$; c) $y'=\dfrac{y}{2x+2y-2}$;

d) $y'+2xy=xe^{-x^2}\sin x,\quad y(0)=1$; e) $2y'-3y\cos x=-e^{-2x}(2+3\cos x)y^{-1};\, y(0)=1$.

10.1.25 a) $xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx$; b) $4y'=\dfrac{y^2}{x^2}+10\dfrac{y}{x}+5$; c) $y'=\dfrac{x+5y-6}{7x-y-6}$;

d) $y'-\dfrac{2y}{(x+1)}=(x+1)^3,\quad y(0)=\dfrac{1}{2}$; e) $y'-y=xy^2,\quad y(0)=1$.

10.1.26 a) $\sqrt{5+y^2}\,dx+4(x^2y+y)dy=0$; b) $xy'=\dfrac{3y^3+14yx^2}{2y^2+7x^2}$; c) $y'=\dfrac{x+y-4}{x-2}$;

d) $y'-y\cos x=-\sin 2x,\quad y(0)=3$; e) $2(xy'+y)=y^2\ln x,\quad y(1)=2$.

10.1.27 a) $(1+e^x)yy'=e^x$; b) $y'=\dfrac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}$; c) $y'=\dfrac{2x+y-1}{2x-2}$;

d) $y'-4xy=-4x^3,\quad y(0)=-1/2$; e) $y'+y=xy^2,\quad y(0)=1$.

10.1.28 a) $3(x^2y+y)dy+\sqrt{2+y^2}\,dx=0$; b) $xy'=4\sqrt{x^2+y^2}+y$; c) $y'=\dfrac{3y-2x+1}{3x+3}$;

d) $y'-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{\ln x}{x},\quad y(1)=1$; e) $y'+2ycthx=y^2chx,\quad y(1)=1/sh1$.

10.1.29 a) $2xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx$; b) $3y'=\dfrac{y^2}{x^2}+10\dfrac{y}{x}+10$; c) $y'=\dfrac{6y-6}{5x+4y-9}$;

d) $y'-3x^2y=x^2(1+x^3)/3,\quad y(0)=0$; e) $2(y'+xy)=(x-1)e^xy^2,\quad y(0)=2$.

10.1.30 a) $2x+2xy^2+\sqrt{2-x^2}\,y'=0$; b) $xy'=4\sqrt{2x^2+y^2}+y$; c) $y'=\dfrac{x+6y-7}{8x-y-7}$;

d) $y'-y\cos x=\sin 2x,\quad y(0)=-1$; e) $y'-ytg\,x=-(2/3)y^4\sin x,\quad y(0)=1$.

РОЗДІЛ 11

ЧИСЛОВІ І ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

11.1. Числові ряди. Основні поняття. Необхідна ознака збіжності

Розглянемо послідовність чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$.

Вираз $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *числовим рядом*; a_n – *загальним членом ряду*.

Сума n перших членів ряду називається *n-ю частковою сумою* ряду $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Ряд називається *збіжним*, якщо існує скінченна границя послідовності його часткових сум: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Число S називають сумою ряду. Якщо границя послідовності часткових сум дорівнює нескінченності або взагалі не існує, то ряд *розбігається*. При розгляді числових рядів практично розв'язується дві задачі:

1) дослідити ряд на збіжність;

2) визначивши, що ряд збігається, знайти його суму.

Приклади. Користуючись визначенням, дослідити збіжність ряду та у випадку збіжності знайти його суму.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, тоді

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Очевидно, що границя послідовності часткових сум цього ряду існує і дорівнює 1:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1, \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Отже, ряд збігається і його сума дорівнює 1.

Приклад. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}$.

Розв'язання. Розкладемо загальний член ряду на найпростіші дроби:

$$a_n = \frac{24}{9n^2 - 12n - 5} = \frac{24}{(3n-5)(3n+1)} = \left\| (3n+1) - (3n-5) \equiv 6 \right\| =$$

$$= 4\frac{(3n+1)-(3n-5)}{(3n-5)(3n+1)} = \frac{4}{(3n-5)} - \frac{4}{(3n+1)}.$$

Таким чином, $a_n = 4\left(\frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n+1}\right)$.

Отже,

$$S_n = 4\left(1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{3n-11} - \frac{1}{3n-5} + \frac{1}{3n-8} - \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n+1}\right);$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 4\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 5.$$

Приклад. Ряд $1+1+\ldots+1+\ldots$ розбігається, тому що $S_n = n$ та $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$.

Приклад. Ряд $1-1+1-1+\ldots$ розбігається. Тут $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0, \ldots$, $S_{2n} = 0$, $S_{2n-1} = 1$ і т.д., тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує.

Приклад. Ряд *геометричної прогресії* $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$ $(a \neq 0)$ при $|q| < 1$ збігається, і його сума $S = \dfrac{a}{1-q}$; при $|q| \geq 1$ ряд розбігається.

Залишок ряду $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + \ldots$ для збіжного ряду при $n \to \infty$ наближається до 0.

Необхідна ознака збіжності ряду. Якщо ряд збігається, то його загальний член наближається до нуля, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Звідси випливає, що якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається. Якщо ж $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд може збігатися, а може і розбігатися.

Приклад. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$.

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$;

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = 0$, тобто виконується необхідна ознака збіжності ряду.

Проте ряд розбігається, оскільки $a_n = \ln(n+1) - \ln n$, то

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots + \ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n =$$
$$= \ln(n+1);$$

отже,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty.$

Можна показати, що *гармонічний* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ також розбігається, незважаючи на те, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

11.2. Достатні ознаки збіжності рядів з знакосталими членами

11.2.1. Ознаки порівняння

Теорема 1. (*ознака порівняння*). Нехай члени рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ додатні, й існує таке N, що при усіх $n > N$ $a_n \le b_n$. Тоді зі збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, і навпаки, із розбіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 2 (*гранична форма ознаки порівняння*). Нехай члени рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ додатні, й існує $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L\,(L \ne 0, L \ne \infty)$, тоді обидва ряди збігаються або розбігаються одночасно.

На практиці еталонами для порівняння виступають так званий узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, що збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \le 1$, а також ряд геометричної прогресії:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n - \begin{cases} \text{збігається, якщо } |q| < 1 \\ \text{розбігається, якщо } |q| \ge 1 \end{cases}.$$

Приклади. Дослідити збіжність рядів.

Приклад. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ розбігається, оскільки $\ln n < n, \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, але ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається $(p = 1)$.

Приклад. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+5)}$ збігається за першою ознакою порівняння, тому що $\frac{1}{(n+3)(n+5)}<\frac{1}{n^2}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається $(p=2>1)$.

Приклад. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3(n^4+1)}$ збігається, бо взявши $a_n=\frac{n+2}{3(n^4+1)}, b_n=\frac{1}{n^3}$, за граничною ознакою порівняння здобудемо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)n^3}{3(n^4+1)}=\frac{1}{3}$.

Відзначимо, що у всіх трьох прикладах виконується необхідна ознака збіжності ряду.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{arctg\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^2+n}}$.

Розв’язання. Загальний член ряду $a_n=\frac{arctg\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^2+n}}>0$. Очевидно, що a_n при $n\to\infty$ є нескінченно малою того ж порядку, що і $\frac{1}{n}$. Дійсно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{arctg\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^2+n}}\Big/\frac{1}{n}=\frac{\pi}{2}$, тоді за ознакою порівняння випливає розбіжність даного ряду, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

Розв’язання. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$ збігається, бо $p=\frac{5}{4}>1$. Оскільки при будь-якому додатному ε та $n\to\infty$ справедлива нерівність $\ln n<n^{\varepsilon}$, маємо: $\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}<\frac{n^{\varepsilon}}{n^{5/4}}=\frac{1}{n^{5/4-\varepsilon}}$. Виберемо ε з проміжку $0<\varepsilon<\frac{1}{4}$, наприклад $\varepsilon=\frac{1}{5}$,

$\frac{5}{4}-\varepsilon>1$, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$ збігається, тому що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/4-\varepsilon}}$ збігається.

Для порівняння можна, наприклад, вибрати ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/4-1/5}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{21}{20}}}$.

Приклад. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

Розв'язання. $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{2}{\sqrt{n}(n-1)}$.

Оскільки $\frac{2}{\sqrt{n}(n-1)}\underset{n\to\infty}{=}0^*\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ збігається, то первинний ряд теж збігається.

11.2.2. Ознака Даламбера

Нехай для знакосталого ряду існує границя частки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L,$$

тоді: при $L<1$ ряд збігається; при $L>1$ ряд розбігається; при $L=1$ ознака Даламбера непридатна.

На практиці ознаку Даламбера доцільно застосовувати до рядів, члени яких містять факторіали, показникові функції.

Зауваження. Якщо розбіжність ряду доведена за ознакою Даламбера, то $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$. Це ж стосується і радикальної ознаки Коші.

Приклади. Дослідити збіжність рядів.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2^n(n-1)}$.

Розв'язання. Обчислимо $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$; $a_n=\frac{n+3}{2^n(n-1)}$, $a_{n+1}=\frac{n+4}{2^{n+1}n}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)2^n(n-1)}{2^{n+1}n(n+3)}=\left\|\begin{matrix}(n+4)(n-1)\sim n^2\\ n(n+3)\sim n^2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=\frac{1}{2}=L<1.$$

Оскільки $L<1$, то відповідно до ознаки Даламбера ряд збігається.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Розв’язання. Обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$; $a_n=\frac{n^n}{n!}$; $a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!\,n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1,$$

ряд розбігається.

11.2.3. Радикальна ознака Коші

Нехай для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ з додатними членами існує

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L,$$

тоді: при $L<1$ ряд збігається; при $L>1$ ряд розбігається; при $L=1$ ознака непридатна.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

Розв’язання. Достатня ознака:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n^2}{3+5/n^2}=\frac{2}{3}<1.$$

За радикальною ознакою Коші ряд збігається. Перевірку необхідної ознаки збіжності в даному випадку можна було б і не робити.

Приклад. Довести: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0$.

Розв’язання. Розглянемо ряд із загальним членом $a_n=\frac{n^n}{(2n)!}$. Довівши його збіжність, внаслідок необхідної ознаки збіжності ряду одержимо дану рівність. Дійсно, за ознакою Даламбера ряд збігається, тому що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}=0<1,$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\right).$$

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

Розв’язання. За ознакою Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}\cdot\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)}{(3n+2)}=\frac{2}{3}<1\Rightarrow$$

ряд збігається.

11.2.4. Інтегральна ознака збіжності Коші

Якщо $f(x)$ є неперервною, монотонно спадною, невід′ємною на проміжку $[1;+\infty)$ функцією, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ і невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Розв’язання. Покладемо $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$. Функція $f(x)$ неперервна при $x\geq 2$, спадає зі зростанням x, $f(x)>0$ $\forall x\in[2;+\infty)$.

Перевіримо існування невласного інтеграла від цієї функції. За визначенням

$$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{2}^{A}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{2}^{A}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2}=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_{2}^{A}=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln A}+\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Отже, невласний інтеграл збігається, звідси випливає збіжність ряду.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\,(p>0)$.

Розв’язання. З умови виходить $f(x)=\frac{1}{x^p}>0\,(x\geq 1)$ – монотонно спадна функція. Розглянемо невласний інтеграл $(p\neq 0)$:

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{1}^{A}\frac{dx}{x^p}=\lim_{A\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{1-p}\Bigg|_{1}^{A}=\begin{cases}\frac{1}{p-1},\ p>1\\ \infty,\ p<1.\end{cases}$$

При $p=1$ маємо $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{1}^{A}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{A\to+\infty}\ln x\Big|_{1}^{A}=\infty$.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}-\begin{cases}\text{збігається при } p>1\\ \text{розбігається при } p\le 1.\end{cases}$

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2(2n+3)}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n=\frac{1}{(n+2)\ln^2(2n+3)}>0$.

Розглянемо ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+3)}$. За інтегральною ознакою збіжності Коші ряд збігається, тому що невласний інтеграл

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{(2x+3)\ln^2(2x+3)}=\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\int_2^{A}\frac{d\ln(2x+3)}{\ln^2(2x+3)}=\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left(\frac{-1}{\ln(2x+3)}\right)\Bigg|_2^{A}=\frac{1}{2\ln 7}$$

збігається.

Застосовуючи граничну ознаку порівняння, знаходимо:

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)\ln^2(2n+3)}{(n+2)\ln^2(2n+3)}=2$. Звідси випливає збіжність досліджуваного ряду.

11.3. Знакозмінні ряди. Абсолютна й умовна збіжність

Знакозмінним називається ряд, членами якого є дійсні числа довільного знака, наприклад,

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Знакозмінний ряд називається *знакопереміжним*, якщо будь-які два його сусідніх члени мають різні знаки, тобто ряд типу

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+..,\ a_n>0.$$

Теорема Лейбніця. Якщо елементи $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ знакопереміжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ утворюють монотонно спадну послідовність, що наближається до нуля, тобто якщо $a_n>a_{n+1}, \forall n\in N$ і $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, то ряд збігається, причому його сума додатна і менша ніж перший член ряду: $0<S<a_1$.

Висновок. Для знакопереміжного ряду, що задовольняє ознаку збіжності Лейбніця, залишок r_n за абсолютним значенням менше модуля

першого свого члена, тобто $|r_n| < a_{n+1}$,
де
$r_n = (-1)^{n+2} a_{n+1} + (-1)^{n+3} a_{n+2} + \ldots$

Теорема. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається, то знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається, та *умовно збіжним*, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбігається.

Приклад. Дослідити збіжність ряду. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+4}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n = \frac{n}{n^2+4}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+4}$. За ознакою Лейбніця маємо:

1) $\frac{n}{n^2+4} > \frac{n+1}{(n+1)^2+4}$ (перевірити самостійно); 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+4} = 0$.

Виходить, ряд збігається.

Складемо ряд з модулів членів даного ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$. Необхідна умова збіжності ряду виконується. Порівняємо ряд з розбіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, тоді за ознакою порівняння $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+4}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+4} = 1$, тобто ряд з абсолютних значень розбігається. Виходить, первинний ряд збігається умовно.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{5^n}$.

Розв’язання. Ряд збігається абсолютно, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ збігається, що можна перевірити, користуючись ознакою Даламбера.

Приклад. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Розв’язання. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Оскільки $\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}=0$, то первинний ряд збігається. Ряд, складений з абсолютних величин, поводиться так само, як ряд із загальним членом $\frac{1}{n}$, оскільки $1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{2n}$. Тому він розбігається. Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ збігається умовно.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,arctg\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{1}{n}$.

Розв’язання. Оскільки $arctg\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$, то $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{1}{n}$ збігається, звідки випливає абсолютна збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,arctg\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{1}{n}$.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{7n+3}$.

Розв’язання. Ряд розбігається, тому що не виконується необхідна умова збіжності ряду: $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{7n+3}=\frac{2}{7}\neq 0$.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(3n)}$

Розв’язання. Досліджуємо на абсолютну збіжність, тобто розглянемо ряд $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln(3n)}$; $\frac{1}{n\ln(3n)} \underset{n\to\infty}{=} 0^*\left(\frac{1}{3n\ln(3n)}\right)$. За інтегральною ознакою Коші ряд $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{3n\ln(3n)}$ (а отже, і ряд $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln(3n)}$) розбігається, тому що інтеграл $\int\limits_4^{\infty}\frac{dx}{3x\ln(3x)} = \frac{1}{3}\int\limits_4^{\infty}\frac{d(\ln 3x)}{\ln(3x)} = \frac{1}{3}\ln(\ln 3x)\Big|_4^{\infty} = \infty$, тобто розбігається. Абсолютної збіжності немає.

Ряд збігається умовно за теоремою Лейбніця, оскільки:

1) $\frac{1}{n\ln(3n)} > \frac{1}{(n+1)\ln 3(n+1)}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln(3n)} = 0$.

11.4. Функціональні ряди

Ряд, членами якого є функції змінної x, називається *функціональним* рядом

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

Множина значень змінної x, при яких ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається, називається *областю збіжності* функціонального ряду. В області збіжності ряду його сума є функцією x: $S = S(x)$. Для збіжного функціонального ряду $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Функціональний ряд називається *рівномірно збіжним* на відрізку $[a,b]$, якщо для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує таке $N(\varepsilon)$, що $\forall n > N, \forall x \in [a,b]$ справедливою є нерівність $|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Теорема Вейєрштрасса (*достатня ознака рівномірної збіжності функціонального ряду*). Якщо члени функціонального ряду $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ за абсолютним значенням не перевищують відповідних членів збіжного числового ряду з додатними членами $\forall x \in [a,b]$, то функціональний ряд збігається абсолютно і рівномірно на відрізку $[a,b]$. Інакше кажучи, якщо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ збігається, і $|u_n(x)| \le a_n$ $\forall x \in [a,b]$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ збігається, причому рівномірно, на відрізку $[a,b]$.

Приклад. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$.

Розв'язання. Ряд збігається рівномірно для всіх дійсних x, оскільки $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, а числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $(p=2>1)$ збігається.

11.4.1. Степеневі ряди

Степеневим рядом називається ряд типу

$$a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \tag{11.1}$$

$a_i = const$, $a = const$. Зокрема, якщо $a = 0$, то маємо ряд

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{11.2}$$

Ряд (11.1) приводиться до ряду (11.2) заміною $x - a = y$.

Теорема Абеля. 1) Якщо степеневий ряд (11.2) збігається при деякому значенні $x = x_0 \neq 0$, то він збігається, і, причому абсолютно, при всіх значеннях x, що задовольняють умову $|x| < |x_0|$.

2) Якщо степеневий ряд розбігається при деякому значенні $x = x_1$, то він розбігається і при всіх значеннях x таких, що $|x| > |x_1|$.

Звідси випливає існування інтервалу збіжності степеневого ряду $(-R;R)$. Іншими словами, ряд збігається при $|x| < R$, розбігається при $|x| > R$. У точках $x = \pm R$ потрібне додаткове дослідження для кожного конкретного ряду. Інтервал збіжності може вироджуватися в точку $R = 0$ або співпадати з усією віссю Ox: $R = \infty$. Радіус збіжності степеневого ряду знаходять за формулою $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ або $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Основні властивості степеневих рядів.

1. Усередині інтервалу збіжності сума степеневого ряду неперервна.

2. Степеневий ряд можна почленно інтегрувати і диференціювати будь-яке число разів усередині інтервалу збіжності. При цьому радіус збіжності отриманих степеневих рядів не змінюється.

Приклад. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{(n+2)3^n}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{2(n+1)}(n+2)3^n}{(n+3)3^{n+1}(x-1)^{2n}}\right| = \frac{(x-1)^2}{3}.$$

При $\frac{(x-1)^2}{3} < 1$ ряд збігається, тобто при $-\sqrt{3}+1 < x < 1+\sqrt{3}$ ряд збігається.

Перевіримо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності. При $x = \pm\sqrt{3}+1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm\sqrt{3})^{2n}}{(n+2)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$. Розбіжність ряду перевіряється порівнянням з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Таким чином, інтервал збіжності: $x \in (-\sqrt{3}+1; 1+\sqrt{3})$.

Приклад. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{n!}$.

Розв'язання. Для цього ряду $a_n = \frac{n^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Радіус збіжності ряду

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e},$$

при $|x| < \frac{1}{e}$ ряд збігається. Досліджуємо збіжність ряду в точках $x = \pm\frac{1}{e}$.

При $x = -\frac{1}{e}$ одержимо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(-1)^n}{n!e^n}$.

При великих n за формулою Стірлінга $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(-1)^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}e^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi n}}$. За теоремою Лейбніца цей ряд збігається. Оскільки збіжність ряду визначається поведінкою його загального члена при достатньо великих n, звідси випливає, що при $x = -\frac{1}{e}$ досліджуваний ряд збігається.

При $x=\frac{1}{e}$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(-1)^n}{n!e^n}$ розбігається, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}e^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ розбігається: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}=\underset{n\to\infty}{0^*}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $p=\frac{1}{2}<1$.

Отже, область збіжності: $\left[-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$.

Приклад. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n(x+3)^n}$.

Розв'язання. Покладемо $y=\frac{1}{x+3}$, одержимо степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^2+1\right)y^n}{5^n}$. Його радіус збіжності $R=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)}{5^n}\frac{5^{n+1}}{(n+1)^2+1}=5$. Звідси випливає збіжність первинного ряду при $|x+3|>\frac{1}{5}$. При $x+3=\frac{1}{5}$ маємо розбіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n\frac{1}{5^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+1\right)$, оскільки $\lim_{n\to\infty}\left(n^2+1\right)\neq 0$; при $x+3=-\frac{1}{5}$ ряд також розбігається. Область збіжності ряду $\in:\left(-\infty;-\frac{16}{5}\right)\cup\left(-\frac{14}{5};+\infty\right)$.

11.4.2. Ряд Тейлора. Застосування рядів у наближених обчисленнях

Ряд Тейлора має вигляд

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Зокрема, при $a=0$ маємо *ряд Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Запишемо розкладання основних елементарних функцій у ряд Маклорена:

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ x\in R$;

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + ..., \ x \in R;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., \ x \in R;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + ..., \ x \in (-1;1];$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ... \right), \quad |x| < 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} + ..., \ x \in [-1;1];$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + ..., \ |x| < 1.$$

Обчислення інтегралів за допомогою степеневих рядів.

Для обчислення $\int\limits_a^b f(x)dx$, межі інтегрування якого лежать усередині інтервалу збіжності ряду функції $f(x)$, розкладаємо функцію $f(x)$ в степеневий ряд і почленно інтегруємо його.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$.

Розв'язання. Розклавши функцію, що інтегрується, в степеневий ряд:

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + ...,$$

одержимо: $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{0,5} \left(1 - x^4 + x^8 - x^{12} + ...\right)dx = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^5 \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^9 \frac{1}{9} - ...$

Отриманий ряд є знакопереміжним. Якщо обмежитися двома першими членами ряду (при цьому абсолютна похибка менше a_3: $\left(\frac{1}{2}\right)^9 \frac{1}{9} \approx 0{,}0002$), то $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4} \approx 0{,}4938$.

Застосування рядів до розкриття невизначеностей при обчисленні границь

Приклад. Знайти границю: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+\ldots\right)}{x^2\left(x+\frac{x^2}{2}+\ldots\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{60}+\ldots}{x^3\left(1+\frac{x}{2}+\ldots\right)}=-\frac{1}{3}$$

Наближене обчислення значень функцій.

Приклад. Знайти наближене значення $\cos 10^\circ$ з точністю до 10^{-4}.

Розв’язання. Переводячи градусну міру в радіанну, одержимо:

$10^\circ \approx 0{,}1745$ радіан $\left(10^\circ=\frac{\pi}{18}\text{ радіан}\right)$.

Розкладаючи у степеневий ряд, одержимо: $\cos 10^\circ=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n}$. Цей ряд є знакопереміжним, тому, приймаючи за наближене значення $\cos 10^\circ$ суму перших двох членів розкладання, зробимо помилку, що дорівнює залишку r_2 та за абсолютним значенням є меншою третього члена:

$$|r_2|<\frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4<\frac{(0{,}2)^4}{24}<0{,}0001.$$

Виходить: $\cos 10^\circ \approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2\approx 1-\frac{1}{2}(0{,}1745)^2\approx 0{,}9948$.

Приклад. Обчислити $\sqrt[3]{130}$ з точністю до 0,0001.

Розв’язання. Використовуємо біноміальний ряд: $(1+x)^m$, тоді

$$\sqrt[3]{130}=\left(5^3+5\right)^{1/3}=5\left(1+\frac{1}{5^2}\right)^{1/3}=5+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1/3(-2/3)}{2!5^3}+\frac{1/3(-2/3)(1/3-2)}{3!5^5}+\ldots$$

Отриманий ряд є знакопереміжним, починаючи з другого члена і, виходить, похибка за теоремою Лейбніця від відкидання членів, починаючи з четвертого, за абсолютним значенням менша ніж $\frac{1}{3^4\cdot 5^4}<0{,}0001$.

Тому, зберігаючи тільки три члени розкладання, маємо:

$\sqrt[3]{130}\approx 5+0{,}0667-0{,}0009=5{,}0658$.

Приклад. Обчислити $\ln 3$ з точністю до $0{,}01$.

Розв’язання. Використаємо розкладання

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right),\quad |x|<1.$$

Знайдемо значення x з рівності $\frac{1+x}{1-x}=3\Rightarrow x=\frac{1}{2}$, що дає

$$\ln 3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3 3} + \frac{1}{2^5 5} + \ldots + \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)} + \ldots\right).$$

У цьому випадку ряд не є знакопереміжним, тому залишок ряду потрібно оцінити:

$$r_n = 2\left(\frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)} + \frac{1}{2^{2n+3}(2n+3)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{2}{2^{2n+1}}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2^2(2n+1)} + \frac{1}{2^4(2n+1)} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2}{2^{2n+1}(2n+1)}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots\right) = \frac{2}{2^{2n+1}(2n+1)} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3 \cdot 2^{2n-1}(2n+1)}.$$

Підберемо n таке, щоб залишок ряду $r_n < 0{,}01$. При $n = 2$ маємо:

$$r_2 = \frac{2}{3 \cdot 2^3 \cdot 5} = \frac{1}{60} > 0{,}01.$$

При $n = 3$: $r_3 = \dfrac{2}{3 \cdot 2^5 \cdot 7} = \dfrac{1}{16 \cdot 21} < 0{,}01.$

Виходить, достатньо обмежитися значенням $n = 3$, що дає

$$\ln 3 \approx 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 5}\right) = 1 + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5} = 1 + 0{,}08333 + 0{,}0125 \approx 1{,}096.$$

Розв'язання диференціальних рівнянь.

Теорема. Якщо коефіцієнти і права частина диференціального рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

розкладаються в степеневі ряди за степенями $x-a$, що збігаються в деякому околі $x=a$, то розв′язок цього рівняння, який задовольняє початкові умови

$$y(a) = y_0,\ y'(a) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)},$$

розкладається в степеневий ряд за степенями $x-a$, що збігається принаймні в меншому з інтервалів збіжності рядів для коефіцієнтів і правої частини диференціального рівняння.

Для наближеного розв'язання диференційного рівняння за допомогою степеневих рядів застосовують два способи: порівняння коефіцієнтів і послідовного диференціювання.

Спосіб порівняння коефіцієнтів полягає в наступному: розв′язок рівняння записують у вигляді степеневого ряду з невизначеними коефіцієнтами:

$$y = A_0 + A_1(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^n + \ldots$$

Потім з початкових умов визначають значення коефіцієнтів $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ Отриманий розв′язок підставляють у рівняння. Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $x-a$, знаходять інші коефіцієнти ряду.

Приклад. Знайти розв′язок диференціального рівняння $y''-xy=0$ при початкових умовах $y(0)=1, y'(0)=0$.

Розв'язання. Запишемо розв′язок рівняння у вигляді

$$y=A_0+A_1x+...+A_2x^2+...+A_nx^n+...$$

З початкових умов визначимо A_0 та A_1: $y(0)=1=A_0, y'(0)=0=A_1$.

Розв′язок $y=1+A_2x^2+A_3x^3+...$ підставляємо в рівняння:

$$2A_2+2\cdot 3A_3x+3\cdot 4A_4x^2+...-\left(x+A_2x^3+A_3x^4+...\right)=0,$$

звідки, порівнюючи коефіцієнти, одержимо:

$$2A_2=0, A_2=0;$$

$$2\cdot 3A_3=1,\ A_3=\frac{1}{2\cdot 3};\quad 3\cdot 4A_4=0,\ A_4=0;$$

$$4\cdot 5A_5=A_2,\ A_5=0;\quad 5\cdot 6A_6=A_3,\ A_6=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}.$$

Таким чином, $$y=1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+...$$

Знайдемо розв′язок рівняння методом послідовного диференціювання. Запишемо розв′язок рівняння у вигляді

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+...$$

За умовою $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Після підстановки в рівняння $x=0$ знаходимо: $y''(0)=0$.

Послідовно диференціюючи початкове рівняння, одержимо:

$$y'''=y+xy',\ y'''(0)=1;\quad y^{(4)}=2y'+xy'',\ y^{(4)}(0)=0;$$

$$y^{(5)}=3y''+xy''',\ y^{(5)}(0)=0;\quad y^{(6)}=4y'''+xy^{(4)},\ y^{(6)}(0)=4,$$

що після підстановки збігається з результатом методу невизначених коефіцієнтів.

11.5. Ряди Фур'є

11.5.1. Розкладання періодичних функцій у ряд Фур'є

Нехай $f(x)$ – дійсна функція дійсного аргумента *x*. Припустимо, що ця функція є періодичною з періодом *T*, тобто таким, що для усіх *x* справедлива рівність

$$f(x+T)=f(x).$$

Звідси виходить, що для вивчення функції $f(x)$ достатньо розглянути її на будь-якому інтервалі довжини *T*. За такий інтервал можна прийняти один із двох інтервалів $[0,T]$ або $[-T/2,T/2]$. З геометричного змісту визначеного інтеграла випливає, що для будь-якої періодичної функції $f(x)$ з періодом T

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int\limits_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx, \tag{11.3}$$

тобто інтеграли від $f(x)$ за будь-якими двома проміжками завдовжки T є однаковими для будь-яких значень α і β (рис. 11.1). (Перевірити дане твердження можна аналітично).

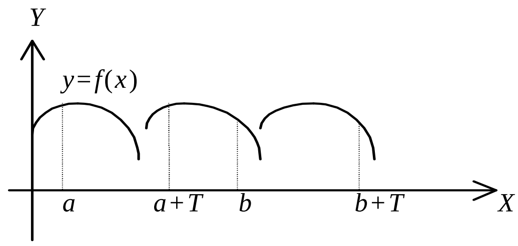


Рис. 11.1

Якщо функція $f(x)$ має період T, то $\varphi(x) = f(ax)$ має період T/a. Справді, $\varphi(x + T/a) = f(a(x + T/a)) = f(ax + T) = f(ax) = \varphi(x)$.

Наприклад, функції $y = \cos n\omega x$ або $y = \sin n\omega x$ є періодичними з періодом $T = \dfrac{2\pi}{n\omega}$. Загальний період системи тригонометричних функцій

$$1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \ldots, \cos\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x, \ldots \tag{11.4}$$

дорівнює $2l$ ($T = 2l$).

Періодичність суми тригонометричного ряду. Складемо тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi x}{l} + b_1\sin\frac{\pi x}{l} + a_2\cos\frac{2\pi x}{l} + b_2\sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots +$$

$$a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l} + \ldots = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right).$$

Сума n перших членів ряду подає часткову суму, тобто

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi x}{l} + b_1\sin\frac{\pi x}{l} + \ldots + a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Будь-яка часткова сума даного тригонометричного ряду також є періодичною з періодом $T = 2l$, тобто $S_n(x+2l) = S_n(x)$, тоді

$$S(x+2l) = \lim_{n\to\infty} S_n(x+2l) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x),$$

тобто сума ряду $S(x)$ має період $2l$. Звідси випливає доцільність застосування тригонометричних рядів при дослідженні періодичних функцій.

Нехай $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – функції, неперервні на відрізку $[a,b]$, тоді їхній *скалярний добуток* можна визначити як

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx.$$

Можна перевірити, що всі аксіоми скалярного добутку при цьому виконуються.

Нормою функції $\varphi(x)$ на відрізку $[a,b]$ називається квадратний корінь із (φ,φ), тобто $\|\varphi(x)\| = \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx}$.

Функція називається нормованою на $[a,b]$, якщо $\|\varphi\| = 1$.

Функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ називаються *ортогональними* на відрізку $[a,b]$, якщо $\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0$.

Скінченна або нескінченна система функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$, що інтегруються на відрізку $[a,b]$ і не дорівнюють тотожно нулю, називається *ортогональною системою* на цьому відрізку, якщо виконуються такі умови:

1) $\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0$, $i \neq j$ $(i = 1,2,\ldots; j = 1,2,\ldots)$; 2) $\int_a^b \varphi_i^2(x)dx \neq 0$.

Якщо $\int_a^b \varphi_i^2(x)dx = 1$, $(i = 1,2,\ldots)$, то система називається *ортонормованою*. Зокрема, система тригонометричних функцій (11.4) є ортогональною на *будь-якому* відрізку завдовжки $2l$, наприклад, на $[-l,l]$.

На підставі сталості інтеграла від періодичної функції на будь-якому проміжку, довжина якого дорівнює періоду функції, можна стверджувати, що система функцій (11.4) ортогональна на будь-якому відрізку вигляду $[a, a+2l]$. Крім того, $\forall n \in N$ є справедливим

$$\int_{-l}^{l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l, \quad \int_{-l}^{l} \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l, \quad \int_{-l}^{l} 1^2 dx = 2l. \tag{11.5}$$

Отже, тригонометрична система функцій ортогональна, але не нормована, при цьому $\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\| = \left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\| = \sqrt{l}$, $\|1\| = \sqrt{2l}$.

Нехай тригонометричний ряд збігається рівномірно до функції $f(x)$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right) \qquad (11.6)$$

на відрізку завдовжки $2l$. Тоді, інтегруючи ряд почленно, знайдемо:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx. \qquad (11.7)$$

Через те, що множення рівномірно збіжного ряду на обмежені функції $\cos\frac{n\pi x}{l}$, $\sin\frac{m\pi x}{l}$ не порушує його рівномірної збіжності, то помножуючи (11.6) почленно на $\cos\frac{n\pi x}{l}$ (потім на $\sin\frac{m\pi x}{l}$) та інтегруючи на проміжку $[-1,1]$, одержимо формули для коефіцієнтів a_k, b_k:

$$\begin{aligned} a_k&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx\ (k=0,1,2,\ldots);\\ b_k&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\ (k=1,2,\ldots).\end{aligned} \qquad (11.8)$$

При обчисленні цих коефіцієнтів були використані властивості ортогональності системи тригонометричних функцій і формули (11.5).

Тригонометричний ряд (11.6), коефіцієнти якого визначаються за формулами (11.8), називається *рядом Фур'є* функції $f(x)$, а коефіцієнти a_0, a_k, b_k $(k=1,2,\ldots)$ – коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$.

Те, що ряд (11.6) на $[-l,l]$ є для функції $f(x)$ її рядом Фур'є, ще не означає ні того, що цей ряд збігається до $f(x)$ на цьому проміжку, ні навіть того, що він взагалі на ньому збігається. Є декілька ознак збіжності рядів Фур'є до функції $f(x)$. Сформулюємо одну з них.

Теорема Діріхле (*достатня ознака розкладності функції в ряд Фур'є*). Якщо функція $f(x)$ має період 2 і на відрізку $[-l,l]$ неперервна або має скінченне число точок розриву 1-го роду і відрізок $[-l,l]$ можна розбити на скінченне число відрізків так, що усередині кожного з них $f(x)$ є монотонною, то ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається $\forall x$, причому в точках неперервності функції $f(x)$ сума ряду дорівнює $f(x)$, а у точках розриву функції $f(x)$ його сума дорівнює $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, тобто середньому арифметичному граничних значень ліворуч і праворуч.

Крім того, ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається рівномірно на будь-якому відрізку, що разом із своїми кінцями належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.

11.5.2. Ряди Фур'є для парних і непарних періодичних функцій

1) Нехай функція $f(x)$ є парною на відрізку $[-l,l]$, тоді $f(x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}$ теж є парною; графік її симетричний щодо осі ординат, і тоді

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx\ (k=0,1,2,\ldots).$$

Функція ж $f(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}$ буде непарною і

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=0.$$

Звідси випливає, що парна функція розкладається в ряд Фур'є, складений з одних косинусів, при цьому

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}\ \text{на}\ (-l,l),\quad f(x)-\text{парна},\tag{11.9}$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx\ (k=0,1,2,\ldots).$$

---

2) Аналогічно, якщо функція $f(x)$ є непарною, то вона розкладається в ряд по синусах:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\ \text{на}\ (-l,l),\ f(x)-\text{непарна},\tag{11.10}$$

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\ (k=1,2,\ldots).$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є періодичну ($T=2\pi$) функцію, задану на проміжку $(-\pi,\pi)$, як $f(x)=x$.

Розв’язання. Оскільки дана функція усередині відрізка є неперервною і монотонною, вона задовольняє умовам теореми Діріхле. Крім того, внаслідок непарності коефіцієнти $a_k=0$ $(k=0,1,2,\ldots)$. Складемо тригонометричний ряд Фур'є, для чого обчислимо b_k, вважаючи $l=\pi$:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx dx = \left| \begin{matrix} u = x du = dx \\ dv = \sin kx dx \\ v = -\frac{\cos kx}{k} \end{matrix} \right| = \frac{2}{\pi}\left(x\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}\cos k\pi + \frac{1}{k^2}\sin kx\Bigg|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{k}(-1)^{k+1},$$

оскільки $\cos k\pi = (-1)^k$, $\sin k\pi = 0$.

Отже, на інтервалі $(-\pi, \pi)$

$$x \underset{(-\pi;\pi)}{=} 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k} + \ldots\right). \qquad (11.11)$$

Ця рівність правильна лише при $-\pi < x < \pi$.

У точках сума ряду за теоремою Діріхле дорівнює , тобто $S(\pi) = S(-\pi) = S(\pm 3\pi) = S(\pm 5\pi) = \ldots = 0$.

У силу -періодичності суми S(x) ряду (11.5.9) графік цієї суми має вигляд, зображений на рис. 11.5.2.

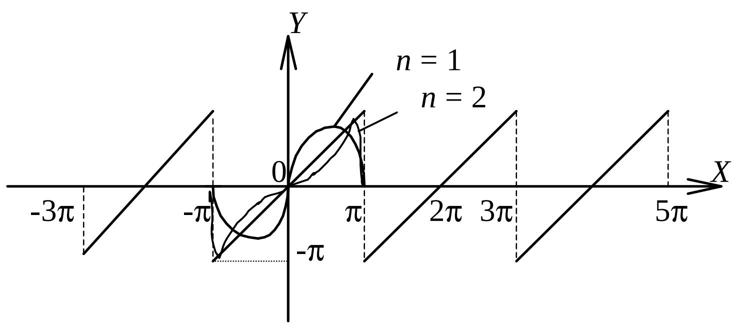


Рис. 11.2

Обмежившись одним членом ряду (11.11), тобто при $n = 1$, одержимо $x \underset{(-\pi;\pi)}{\approx} 2\sin x = S_1(x)$; при $n = 2$ знаходимо: $x \underset{(-\pi;\pi)}{\approx} 2\sin x - \sin 2x = S_2(x)$, що зображено на рис. 11.2.

Зауважимо, що сума $S(x)$ є розривною функцією, хоча всі члени ряду неперервні (у точках розриву $S(x)$ порушена рівномірна збіжність ряду).

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $y = |\cos x|$. Користуючись цим розкладанням, обчислити суми рядів $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}$ і $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2 - 1}$.

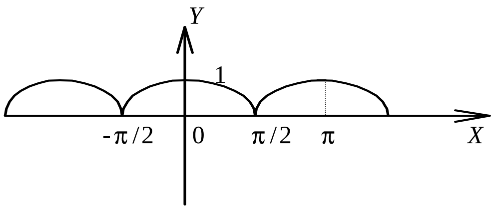


Рис. 11.3

Розв’язання. Функція – парна, має період $T=\pi$, тоді $l=\frac{\pi}{2}$. Функція неперервна на відрізку $\left[-\pi/2;\pi/2\right]$ і задовольняє умови теореми Діріхле. Коефіцієнти $b_k=0\ (k=1,2,\ldots)$,

$$a_k=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\cos\frac{k\pi x}{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\cos 2kxdx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\cos(2k-1)xdx+\int_0^{\pi/2}\cos(2k+1)xdx\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1}+\frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\sin(\pi/2-k\pi)}{2k-1}+\frac{\sin(\pi/2+k\pi)}{2k+1}\right)=\frac{2}{\pi}(-1)^k\frac{-2}{4k^2-1}=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1},$$

$(k=1,2,\ldots)$.

Знайдемо: $a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos xdx=\frac{4}{\pi}$, виходить:

$$|\cos x|\underset{[-\pi/2;\pi/2]}{=}\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx.$$

Вважаючи $x=\frac{\pi}{2}$, знайдемо: $0=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(-1)^k}{4k^2-1}$; звідси маємо:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}.$$

При $x=0$ одержимо: $1=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}$, звідки: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}=\frac{\pi-2}{4}$.

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є періодичну ($T=2\pi$) функцію, задану на відрізку $[-\pi, \pi]$ як

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi \le x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{\pi} & \text{при } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

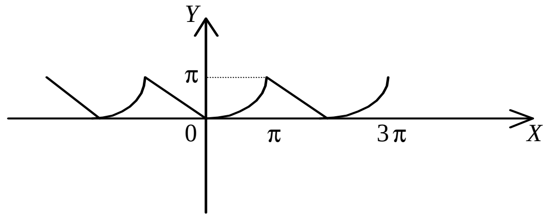


Рис. 11.4

Розв’язання. Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx + \frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{\pi} x^2 dx = \frac{5}{6}\pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0} x\cos kx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos kx dx\right).$$

Маємо: $$\int_{-\pi}^{0} x\cos kx dx = \left|\begin{array}{l} u = x du = dx \\ dv = \cos kx dx \\ v = \dfrac{1}{k}\sin kx \end{array}\right| = \frac{x}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin kx dx =$$

$$= \frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{-(-1)^k + 1}{k^2};$$

$$\int_{0}^{\pi} x^2 \cos kx dx = \left|\begin{array}{l} u = x^2 du = 2x dx \\ dv = \cos kx dx \\ v = \dfrac{1}{k}\sin kx \end{array}\right| = \frac{x^2}{k}\sin kx\Big|_{0}^{\pi} - \frac{2}{k}\int_{0}^{\pi} x\sin kx dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} u = x du = dx \\ dv = \sin kx dx \\ v = -\dfrac{\cos kx}{k} \end{array}\right| = -\frac{2}{k}\left(-x\frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\cos kx dx\right) =$$

$$=-\frac{2}{k}\left(\frac{-(-1)^k\pi}{k}+\frac{1}{k^2}\sin kx\Big|_0^\pi\right)=\frac{2\pi}{k^2}(-1)^k.$$

Виходить: $a_k=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^k-1}{k^2}+\frac{2}{k^2}(-1)^k\right)=\frac{3(-1)^k-1}{\pi k^2}.$

Аналогічно:

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}x\sin kxdx+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin kxdx\right)=\frac{2\left((-1)^k-1\right)}{\pi^2k^3},$$

тобто $b_k=\begin{cases}0, & \text{якщо } k \text{ парне}\\ -\frac{4}{\pi^2k^3}, & \text{якщо } k \text{ непарне.}\end{cases}$

Отже, розкладання функції в ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{5}{12}\pi+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3(-1)^k-1}{\pi k^2}\cos kx-\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\sin(2k-1)x\right).$$

11.5.3. Періодичне продовження і розкладання в ряд Фур'є неперіодичної функції

Нехай неперіодична функція $f(x)$, графік якої наведено на рис. 11.5 суцільною лінією, цікавить нас лише на інтервалі (a,b).

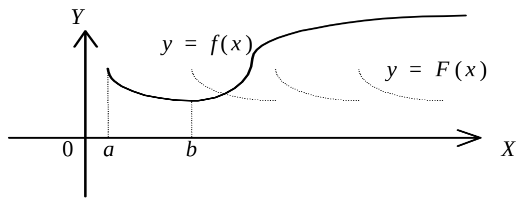


Рис. 11.5

Побудуємо періодичну функцію $F(x)$ із періодом $T\geq b-a$, що збігається з $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Геометрично для цього потрібно виконати перенесення графіка функції $f(x)$ паралельно осі OX праворуч і ліворуч на відстані $T, 2T,..., nT,...$ (рис. 11.5). Цей процес називається періодичним продовженням функції $f(x)$ за межі відрізка $a\leq x\leq a+T=b$ з періодом $T=b-a$, $l=\frac{b-a}{2}$.

Якщо $f(x)$ задовольняє умови теореми Діріхле, то і $F(x)$ їх теж задовольняє і, отже, може бути подана у вигляді ряду Фур'є. Через збіг $f(x)$

та $F(x)$ на $[a,b]$ отриманий ряд і буде рядом Фур'є неперіодичної функції $f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

У точках неперервності функції $F(x)$ маємо:

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx (k = 1,2,\ldots), l = \frac{b-a}{2},$$

$$f(x) \underset{(a,b)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

При цьому, якщо $f(a) = f(b)$, на кінцях інтервалу (a,b) періодично продовжена функція $F(x)$ розривів не має (рис. 11.6).

У точках розриву $f(x)$ усередині інтервалу (a,b) і на кінцях інтервалу (якщо $f(a) \neq f(b)$) сума ряду дорівнює півсумі односторонніх границь функції $f(x)$, тобто

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}; \text{ при } x \in (a,b);$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{f(a+0) + f(b-0)}{2}; \text{ при } x = a;\ x = b,$$

$$\left(l = \frac{b-a}{2}\right).$$

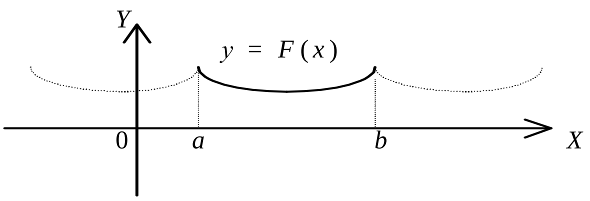


Рис. 11.6

Якщо $f(a) \neq f(b)$, на кінцях інтервалу (a,b) маємо розриви 1-го роду; оскільки функція $F(x)$ – періодична, за її значення в точках розриву a і b можна взяти однакові значення, які дорівнюють середньому арифметичному граничних значень $\frac{1}{2}\left(f(a+0) + f(b-0)\right)$, що збігається з сумою ряду Фур'є (рис. 11.7).

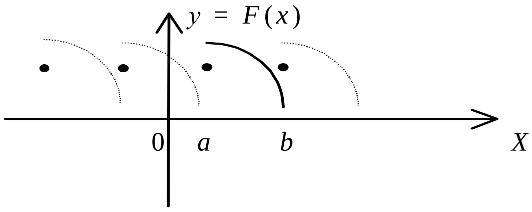


Рис. 11.7

Вважаючи також у точках розриву $f(x)$ значення функції рівним середньому арифметичному граничних значень $\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)$, одержуємо, що періодична функція $F(x)$ – це сума ряду Фур'є, що збігається з $f(x)$ на $[a,b]$. Графік суми ряду Фур'є є сукупністю кривих та ізольованих точок.

Приклад. Зобразити $f(x)=x^2$ рядом Фур'є в (1; 3) (рис. 11.8).

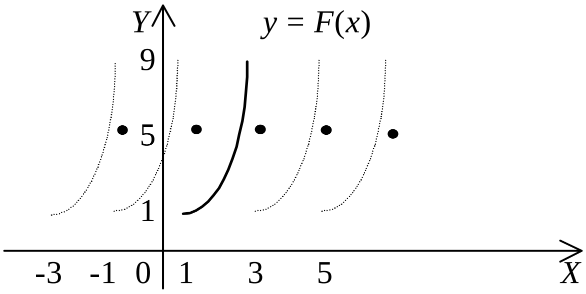


Рис. 11.8

Розв’язання. Період $T=2l=3-1=2,\ l=1;$ у точках розриву $x=2k+1,(k=0,1,2,...)$ сума тригонометричного ряду дорівнює $\frac{1}{2}(1^2+3^2)=5$, що можна прийняти і як значення функції $F(x)$.

Знаходимо: $a_k=\int\limits_1^3 f(x)\cos k\pi x dx=$

$$=\int\limits_1^3 x^2\cos k\pi x dx=\left|\begin{array}{l} u=x^2\ du=2xdx \\ dv=\cos k\pi x dx \\ v=\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x \end{array}\right|=\frac{x^2\sin k\pi x}{k\pi}\Bigg|_1^3-\int\limits_1^3\frac{\sin k\pi x}{k\pi}2xdx=$$

$$=\begin{vmatrix} u = x du = dx \\ dv = \sin k\pi x dx \\ v = -\dfrac{\cos k\pi x}{k\pi} \end{vmatrix} = \frac{2x\cos k\pi x}{(k\pi)^2}\Bigg|_1^3 + \frac{2}{(k\pi)^2}\int_1^3 \cos k\pi x dx = \frac{2}{(k\pi)^2}(3\cos k\pi \cdot 3 -$$

$$-\cos k\pi) = \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2}, \text{ де } \sin 3k\pi = \sin k\pi = 0; \cos k\pi = \cos 3k\pi = (-1)^k,$$

$$\int_1^3 \cos k\pi x dx = 0;\ a_0 = \int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}.$$

Аналогічно обчислюються коефіцієнти b_k:

$$b_k = \int_1^3 f(x)\sin k\pi x dx = 8\frac{(-1)^k}{k\pi}.$$

Одержимо розкладання в ряд Фур'є:

$$x^2 \underset{(1;3)}{=} \frac{13}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\cos k\pi x}{k^2\pi^2} - 2\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right).$$

Скориставшись значенням суми $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, одержимо, наприклад, при $x = 1$ суму ряду Фур'є, яка дорівнює 5:

$$S(1) = \frac{13}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k \cos k\pi}{k^2\pi^2} = \frac{13}{3} + \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{13}{3} + \frac{2}{3} = 5,$$

що збігається з середнім арифметичним односторонніх границь: $\frac{1}{2}\left(x^2\Big|_{x=1} + x^2\Big|_{x=3}\right) = \frac{1}{2}(1+9) = 5.$

11.5.4. Розкладання в ряд Фур'є функцій, заданих на відрізку $[0,l]$

При практичному використанні рядів Фур'є як проміжок, на якому нас цікавить поводження функції, зручно взяти $[0,l]$, тобто $a = 0$, $b = l$. Поставимо задачу побудови ряду Фур'є для функції, заданої на $[0,l]$.

Поза відрізком $[0,l]$ поводження функції для нас не має значення. Таким чином, проміжок $[0,l]$ можна вважати періодом, проте в цьому випадку необхідно обчислювати коефіцієнти a_k і b_k, тобто будувати повний ряд Фур'є.

Задачу розкладання в ряд Фур'є можна розв’язати і так: виберемо довільну функцію на відрізку $[-l,0]$ і визначимо на всьому відрізку $[-l,l]$

деяку функцію

$$F(x)=\begin{cases} f(x),\ x\in[0,l] \\ g(x),\ x\in[-l,0) \end{cases}.$$

Функція $F(x)$ визначена в інтервалі завдовжки $2l$; розкладається у свій ряд Фур'є на відрізку $[-l,l]$, за винятком, можливо, точок $x=\pm l,\ x=0$ і точок розриву функцій $f(x)$ і $g(x)$.

Однак перевага віддається найчастіше парному або непарному продовженню функції на проміжок $[-l,0)$, коли утворюється розкладання в неповний ряд Фур'є.

а) Продовжимо функцію парним способом на проміжок $[-l,0)$, вважаючи $f_1(x)=\begin{cases} f(x),\ x\in[0,l] \\ f(-x),\ x\in[-l,0) \end{cases}$ (рис. 11.9), тоді $b_k=0\ (k=1,2,...)$;

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ \ (k=0,1,2,...);$$

$$f(x)\underset{[0,l]}{=}\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

При $x=0$ та $x=l$ даний ряд збігається відповідно до $f(0+0)$ і до $f(l-0)$.

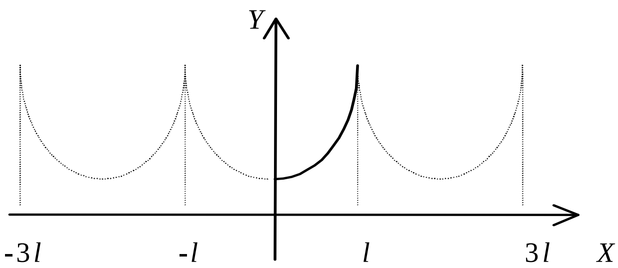


Рис. 11.9

б) При непарному продовженні (рис. 11.10) вважаємо:

$f_1(x)=\begin{cases} f(x), x\in[0,l] \\ -f(-x), x\in[-l,0) \end{cases}$, тоді $a_k=0\ (k=0,1,2,...)$;

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ (k=1,2,...).$$

При непарному продовженні в точках $x=0$ та $x=l$ сума тригонометричного ряду дорівнює 0 і сам ряд має вигляд

$$f(x)\underset{[0,l]}{=}\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

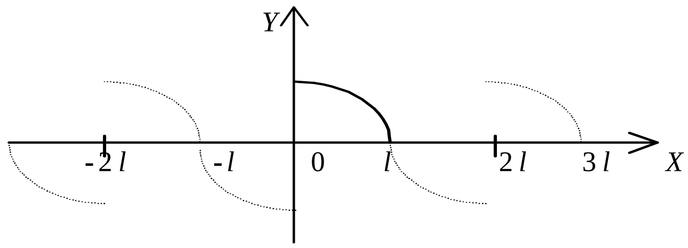


Рис. 11.10

Відзначимо, що при різних аналітичних виразах функції $f_1(x)$ на $[-l,0)$ і на проміжку $(0,l)$, ми одержуємо різні аналітичні вирази однієї і тієї ж функції $f(x)$: або у вигляді ряду косинусів, або у вигляді ряду синусів, або у вигляді повного ряду Фур'є.

Теорема. Функцію $f(x)$, що задана і диференцюється на $(0,l)$, можна нескінченною множиною способів розкласти в тригонометричний ряд.

Можливість вибору продовження функції дозволяє, наприклад, побудувати ряд, у якому амплітуди гармонік спадають швидше, або ряд, коефіцієнти якого обчислюються простіше.

Приклад. Розкласти за косинусами функцію $f(x) = 2x$, задану на [0,3] (рис. 11.11).

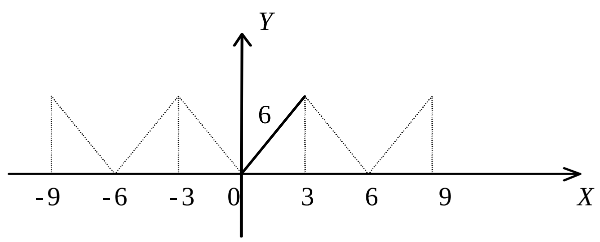


Рис. 11.11

Розв’язання. На проміжок [-3,0] функція продовжується парно, виходить, $b_k = 0\ (k = 1,2,...)$, $l = 3$, період $T = 6$. Маємо:

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 2x dx = \frac{2}{3}x^2\Big|_0^3 = 6;\ \frac{a_0}{2} = 3;$$

$$a_k = \frac{2}{3}\int_0^3 2x\cos\frac{k\pi x}{3}dx = \frac{3\cdot 4}{k\pi\cdot 3}\int_0^3 x d(\sin\frac{k\pi x}{3}) =$$

$$= \frac{4}{k\pi}\left(x\sin\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3 - \int_0^3 \sin\frac{k\pi x}{3}dx\right) = \frac{4}{k\pi}\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3 = \frac{12}{k^2\pi^2}(\cos k\pi - 1) =$$

$$= \frac{12}{k^2\pi^2}\left((-1)^k - 1\right);$$

$$2x \underset{[0;3]}{=} 3+\frac{12}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^k-1\right)\frac{1}{k^2}\cos\frac{k\pi x}{3} = 3+\frac{12}{\pi^2}(-2\cos\frac{\pi x}{3}-\frac{2}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{3}-$$

$$-\frac{2}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{3}-\ldots-\frac{2}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{3}-\ldots) = 3-\frac{24}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x/3}{(2k+1)^2}.$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}1, x\in[0;1]\\ 2-x, x\in[1;2]\end{cases}$ (рис. 11.12).

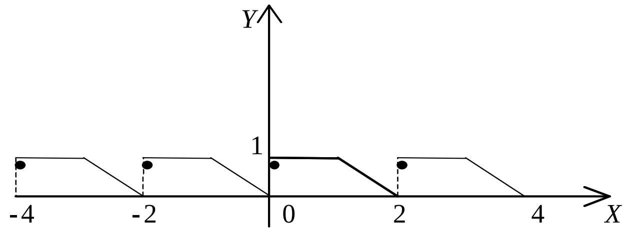


Рис. 11.12

Розв'язання. Маємо: $l=1,\ T=2l=2$.

$$a_0=\int_0^1 dx+\int_1^2(2-x)dx = x\Big|_0^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = 1+4-2-2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2};$$

$$a_k=\int_0^1\cos k\pi x dx-\int_1^2(x-2)\cos k\pi x dx=\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{k\pi}\int_1^2(x-2)d(\sin k\pi x)=$$

$$=-\frac{1}{k\pi}\left((x-2)\sin k\pi x\Big|_1^2-\int_1^2\sin k\pi x dx\right)=\frac{-1}{(k\pi)^2}(1-\cos k\pi)=\frac{\left((-1)^k-1\right)}{k^2\pi^2};$$

$$b_k=\int_0^1\sin k\pi x dx-\int_1^2(x-2)\sin k\pi x dx=\frac{-1}{k\pi}\int_0^1 d(\cos k\pi x)+$$

$$+\frac{1}{k\pi}\int_1^2(x-2)d(\cos k\pi x)=\frac{-1}{k\pi}\cos k\pi x\Bigg|_0^1+\frac{1}{k\pi}\left((x-2)\cos k\pi x\Big|_1^2-\int_1^2\cos k\pi x dx\right)$$

$$=\frac{-1}{k\pi}(\cos k\pi-1)+\frac{1}{k\pi}(\cos k\pi)=\frac{1}{k\pi},\quad \text{де}\ \int_1^2\cos k\pi x dx=0.$$

Отже, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{((-1)^k-1)\cos k\pi x}{k^2}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin k\pi x}{k},\ x\in(0;2).\\ \dfrac{1}{2},\quad x=0;\ x=2.\end{cases}$

Контрольні завдання до розділу 11

Завдання 1. Дослідити збіжність числових рядів:

11.1.1. $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)n}}$;

11.1.2. $u_n=\dfrac{1}{n(10n+1)}$;

11.1.3. $u_n=\dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$;

11.1.4. $u_n=\dfrac{1}{(n+1)^2-1}$;

11.1.5. $u_n=\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

11.1.6. $u_n=\dfrac{n^2}{2n^2+1}$;

11.1.7. $u_n=\dfrac{n}{n^2+1}$;

11.1.8. $u_n=\left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$;

11.1.9. $u_n=\dfrac{n}{6n-5}$;

11.1.10. $u_n=\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$;

11.1.11. $u_n=\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n$;

11.1.12. $u_n=\dfrac{(n+1)^5}{2n+1}$;

11.1.13. $u_n=\dfrac{n}{2n^3+1}$;

11.1.16. $u_n=\left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n$;

11.1.17. $u_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$;

11.1.18. $u_n=\dfrac{1}{(2n-1)^2}$;

11.1.19. $u_n=\dfrac{n^5}{2^n+3^n}$;

11.1.20. $u_n=\dfrac{1}{n\ln n}$;

11.1.21. $u_n=\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$;

11.1.22. $u_n=\dfrac{1}{2n^2-1}$;

11.1.23. $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$;

11.1.24. $u_n=\dfrac{2^n}{5^n+1}$;

11.1.25. $u_n=\dfrac{4^n}{(2^n+1)^2}$;

11.1.26. $u_n=\dfrac{2n-1}{3^n}$;

11.1.27. $u_n=\dfrac{2^{n-1}}{n^n}$;

11.1.28. $u_n=\dfrac{n+1}{n^2+n+1}$;

11.1.14. $u_n = \frac{1}{n2^n}$;

11.1.15. $u_n = \frac{1}{3n^2 - 2}$;

11.1.29. $u_n = \frac{2^n + 1}{5^n + 1}$;

11.1.30. $u_n = (\frac{n}{2n-1})^{2n}$.

Завдання 2. Дослідити збіжність числових рядів:

11.2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}$;

11.2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} tg\, \frac{\pi}{2^n} \cdot n!$;

11.2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{3^n \sqrt[4]{n^3}}$;

11.2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2(n+1))!}{4^n (n+1)!}$;

11.2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$;

11.2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+2)!}{\sqrt[3]{2^n + 1}}$;

11.2.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} \sqrt[3]{n^2 + 4}}{(n+2)!}$;

11.2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(3n-1)!}$;

11.2.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{(3n)!}$;

11.2.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n!)^2}$;

11.2.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n^2 + 2)}{(2n)!}$;

11.2.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^n}$;

11.2.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n!} tg\, \frac{3}{2^n}$;

11.2.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{5^n n!}$;

11.2.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+1)!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$;

11.2.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{(2n+1)!}$;

11.2.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[4]{n+1}}{4^n + 3}$;

11.2.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n^3}{(2n+3)!}$;

11.2.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{8 \cdot 11 \cdot 14 \cdots (3n+5)}$;

11.2.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n (3+n)!}$;

11.2.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$;

11.2.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)^n}$;

11.2.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2^n + 1)(3n)!}$;

11.2.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{2^n (2n+3)!}$;

11.2.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{2n}}{(3n+1)!}$;

11.2.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2(n+1))!} \sin \frac{1}{6^n}$;

11.2.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{5^n\cdot 2n!}$;

11.2.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)}{2^{n^2}}$;

11.2.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,\frac{2}{n^2}}{n!}$;

11.2.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}\left(n^3+3\right)}{(2+n)!}$.

Завдання 3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

11.3.1. $u_n=\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$;

11.3.2. $u_n=\frac{3^n n!x^n}{(n+1)^2}$;

11.3.3. $u_n=\frac{(x-3)^n(3n-2)}{(n+1)^2 2^{n+1}}$;

11.3.4. $u_n=\frac{nx^{2n}}{2^n(n+1)}$;

11.3.5. $u_n=\frac{(-1)^n\sqrt[3]{n}(x-2)^n}{(n+1)}$;

11.3.6. $u_n=\frac{x^n 2^n}{\sqrt{3^n(2n-1)}}$;

11.3.7. $u_n=\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$;

11.3.8. $u_n=\frac{x^{n+1}9^n}{n+1}$;

11.3.9. $u_n=\frac{(x+2)^n(2n-1)^n}{2^n n^n}$;

11.3.10. $u_n=\frac{x^{2n-1}2^{n-1}}{(4n-3)^2}$;

11.3.11. $u_n=\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$;

11.3.12. $u_n=\frac{x^{4n}}{(n+2)5^n}$;

11.3.13. $u_n=\frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

11.3.16. $u_n=\frac{(n+1)^{n/3}x^n}{n!}$;

11.3.17. $u_n=\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$;

11.3.18. $u_n=\left(\frac{x\cdot n}{2n+1}\right)^{2n-1}$;

11.3.19. $u_n=\frac{nx^{2n}}{(5n+2^n)(n+1)}$;

11.3.20. $u_n=\frac{(n+1)^5x^{2n}}{(2n+1)}$;

11.3.21. $u_n=\frac{7^n x^n}{5^n+3^n}$;

11.3.22. $u_n=\frac{(-1)^{n-1}(x-5)^n}{n3^n}$;

11.3.23. $u_n=\frac{(n+1)x^n}{(n+2)+3^n}$;

11.3.24. $u_n=\frac{3^n x^n}{\sqrt{(2n-1)2^n}}$;

11.3.25. $u_n=\frac{5^n x^n}{n2^n}$;

11.3.26. $u_n=\frac{x^{2n}}{(n+1)n}$;

11.3.27. $u_n=\frac{5^n x^{4n}\sqrt{n}}{4^n}$;

11.3.28. $u_n=\frac{x^{3n}n}{(n+1)7^n}$;

11.3.14. $u_n = \frac{(n+1)x^n}{(n^2+1)2^n}$; 11.3.29. $u_n = \frac{nx^{5n}}{3n+2}$;

11.3.15. $u_n = \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^{2n}}{2n3^n}$; 11.3.30. $u_n = \frac{(x-1)^n n^2}{(n+1)2^n}$.

РОЗДІЛ 12
КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

12.1. Подвійні інтеграли і їх обчислення у декартовій системі координат

Нехай у замкнутій обмеженій області *D* задана обмежена функція *f(x,y)*. Розіб'ємо область *D* на *n* елементарних областей, площі яких позначимо $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ... \Delta\sigma_n$. У кожній частині $\Delta\sigma_k$ виберемо довільно точку (ξ_k, η_k) й складемо суму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k ,$$

яку будемо називати *інтегральною сумою*. Під діаметром області будемо розуміти найбільшу відстань між двома точками цієї області. Позначимо через λ найбільший з діаметрів областей $\Delta\sigma_k$ ($k = \overline{1,n}$).

Якщо існує границя інтегральної суми $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$ при $\lambda \to 0$, що не залежить від способу розбиття області *D* на елементарні частини й вибору точок $M_k(\xi_k, \eta_k) \in \Delta\sigma_k$, то він називається *подвійним інтегралом* від функції *f(x,y)* по області *D* і позначається

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)d\sigma .$$

Подвійний інтеграл обчислюється зведенням його до повторного.

12.1.1. Правила знаходження меж інтегрування в повторному інтегралі:

1. Область інтегрування *D* проектується, наприклад, на відрізок *[a, b]* осі *OX:* $a \le x \le b$. Числа *a* й *b* будуть, відповідно, нижньою й верхньою межами інтегрування в зовнішньому інтегралі.

2. Щоб знайти межі інтегрування у внутрішньому інтегралі, відзначимо на контурі *L*, що обмежує область *D* , точки *A* і *B* з абсцисами *a* і *b*. Ці дві точки розділяють контур *L* на нижню й верхню частини, рівняння яких потрібно розв'язати відносно *y*. Нехай ці частини визначаються, відповідно, рівняннями $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$, причому на відрізку *[a, b]* функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні, однозначні й зберігають аналітичний вираз. Візьмемо на відрізку *[a, b]* осі *OX* будь-яку точку *x*, проведемо через неї пряму паралельну осі *oy*, що перетне контур *L* у точці M_1 (точка входу в область *D*) і в точці M_2(точка виходу з області *D*) $y_1(x) \le y \le y_2(x)$.

Зауваження. При проектуванні області *D* на вісь *OY* змінна *y* змінюється в межах від *c* до *d*. Точки *E* і *C* розбивають контур на дві частини: праву і ліву, рівняння яких мають вигляд: $x=x_2(y)$ і $x=x_1(y)$ відповідно, при цьому $x_1(y) \le x \le x_2(y)$.

Тоді, $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, (12.1.1)

або $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$. (12.1.2)

Рис. 12.1

У внутрішньому інтегралі межі інтегрування в загальному випадку є функції тієї змінної, по якій обчислюється зовнішній інтеграл і яка при обчисленні внутрішнього інтеграла залишається постійною.

В окремому випадку області інтегрування, у прямокутнику , обмеженому прямими, паралельними осям координат, межі інтегрування у внутрішньому й зовнішньому інтегралах формул 12.1. 1 й 12.1. 2 будуть постійними, тобто:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \qquad (12.1.3)$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \qquad (12.1.4)$$

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області *D*, то значення повторного інтеграла не залежить від порядку інтегрування. При цьому для зменшення об'єму обчислювальної роботи варто вибирати, якщо це можливо, такий порядок інтегрування, при якому не доводиться розбивати область інтегрування на частини.

Приклад 1. Привести до повторного (двома способами) подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$, якщо область *D* обмежена прямими: *y=0, y=x, x=a*.

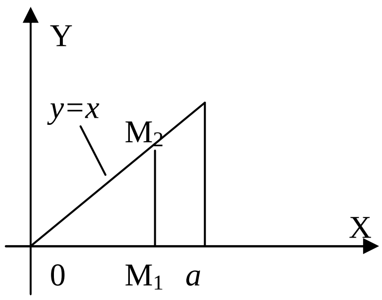


Рис. 12.2

Розв'язання.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^a dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x,y)dx$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \iint_d (3x^2y + 4xy^3)dxdy$, де *D*: *1≤x≤2, 3≤y≤4.*

Розв'язання.

За формулою (12.1.3) маємо:

$$\int_1^2 dx \int_3^4 (3x^2y + 4xy^3)dy = \int_1^2 (3x^2\frac{y^2}{2} + xy^4)\Big|_{y=3}^{y=4} dx = \int_1^2 \left((24x^2 + 256x) - (\frac{27}{2}x^2 + 81x)\right)dx =$$

$$\int_1^2 \left(\frac{21}{2}x^2 + 175x\right)dx = 287 .$$

Скористаємося тепер формулою (12.1.4), тобто інтегруємо спочатку по *x*, а потім по *y*. Одержимо:

$$\int_3^4 dy \int_1^2 (3x^2y + 4xy^3)dx = \int_3^4 (x^3y + 2x^2y^3)\Big|_{x=1}^{x=2} dy = \int_3^4 \left((7y + 6y^3\right)dy = 7\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y^4\Big|_3^4 = 287.$$

12.1.2. Зміна порядку інтегрування

При зміні порядку інтегрування прагнуть: а) якщо можливо, вибрати такий порядок інтегрування, при якому область інтегрування не розбивається на частини; б) одержати простіший для обчислення повторний інтеграл.

По межах інтегрування визначають область D. Так, для інтеграла

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, покладаючи $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$ одержимо рівняння ліній, що обмежують область D: $x=a$, $x=b$, $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$.

Потім інтегруємо в іншому порядку.

Приклад 3. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі.

$$I = \int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy \, (a>0).$$

Відновимо область інтегрування, задану нерівностями:

$0 \le x \le 2a, \sqrt{2ax-x^2} \le y \le \sqrt{2ax}$. Маємо

$$\left\| \begin{array}{c} y = \sqrt{2ax - x^2} \Rightarrow x = a \pm \sqrt{a^2 - y^2}; \\ y = \sqrt{2ax} \Rightarrow x = \dfrac{y^2}{2a} \end{array} \right\| .$$

Область інтегрування зображена на рис.12.3. Дуга кола ОА *має рівняння:* $x = a - \sqrt{a^2 - y^2}$; дуга кола AB: $x = a + \sqrt{a^2 - y^2}$;

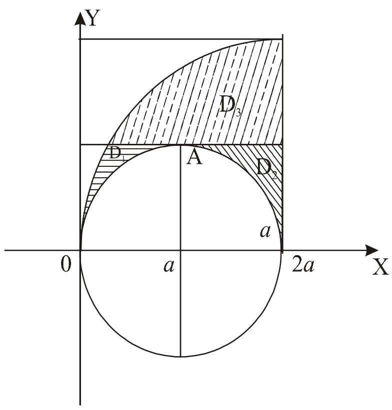


Рис. 12.3

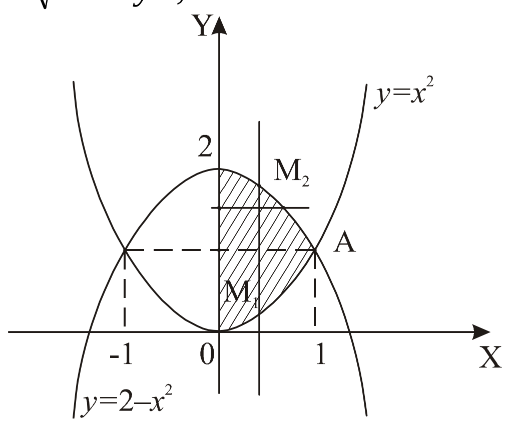


Рис. 12.4

Проектуючи область інтегрування на вісь Oy, одержуємо три області: D_1, D_2, D_3.

$$I = \int\limits_0^a dy \int\limits_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_0^a dy \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx + \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_{y^2/2a}^{2a} f(x,y)dx.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I = \iint\limits_D \sqrt{x}\, y dxdy$, якщо область інтегрування D задається нерівностями $x \ge 0, y \ge x^2, y \le 2 - x^2$.

Область D представлена на рис.12.4. Точка перетину парабол має координати *A(1,1)*. Проекція області *D* на вісь абсцис є відрізок *[0,1]*. Вертикальна пряма при будь-якому постійному *x* перетинає *D* тільки у двох точках: у точці M_1 кривої $y=x^2$ і M_2 кривої $y=2-x^2$, при цьому вид аналітичного виразу функцій для всіх $x \in [0,1]$ залишається незмінним.
Тоді:

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} \sqrt{x}\, y dy = \int_0^1 \sqrt{x} \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{2-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{x} \frac{1}{2}\left(\left(2-x^2\right)^2 - x^4\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2\sqrt{x} - 2x^{5/2}\right) dx = \left(\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{4}{7}x^{7/2}\right)\Big|_0^1 = \frac{16}{21}.$$

Обчислимо інтеграл, проектуючи область *D* на вісь *OY*, тобто внутрішній інтеграл візьмемо по *x*, а зовнішній по *y*. Проекцією є відрізок *[0,2]*. При зміні $y \in [0,2]$ ділянки верхньої межі визначаються різними рівняннями $y=x^2$ й $y=2-x^2$, тому інтеграл по області *D* потрібно представити у вигляді суми інтегралів по областях D_1 й D_2. В зв'язку з тим, що внутрішні інтеграли будуть обчислюватися по змінній *x*, то рівняння ліній, що обмежують кожну з областей D_1 й D_2, повинні бути виражені відносно цієї змінної. Оскільки $x \ge 0$, то $x_1 = \sqrt{y}$, $x_2 = \sqrt{2-y}$. Тоді

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{x}\, y dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} \sqrt{x}\, y dx = \int_0^1 y \frac{2}{3} x^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{y}} dy + \int_1^2 y \frac{2}{3} x^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2-y}} dy =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\int_0^1 y^{7/4} dy - \int_1^2 \left((2-y)-2\right)(2-y)^{3/4} dy \right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{4}{11} + \frac{4}{11}(2-y)^{11/4}\Big|_1^2 - \frac{8}{7}(2-y)^{7/4}\Big|_1^2 \right) = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{11} - \frac{4}{11} + \frac{8}{7} \right) = \frac{16}{21}.$$

12.1.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Обчислення подвійних інтегралів іноді вдається спростити, зробивши заміну змінних. Нехай *x=x(u,v), y=y(u,v)* — взаємно однозначне відображення деякої області σ площини *uov* на область *D* площини *X0Y*. Тоді, в припущенні неперервності частинних похідних функцій *x(u,v)* і *y(u,v)* по *u* і по v , має місце формула

$$\iint\limits_D f(x,y) dxdy = \iint\limits_\sigma f(x(u,v), y(u,v)) \left|I(u,v)\right| dudv, \qquad (12.1.5)$$

яка називається формулою заміни змінних у подвійному интегралі. Якобіан перетворення має вигляд:

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Зокрема, у полярних координатах формула 12.1.5 має вигляд:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_\sigma f(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi, \qquad (12.1.6)$$

де $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $I(\rho,\varphi)=\rho$—якобіан переходу до полярних координат.

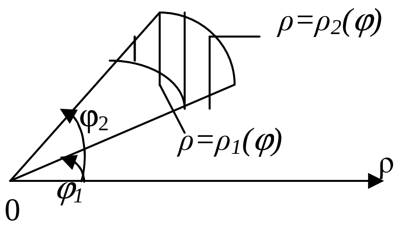


Рис.12.5.

Розміщення меж при обчисленні подвійного інтеграла в полярних координатах можна робити, використовуючи зображення області *D* на площині *XOY*. Якщо область *D* обмежена двома кривими, полярні рівняння яких $\rho=\rho_1(\varphi)$ і $\rho=\rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi))$ і променями $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_\sigma f(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

Якщо область містить початок координат, то

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\rho(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$, де $\rho=\rho(\varphi)$ -*полярне* рівняння кривої, що обмежує область *D*.

Полярні координати зручно використовувати, якщо область є круг або його частина.

Приклад 5. Обчислити $\iint\limits_D ydxdy$, якщо область *D* обмежена верхньою дугою кола $x^2+y^2=ax$ і віссю *OX*.

Розв'язання. Введемо полярні координати $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, тоді рівняння кола прийме вид: $\rho=a\cos\varphi$. Кут (змінюється від 0 до $\pi/2$) (рис. 12.6).

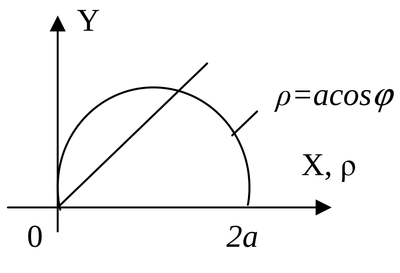


Рис. 12.6.

При кожному фіксованому значенні φ ρ змінюється від 0 до $\rho=a\cos\varphi$. Тоді за формулою (12.1. 6) маємо:

$$\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}\rho^2 d\rho=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{a\cos\varphi}d\varphi=$$

$$\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\cos^3\varphi d\varphi=-\frac{a^3}{3}\cdot\frac{\cos^4\varphi}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^3}{12}.$$

Приклад 6**.** Обчислити $I=\iint\limits_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$, де область обмежена еліпсом.

Розв'язання. Введемо так звані узагальнені полярні координати, покладаючи *x=aρcosφ, y=bρsinφ.* Якобіан перетворення

$$I=\begin{vmatrix}a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi\\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=ab\rho$$

Кут φ міняється від *0* до *2π*. Рівняння еліпса в узагальнених полярних координатах *ρ=1*, тому *ρ* змінюється від *0* до *1*;

$$1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi=1-\rho^2.$$

$$I=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho=ab\cdot2\pi\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}\pi ab.$$

Приклад 7**.**

У теорії ймовірностей і математичній статистиці використовується інтеграл Пуассона $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

Первісна для підінтегральної функції $f(x)=e^{-x^2}$ не виражається в елементарних функціях, однак даний невласний інтеграл може бути обчислений за допомогою подвійного інтеграла.

Оскільки визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування, запишемо:

$$I^2=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\cdot\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Областю інтегрування є перший квадрант системи координат (рис. 12.7)

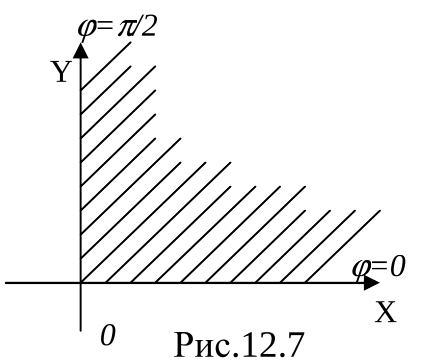


Рис.12.7

Переходячи до полярних координат, одержимо:

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\quad 0<\rho<\infty,\quad x^2+y^2=\rho^2.$$

$$I^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\infty}e^{-\rho^2}\rho d\rho=\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}e^{-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\lim_{A\to+\infty}\int_0^{a}e^{-\rho^2}d\left(-\rho^2\right)=$$

$-\dfrac{\pi}{4}\lim\limits_{A\to+\infty}\left(e^{-A^2}-e^0\right)=\dfrac{\pi}{4}$, де $\lim\limits_{A\to\infty}e^{-A^2}=0$,

Отже, інтеграл Пуассона дорівнює:

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

12.2. Застосування подвійних інтегралів

Обчислення об'ємів тіл.

Циліндричне тіло, обмежене знизу областю D площини XOY, зверху – поверхнею $z=f(x,y)$, збоку – циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі OZ і з напрямною – межею області *D,* має об’єм $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

Приклад. Подвійним інтегруванням знайти об'єм тіла, обмеженого циліндрами $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ і площинами $z=0,\ x+z=6$ (рис. 12.8).

Розв’язання. Тіло обмежене зверху площиною $x+z=6$, знизу площиною z = 0 і двома циліндрами $y=\sqrt{x}$ та $y=2\sqrt{x}$, що проектують його на площину *xOy* в область *D*, обмежену прямою $x=6$ і параболами $y=\sqrt{x}$ та $y=2\sqrt{x}$ (рис. 12.9).

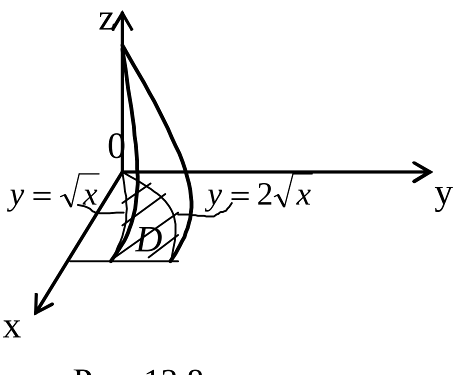


Рис. 12.8

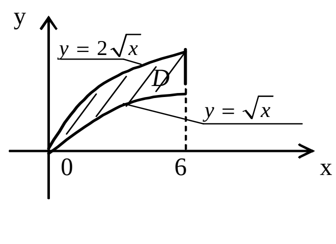


Рис. 12.9

При цьому змінна x змінюється від 0 до 6; при будь-якому значенні x із зазначеного проміжку $\sqrt{x}<y<2\sqrt{x}$. Об'єм знаходимо за формулою

$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$ У даному випадку $z=f(x,y)=6-x$. Тоді

$$V=\iint_D(6-x)dxdy=\int_0^6(6-x)dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy=\int_0^6(6-x)y\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dx=\int_0^6(6-x)\left(2\sqrt{x}-\sqrt{x}\right)dx=$$

$$=\int_0^6\left(6\sqrt{x}-x\sqrt{x}\right)dx=\left(6\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^{5/2}}{5/2}\right)\Bigg|_0^6=24\sqrt{6}-\frac{72}{5}\sqrt{6}=\frac{48\sqrt{6}}{5}.$$

Приклад. Подвійним інтегруванням знайти об'єм тіла, обмеженого циліндрами $x^2+y^2=x$ та $x^2+y^2=2x$, параболоїдом $z=x^2+y^2$ і площинами $x+y=0,\ x-y=0,\ z=0$.

Розв'язання. *Дане циліндричне тіло обмежене зверху поверхнею* $z=x^2+y^2$. *Об'єм його*

$$v=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D zdxdy=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy.$$

Побудуємо область *D*, що зображує проекцію тіла на *площину* xOy (рис.12.10). Область *D* обмежена колами

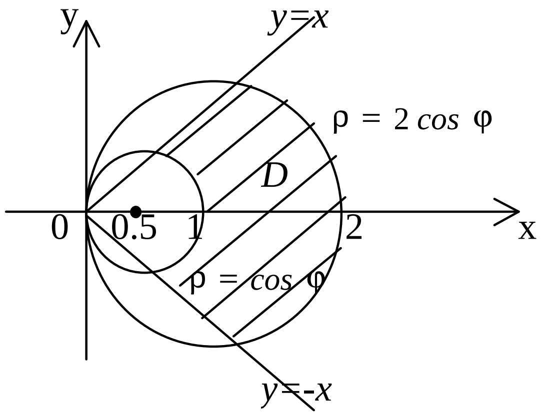


Рис. 12.10

$$x^2+y^2=x$$

$$\text{або}\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$x^2+y^2=2x\ \text{або}\ (x-1)^2+y^2=1$$

і прямими $y=-x,\ y=x$.

У полярних координатах рівняння кіл мають вигляд: $\rho=\cos\varphi$ і $\rho=2\cos\varphi$; рівняння прямих $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ і $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Знаходимо:

$$v=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\rho^3d\rho=(\text{внаслідок симетрії})\ =2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}d\varphi=$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(16\cos^4\varphi - \cos^4\varphi\right) d\varphi = \frac{15}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{15}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi = \frac{15}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{15}{8}\left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{15}{8}\left(\frac{3\pi}{8} + 1\right).$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, вирізаного з кулі радіусом R, прямим круговим циліндром радіусом $R/2$, твірна якого проходить через центр кулі.

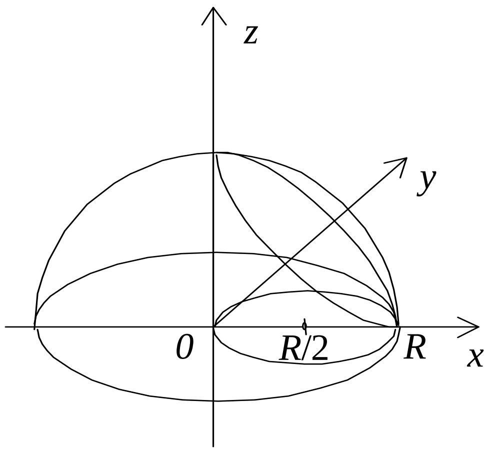


Рис. 12.11.

Розв'язання. Помістимо початок координат у центр кулі, вісь OZ направимо уздовж твірної циліндра, а вісь OX – уздовж діаметра основи циліндра (рис. 12.11)

Рівняння сфери має вигляд: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, тоді в першому октанті $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ і внаслідок симетрії об'єм тіла, вирізаного циліндром з кулі, буде рівним:

$$V = 4\iint \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy.$$

Проекція тіла на площину xOy збігається з кругом $x^2 + y^2 \le Rx$. Щоб обчислити отриманий інтеграл, зручно перейти до полярних координат. Рівняння кола $x^2 + y^2 = Rx$ в полярних координатах має вид $\rho = R\cos\varphi$. Кут φ змінюється від 0 до $\pi/2$ (враховуємо симетрію), ρ змінюється в межах $0 \le \rho \le R\cos\varphi$. Переходячи до полярних координат, одержимо:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho\,d\rho;$$

$$\frac{V}{4} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\left(R^2 - \rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^{R\cos\varphi} d\varphi = -\frac{R^3}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\sin^3\varphi - 1\right) d\varphi =$$

$$= \frac{R^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2\varphi\right)d(\cos\varphi)+\frac{\pi R^3}{6}=\frac{R^3}{3}\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}+\frac{\pi R^3}{6}=\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

Отже, $V=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$.

Обчислення маси неоднорідної пластини.

Пластина, що займає область D у площині XOY і має щільність $\rho(x,y)$, має масу

$$m=\iint_D \rho(x,y)dxdy.$$

Обчислення статичних моментів і моментів інерції пластини.

Статичні моменти пластини відносно осей OX і OY відповідно рівні

$$M_x=\iint_D y\ \rho(x,y)dxdy,\ M_y=\iint_D x\ \rho(x,y)dxdy.$$

Момент інерції пластини відносно початку координат визначається за формулою $I_0=\iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy.$

Моменти інерції пластини відносно осей OX і OY будуть відповідно $I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)dxdy,\ I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)dxdy.$

Знаходження центра ваги пластини.

Координати центра ваги x_C та y_C неоднорідної пластини дорівнюють, відповідно, відношенням статичних моментів відносно осей OY й OX до маси пластини:

$$x_c=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy};\ y_c=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy};$$

Якщо пластина однорідна:

$$x_C=\frac{\iint_D xdxdy}{S};\ y_C=\frac{\iint_D ydxdy}{S}.$$

Приклад. Знайти момент інерції квадрата зі стороною a, поверхнева щільність якого пропорційна відстані до однієї із сторін квадрата, відносно вершини, що належить даній стороні.

Розв'язання. Нехай квадрат розташований у площині xOy; одна з його вершин належить початку координат, а дві інші збігаються з осями координат. Відзначимо, що момент інерції не залежить від вибору системи координат. Шуканий момент інерції дорівнює моменту інерції квадрата щодо початку координат з поверхневою щільністю *kx,* де *k – коефіцієнт* пропорційності (беремо поверхневу щільність, пропорційну відстані до осі Оу*)*. Тоді

$$I_0 = \iint_D \left(x^2+y^2\right)kxdxdy = k\int_0^a xdx\int_0^a \left(x^2+y^2\right)dy = k\int_0^a x\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a dx =$$

$$= k\int_0^a x\left(x^2a+\frac{a^3}{3}\right)dx = k\int_0^a \left(x^3a+x\frac{a^3}{3}\right)dx = k\left(a\frac{x^4}{4}+\frac{x^2a^3}{6}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= k\left(\frac{a^5}{4}+\frac{a^5}{6}\right) = \frac{5ka^5}{12}.$$

.

12.3. Потрійні інтеграли і їх обчислення в декартовій системі координат

Нехай у правильній, замкненій обмеженій області *V* задана обмежена функція $f(x,y,z)$. Розіб'ємо область *V* на *n* елементарних підобластей, що не мають спільних внутрішніх точок, об'єми яких позначимо ΔV_i. У кожній елементарній області ΔV_i виберемо довільно точку $M_i(\xi_i \eta_i, \zeta_i)$ і складемо суму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i,$$

що називатимемо *інтегральною сумою* для функції $f(x,y,z)$ по області *V*. Найбільший з діаметрів елементарних областей ΔV_i позначимо через λ.

Якщо існує межа інтегральної суми при $\lambda \to 0$, що не залежить від способу розбиття області *V* на елементарні частини і вибору точок $M_i(\xi_i \eta_i, \zeta_i) \in \Delta V_i$, то вона називається потрійним інтегралом від функції $f(x,y,z)$ по області *V* і позначається:

$$\lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i = \iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_V f(x$$

.

Функція $f(x,y,z)$ у цьому випадку називається інтегровною в області *V*.

Обчислення потрійного інтеграла в декартовій системі координат зводиться до обчислення подвійного інтеграла по проекції D *об'єму* V *на будь-яку координатну площину (у*

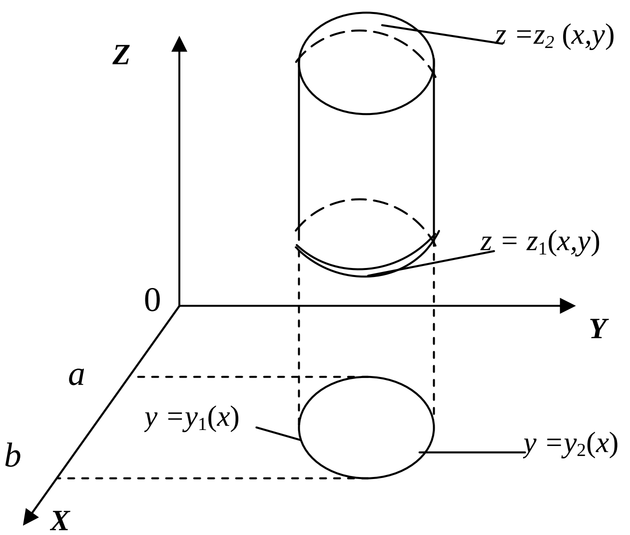


Рис. 12.12

даному випадку XOY*) і внутрішнього інтеграла по третій змінній (змінна* z*) (рис.12.12). Внутрішній інтеграл береться від нижньої межі* $z = z_1(x,y)$ *області* V *до її верхньої межі* $z = z_2(x,y)$ *(передбачається, що об-ласть є правильною в напрямі осі* Oz*):*

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Враховуючи правила обчислення подвійного інтеграла, останню формулу можна переписати таким чином:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Якщо область *V* є неправильною, то її розбивають на скінченне число правильних областей і обчисляюють інтеграл, використовуючи властивість адитивності потрійного інтеграла.

Якщо областю інтегрування є прямокутний паралелепіпед, обмежений площинами x = a, x = b *(*a < b*)*, y = c, y = d *(*c < d*)*, z = m, z = n *(*m < n*), то межі інтегрування будуть сталими, тобто*

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_m^n f(x,y,z)dz.$$

У випадку, якщо $f(x,y,z) \equiv 1$, то потрійний інтеграл чисельно дорівнює об'єму області інтегрування.

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2,\ z = 2(x^2 + y^2),\ y = x,\ y = x^2$.

Розв'язання. Тіло обмежене площиною $y = x$, циліндром $y = x^2$ і параболоїдами обертання $z = x^2 + y^2,\ z = 2(x^2 + y^2)$. Нехай *D* - проекція тіла на площину *xOy;* у даному випадку проектуючими поверхнями є площина $y = x$ і циліндр $y = x^2$ (рис. 12.13).

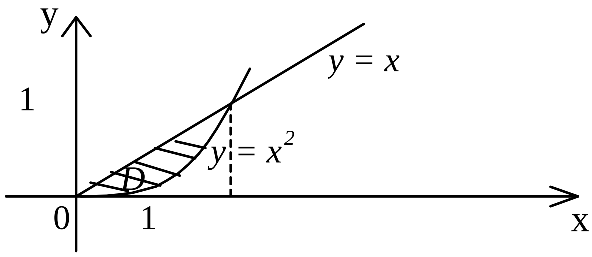


Рис. 12.13.

Тоді об'єм

$$V=\iiint_{v} dv=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy\int_{x^2+y^2}^{2\left(x^2+y^2\right)} dz=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} z\Big|_{x^2+y^2}^{2\left(x^2+y^2\right)} dy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\left(x^2+y^2\right)dy=$$

$$\int_0^1\left(x^2 y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx=\int_0^1\left(\frac{4x^3}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=\frac{3}{35}.$$

Приклад. Обчислити масу тіла, обмеженого циліндром $x^2 = 2y$ і площинами $z = 0$, $2y + z = 2$, якщо в кожній його точці об'ємна щільність чисельно дорівнює аплікаті цієї точки.

Розв'язання. Циліндричне тіло (рис. 12.14) обмежено зверху площиною $z = 2 - 2y$, що перетинається з площиною $z = 0$ по прямій $y = 1$.

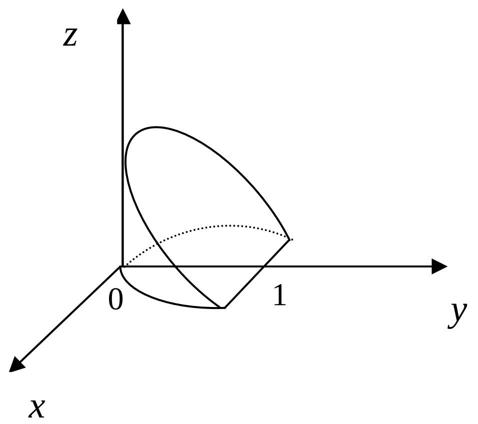


Рис. 12.14.

Маса тіла, що займає область V, обчислюється через потрійний інтеграл: $m=\iiint_{V}\rho(x,y,z)dxdydz$, де $\rho(x,y,z,)$ - об'ємна щільність.

В нашій задачі $\rho(x,y,z)=z$, тому

$$m=\iiint_{V} zdxdydz=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx\int_0^{2-2y} zdz=2\int_0^1 (1-y)^2 dy\int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx=4\int_0^1 (1-y)^2\sqrt{2y}dy$$

12.4. Потрійні інтеграли і їх обчислення в циліндричній і сферичній системах координат

Заміна змінних у потрійному інтегралі: нехай функція $f(x,y,z)$ неперервна в області V і формули.

$$x=x(u,v,w);\;\; y=y(u,v,w),\;\; z=z(u,v,w)$$

встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками $M(x,y,z)$ області V і точками $M'(u,v,w)$ деякої області V', тоді

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f\left(x\left(u,v,w\right), y\left(u,v,w\right), z\left(u,v,w\right)\right)\left|J\right| dudvdw,$$

де $|J|$ - абсолютне значення якобіана.

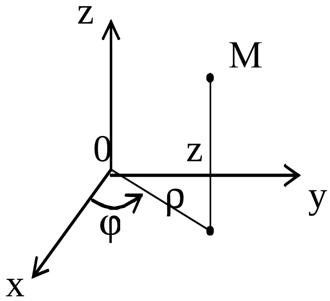


Рис. 12.15

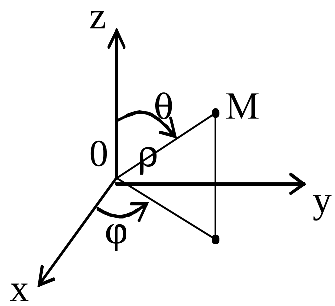


Рис. 12.16

У *циліндричній* системі координат положення точки визначається полярними координатами φ, ρ та аплікатою z (рис. 12.15), а формули, що зв'язують прямокутні і циліндричні координати мають вигляд: $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $z = z$. Модуль Якобіана дорівнює $|J| = \rho$, тоді

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz.$$

У системі циліндричних координат координатні поверхні $\rho = const$, $\varphi = const$, $z = const$ представляють відповідно кругові циліндри з віссю Oz, напівплощини, що виходять з осі Oz, і площини, паралельні площині xOy.

Тому якщо областю інтегрування є круговий циліндр із віссю Oz, то потрійний інтеграл за цією областю в циліндричній системі координат матиме сталі межі по всіх змінних, тобто

$$\iiint\limits_{V} f\left(x,y,z\right)dV = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} \rho d\rho \int\limits_{0}^{H} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z\right)dz.$$

Сферичні координати точки M області V позначаються через ρ, φ, θ, де ρ - відстань від початку координат до точки M $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, φ - кут між віссю Ox і проекцією радіуса-вектора OM на площину xOy, а θ - кут між додатним напрямком осі Oz і радіусом-вектором OM (рис. 12.16). Очевидно, що $(\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$. Тут координатні поверхні такі: $\rho = const$ – сфери з центром на початку координат, $\varphi = const$ - напівплощини, що виходить з осі Oz, $\theta = const$ - кругові конуси з віссю Oz. Сферичні координати ρ, φ, θ зв'язані з прямокутними координатами співвідношеннями:

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta,\ \ |J| = \rho^2\sin\theta.$$

Перехід у потрійному інтегралі до сферичних координат здійснюється за формулою:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Очевидно, якщо областю інтегрування є куля з центром на початку координат і радіусом R, то потрійний інтеграл за цією областю в сферичній системі координат матиме сталі межі інтегрування по всіх змінних, тобто

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R}\rho^2 f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)d\rho.$$

Нижче на конкретних прикладах проілюстровані правила для розставлення меж інтегрування в циліндричній і сферичній системах координат і показані їх геометричні та фізичні застосування.

Приклад. Обчислити $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, де V – частина області, яка обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=4$ і параболоїдом $x^2+y^2=3z$, розташована в першому октанті (рис.12.17).

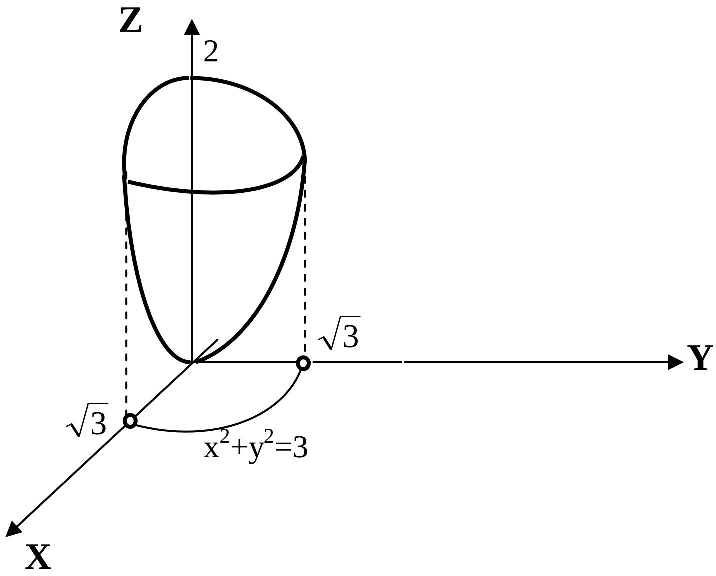


Рис. 12.17.

Розв'язання. *Перший спосіб.* Обчислення інтеграла в декартовій системі координат. Перед тим, як проектувати об'єм V на площину XOY, знайдемо лінію перетину сфери і параболоїда. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\left\{\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=3z \end{aligned}\right\} \Rightarrow z^2+3z-4=0 \Rightarrow z=1 \Rightarrow x^2+y^2=3,$$

тобто поверхні перетинаються по колу радіуса $R=\sqrt{3}$, що лежить у площині z = 1. Поверхня проектується на площину xOy у чверть круга даного радіусу, що знаходиться в першій чверті.

Одержимо:

$$\iint\limits_D xyzdxdydz = \int\limits_0^{\sqrt{3}} xdx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} ydy \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} xdx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} yz^2 \Bigg|_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} xdx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} y\left(4 - x^2 - y^2 - \frac{(x^2+y^2)^2}{9}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\left(2y^2 - \frac{x^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4} - \frac{x^4y^2}{18} - \frac{x^2y^4}{18} - \frac{y^6}{54}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{13}{4}x - 2x^3 + \frac{x^5}{4} + \frac{x^7}{54}\right)dx = \frac{27}{32}.$$

Другий спосіб. Обчислення інтеграла в циліндричній системі координат:

$I = \iiint\limits_V xyzdxdydz = \iiint\limits_{V'} \rho^3 \sin\varphi\cos\varphi zd\rho d\varphi dz$, де V' - область зміни циліндричних координат точок області V.

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} zdz = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho^3(4 - \rho^2 - \frac{\rho^4}{9})d\rho = \frac{27}{32}.$$

Приклад. Обчислити об'єм частини кулі $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (рис.12.18), розташованої усередині циліндра $\left(x^2+y^2\right) = R^2\left(x^2 - y^2\right)$ $(z \geq 0)$.

Розв'язання. Напрямну циліндра, спрямовану лемніскатою, побудуємо, переходячи до полярних координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Полярне рівняння цієї кривої $\rho = R\sqrt{\cos 2\varphi}$. Крива симетрична відносно осей *OX* та *OY*, і при зміні φ від 0 до $\pi/4$ поточна точка (ρ, φ) опише четверту частину кривої.

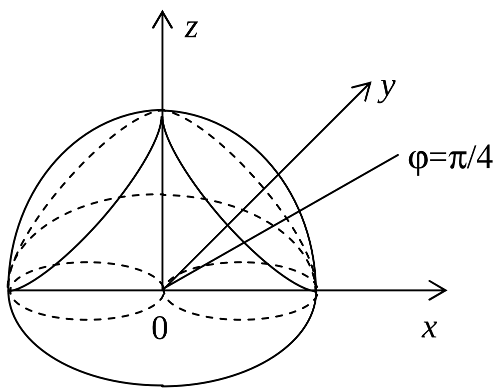


Рис.12.18.

Шуканий об'єм у циліндричній системі координат обчислюється так:

$$V = \iiint\limits_{V_1} \rho d\rho d\varphi dz = 4\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho \int\limits_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} dz =$$

$$4\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho\sqrt{R^2-\rho^2}d\rho =$$

$$4\int\limits_0^{\pi/4} -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(R^2-\rho^2\right)^{3/2}\Bigg|_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$\frac{4}{3}\int\limits_0^{\pi/4} R^3\left(1-(1-\cos 2\varphi)^{3/2}\right)d\varphi=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5-4\sqrt{2}}{3}\right).$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=a^2\left(x^2+y^2\right)^2$.

Розв'язання. Перейдемо до сферичних координат, тоді рівняння поверхні має вигляд: $\rho^2=a^2\sin^4\theta$ або $\rho=a\sin^2\theta$.

Об'єм тіла в сферичних координатах дорівнює

$$v=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{a\sin^2\theta}\rho^2 d\rho=2\pi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{a\sin^2\theta}=2\cdot\frac{2\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^7\theta d\theta=$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{6!!}{7!!}=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}=\frac{64\pi a^3}{105}.$$

Приклад. Знайти момент інерції однорідного тіла, обмеженого сферою $x^2+y^2+z^2=2z$ і конусом $x^2+y^2=z^2$, відносно осі OZ (рис. 12.19).

Розв'язання. Побудуємо дане тіло. Для цього знайдемо лінію перетину поверхонь:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2z\\ x^2+y^2=z^2\end{cases}\Rightarrow 2z^2=2z\Rightarrow z=1,$$

тобто ця лінія є колом радіуса $R=1$, що лежить у площині $z=1$. Проекція тіла на площину XOY є круг $x^2+y^2\le 1$.

Момент інерції обчислюється за формулою $I_z=\iiint\limits_V(x^2+y^2)dxdydz.$

Перейдемо до сферичних координат, тоді всі межі інтегрування будуть сталими. Причому межі для θ можна визначити за допомогою рівняння $x^2+y^2=z^2$, вважаючи $x=0$ (або $y=0$), одержимо, що

$$y=z\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4},\text{ тобто } 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}.$$

$$I_z=\iiint\limits_{V'}r^2\sin^2\theta r^2\sin\theta drd\varphi d\theta=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/4}\sin^3\theta d\theta\int\limits_0^{2\cos\theta}r^4dr=\frac{1}{3}$$

.

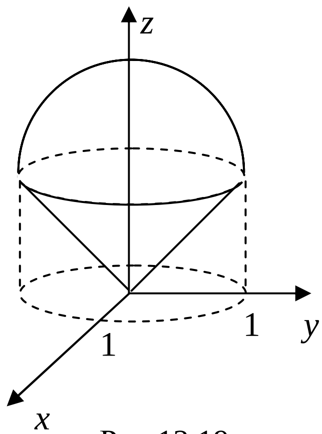


Рис.12.19

Контрольні завдання до розділу 12

Завдання 1.

Побудувати область D і обчислити $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$.

12.1.1. D – внутрішність трикутника з вершинами

$(0,0), (0,1), (1,0);\ f(x,y)=x^2y.$
12.1.2. D – область, обмежена кривою $y=\sin x$ і відрізком $0\le x\le\pi$; $f(x,y)=xy.$
12.1.3. D –область, що міститься між двома параболами $y=x^2$ і $y=-x^2+1;\ f(x,y)=x\sqrt{y}.$
12.1.4. D – внутрішність трикутника з вершинами $(-7,-6), (5,3), (0,0);\ f(x,y)=e^{x+y}.$
12.1.5. D – внутрішність трикутника з вершинами $(-1,-1), (-4,-8), (-8,-4);\ f(x,y)=(x^2-3y)^2.$
12.1.6. D – область, відрізана осями координат від полоси, що знаходиться між двома паралельними прямими с нахилом 2 і такими, що проходять через точки $(1,0)$ и $(2,0);\ f=\cos(x+y).$
12.1.7. D – область, обмежена лініями $x=0,\ y=x,\ y=2-x^2;\ f(x,y)=xy^2.$
12.1.8. D – область, обмежена віссю $0x$ и верхнім півколом $(x-2)^2+y^2=1;$ $f(x,y)=xy.$
12.1.9. D – криволінійний трикутник, обмежений параболою $y^2=x$ і прямими $x=0,\ y=1,\ f(x,y)=e^{x/y}.$
12.1.10. D – область, обмежена параболою $y^2=2px$ і прямою $x=p/2\ (p>0);$ $f(x,y)=xy^2.$
12.1.12. D – паралелограм зі сторонами $y=x,\ y=x+a,\ y=a$ і $y=3a\ (a>0);$ $f(x,y)=x^2+y^2.$
12.1.13. D – круг радіуса R з центром в початку координат; $f(x,y)=y^2\sqrt{R^2-x^2}.$
12.1.14. D – область, обмежена дугами парабол $y=x^2$ и $y^2=x;\ f(x,y)=x^2+y.$
12.1.15. D – область, обмежена осями координат і параболою $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1;\ f(x,y)=xy.$
12.1.16. D – область, обмежена прямими $x=2,\ y=x$ і гіперболою $xy=1;$ $f(x,y)=x^2/y^2$. 12.1.17.D–трикутник,обмежений прямими $x=0,\ y=x,\ y=\pi;\ f(x,y)=\cos(x+y).$ 12.1.18.D – трикутник, обмежений прямими $y=x,\ y=5x,\ x=1;\ f(x,y)=3x+y.$
12.1.19. D – область, обмежена лініями $y=2-x^2,\ y=2x-1;\ f=x-y.$
12.1.20. D – область, обмежена лініями $xy=1,\ y=\sqrt{x},\ x=2;\ f(x,y)=y\ln x.$
12.1.21. D–область,обмежена лініями $x=0,\ y=0,\ 4x+4y-\pi=0;\ f(x,y)=\cos 2x+\sin y.$
12.1.22. D–область, визначена нерівностями
$$x^2+y^2\le 9,\ y\ge\frac{2}{3}x+3;\ f(x,y)=3x+y.$$
12.1.23. D – область, обмежена лініями $y=0,\ y=\sqrt{2ax-x^2};\ f(x,y)=x^2y.$
12.1.24. D – трикутник з вершинами $(1,3), (-1,-1), (2,-4);\ f(x,y)=2x+3y+1.$
12.1.25. D – область, обмежена параболою $2y=x^2$ і прямою $y=x;\ f(x,y)=x/(x^2+y^2).$
12.1.26. D – область, обмежена лініями

$x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3;\ f(x,y)=xy-9x^5y^5.$

12.1.27. D – область, обмежена лініями

$x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x};\ f(x,y)=xy-4x^3y^3.$

12.1.28. D – область, обмежена прямими

$y=ln3,\ y=ln4,\ x=\frac{1}{2},\ x=1;\ f(x,y)=4ye^{2xy}.$

12.1.29. D – область, обмежена прямими

$x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=x;\ f(x,y)=4y^2\sin xy\,dx.$

12.1.30. D – область, обмежена прямими

$x=1,\ x=2,\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi;\ f(x,y)=y\cos xy.$

Завдання 2. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

12.2.1. $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy.$

12.2.2. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx.$

12.2.3. $\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{x}^{x\sqrt{3}}f(x,y)dy.$

12.2.4. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)dx.$

12.2.5. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy.$

12.2.6. $\int\limits_{0}^{4}dx\int\limits_{\sqrt{8x-x^2}}^{4\sqrt{x}}f(x,y)dy.$

12.2.7. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}}dy\int\limits_{y}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx.$

12.2.8. $\int\limits_{-1}^{2}dy\int\limits_{y^2-4}^{y-2}f(x,y)dx.$

12.2.9. $\int\limits_{e}^{e^2}dx\int\limits_{1}^{\ln x}f(x,y)dy.$

12.2.10. $\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{1/y}^{y}f(x,y)dx.$

12.2.11. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}}f(x,y)dy.$

12.2.12. $\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy.$

12.2.13. $\int\limits_{0}^{3}dx\int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}}f(x,y)dy.$

12.2.14. $\int\limits_{-2}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{y}f(x,y)dx.$

12.2.15. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy.$

12.2.16. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x^3}^{x^2}f(x,y)dy.$

12.2.17. $\int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy$.

12.2.18. $\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx$.

12.2.19. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy$.

12.2.20. $\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$.

12.2.21. $\int_1^e dx \int_{-\ln x}^{1} f(x,y)dy$.

12.2.22. $\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{\sqrt{2x-4x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)dy$.

12.2.23. $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

12.2.24. $\int_0^1 dy \int_{-y}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

12.2.25. $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy$.

12.2.26. $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} f(x,y)dy$.

12.2.27. $\int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2} f(x,y)dy$.

12.2.28. $\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f(x,y)dy$.

12.2.29. $\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$.

12.2.30. $\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$.

РОЗДІЛ 13
КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

13.1. Криволінійні інтеграли 1-го роду

Розглянемо просторову кусково-гладку криву L, обмежену точками A і B. Нехай у кожній точці $M(x,y,z)$ цієї кривої визначена неперервна функція $f(x,y,z)=f(M)$. Розіб'ємо дугу AB на n частин точками $A=A_0,\ A_1,\ A_2,...,A_n=B$. На кожній частині $A_{i-1}A_i$ виберемо довільну точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$ й обчислимо в ній значення функції $f(x_i,y_i,z_i)$. Число $f(x_i,y_i,z_i)$ помножимо на довжину дуги Δl_i. Утворимо суму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta l_i ,$$

названу інтегральною сумою по кривій L функції $f(x, y, z)$.

Криволінійним інтегралом І-го роду від функції $f(x, y, z)$ по кривій L називається межа інтегральної суми:

$$\int_L f(x, y, z) dl = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i .$$

Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна у всіх точках дуги AB, то ця межа існує і не залежить ні від способу розбивки дуги AB, ні від вибору точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ на кожній з цих частин.

Якщо крива L лежить у площині XOY, то функція f залежить тільки від (x, y):

$$\int_L f(x, y) dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta l_i .$$

13.1.1. Обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду

Обчислення криволінійних інтегралів І-го роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла. Розглянемо різні способи задання кривої L і перехід до визначеного інтеграла.

а) Якщо крива L задана параметричними рівняннями:

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad (t_1 \le t \le t_2), \\ z = z(t) \end{cases}$$

то $\displaystyle\int_L f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f\left[x(t), y(t), z(t)\right] \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt$,

оскільки в цьому випадку $dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt$. Якщо крива лежить у площині XOY, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f\left[x(t), y(t)\right] \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt .$$

б) Якщо плоску криву L задано рівнянням $y = y(x)$, де $a \le x \le b$, то $dl = \sqrt{1 + y_x'^2}\, dx$:

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+y_x'^2}\,dx.$$

в) Якщо плоску криву L задано рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, $(\alpha\le\varphi\le\beta)$ у полярних координатах, то $dl=\sqrt{\rho^2+\rho_\varphi'^2}\,d\varphi$:

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho_\varphi'^2}\,d\varphi.$$

Нижня межа інтегрування в усіх випадках менше верхньої: $a<b$, $t_1<t_2$, $\alpha<\beta$.

13.1.2. Застосування криволінійних інтегралів 1-го роду

а) *Довжина дуги* AB кривої обчислюється як $l=\int\limits_{AB} dl$.

б) *Маса матеріальної дуги*. Якщо в кожній точці кривої L щільність маси $\gamma(x,y,z)$ є функцією координат цієї точки, то маса дуги кривої

$$m=\int\limits_{(AB)}\gamma(x,y,z)dl.$$

в) *Статичні моменти* плоскої дуги відносно координатних осей визначаються за формулами:

$$M_{OX}=\int\limits_{(AB)} y\gamma(x,y)dl; \quad M_{OY}=\int\limits_{(AB)} x\gamma(x,y)dl.$$

г) *Координати центра ваги* плоскої матеріальної дуги AB:

$$x_c=\frac{M_{OY}}{m}=\frac{\int\limits_{(AB)} x\gamma(x,y)dl}{\int\limits_{(AB)}\gamma(x,y)dl}; \quad y_c=\frac{M_{OX}}{m}=\frac{\int\limits_{(AB)} y\gamma(x,y)dl}{\int\limits_{(AB)}\gamma(x,y)dl}.$$

д) *Моменти інерції* матеріальної дуги відносно координатних осей:

$$I_{OX}=\int\limits_{(AB)} y^2\gamma(x,y)dl; \quad I_{OY}=\int\limits_{(AB)} x^2\gamma(x,y)dl.$$

13.1.3. Приклади обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду

Приклад. Обчислити $\int\limits_L \left(x^5+8xy\right)dl$, де L: $\quad y=\frac{1}{4}x^4, \quad x_1=0, \quad x_2=1$.

Розв′язання. Визначимо y_x', dl і перейдемо до визначеного інтеграла:

$y_x'=x^3$, $dl=\sqrt{1+y_x'^2}\,dx=\sqrt{1+x^6}\,dx$;

$$\int_L \left(x^5+8xy\right)dl=\int_0^1 \sqrt{1+x^6}\left(x^5+8x\cdot\frac{1}{4}x^4\right)dx=\int_0^1 \sqrt{1+x^6}\,3x^5dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+x^6}\,d(x^6+1)=\frac{1}{3}(1+x^6)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Приклад. $\int_L (2x+y)dl$, де L – контур трикутника ABC, $A(1,0)$, $B(0,2)$, $C(0,0)$.

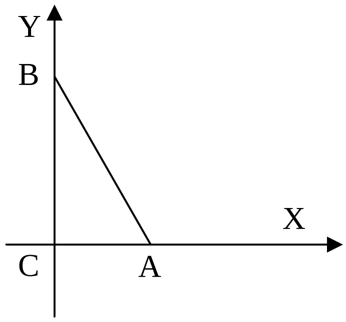


Рис 13.1.

Розв′язання.

$$\int_L (2x+y)dl=\int_{AB}(2x+y)dl+$$

$$+\int_{BC}(2x+y)dl+\int_{CA}(2x+y)dl.$$

Обчислимо кожний інтеграл окремо:

а) AB: $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1$; $y=-2x+2, y'=-2$;

$dl=\sqrt{1+y_x'^2}\,dx=\sqrt{5}dx$;

$$\int_{AB}(2x+y)dl=\int_0^1\sqrt{5}[2x+(-2x+2)]dx=2\sqrt{5}\int_0^1 dx=2\sqrt{5};$$

б) $BC: x=0, x_y'=0$; $dl=\sqrt{1+x_y'^2}\,dy=dy$;

$$\int_{BC}(2x+y)dl=\int_0^2 ydy=\frac{y^2}{2}\Big|_0^2=2;$$

в) $CA: y=0, y_x'=0$; $dl=\sqrt{1+y_x'^2}\,dx=dx$;

$$\int_{CA}(2x+y)dl=\int_0^1 2xdx=x^2\Big|_0^1=1.$$

Отже, $\int_L (2x+y)dl=2\sqrt{5}+2+1=3+2\sqrt{5}$.

Приклад. Обчислити $\int_L (2x+4y-4z+1)dl$, де L - відрізок прямої між точками $M_1(8,9,3)$ і $M_2(6,10,5)$.

Розв′язання. Складемо рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}; \quad \frac{x-8}{-2}=\frac{y-9}{1}=\frac{z-3}{2}=t.$$

Якщо ввести параметр t, одержимо рівняння:

$$\begin{cases} x=-2t+8 \\ y=t+9 \quad ,0\le t\le 1; \\ z=2t+3 \end{cases}$$

$$dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt=\sqrt{4+1+4}\,dt=3dt;$$

$$\int_L(2x+4y-4z+1)dl=3\int_0^1\left[2(-2t+8)+4(t+9)-4(2t+3)+1\right]dt=3\int_0^1(41-8t)dt=111.$$

Приклад. Обчислити $\int_L(x+y)dl$, де L: пелюстка лемніскати $\rho=\sqrt{\sin 2\varphi}$, розташована у першому координатному куті.

Розв’язання.

$$\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi},\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases} \quad dl=\sqrt{\rho^2+\rho_\varphi'^2}\,d\varphi.\ \ \rho_\varphi'=\frac{a\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}; \quad \rho_\varphi'^2=\frac{a^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi};$$

$$\rho^2+\rho_\varphi'^2=a^2\sin 2\varphi+\frac{a^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}=\frac{a^2}{\sin 2\varphi}\ .$$

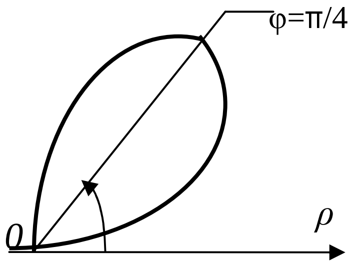


Рис. 13.2

Для встановлення меж інтегрування слід визначити проміжок зміни φ, що відповідає пелюстці кривої у першому координатному куті. Очевидно, $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Тоді

$$\int_L(x+y)dl=\int_0^{\pi/2}(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)\frac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}}d\varphi=$$

$$=a^2\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi=a^2(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2}=a^2(1+1)=2a^2.$$

Приклад. Обчислити $\int_L\sqrt{2x^2+y^2}\,dl.\ L: x^2+y^2+z^2=a^2,\ z=x.$

Розв′язання. Лінія задана перетином двох поверхонь: сфери і площини. Складемо параметричні рівняння цієї лінії. Для цього, підставляючи в рівняння сфери $z = x$, одержимо спочатку рівняння проекції заданої лінії на площину XOY:

$$\frac{x^2}{a^2/2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

Ця проекція є еліпс з півосями $a/\sqrt{2}$ та a. Параметричні рівняння еліпса мають вигляд:

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t;\ y=a\sin t;\ t\in[0,2\pi].$$

Оскільки $z = x$, параметричне рівняння лінії L має вигляд:

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t;\ y=a\sin t;\ z=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t;\ t\in[0,2\pi].$$

Знайдемо:

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt=\sqrt{2\frac{a^2}{2}\sin^2 t+a^2\cos^2 t}dt=adt;$$

$$\int\limits_L\sqrt{2x^2+y^2}dl=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2\frac{a^2}{2}\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\cdot a\cdot dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi a^2.$$

Приклад. Знайти довжину дуги гвинтової лінії:

$$L:\begin{cases}x=4\cos t\\ y=4\sin t,\ (0\le t\le 2\pi).\\ z=3t\end{cases}$$

Розв′язання. $L:\begin{cases}x=4\cos t\\ y=4\sin t,\ (0\le t\le 2\pi)\\ z=3t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'_t=-4\sin t\\ y'_t=4\cos t\\ z'_t=3\end{cases};$

$$dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}dt=\sqrt{16\sin^2 t+16\cos^2 t+9}dt=5dt;$$

$$l=\int\limits_L dl=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}dt=\int\limits_0^{2\pi}5dt=5t\Big|_0^{2\pi}=10\pi.$$

Приклад. Знайти центр ваги гвинтової лінії: $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ t\in\left[0,\pi/2\right]$, якщо лінійна щільність у кожній точці є пропорційною добутку перших двох координат.

Розв′язання. Для розвязання використовуємо формули:

$$x_C = \frac{\int\limits_L x\gamma(x,y,z)dl}{\int\limits_L \gamma(x,y,z)dl}; \quad y_C = \frac{\int\limits_L y\gamma(x,y,z)dl}{\int\limits_L \gamma(x,y,z)dl}; \quad z_C = \frac{\int\limits_L z\gamma(x,y,z)dl}{\int\limits_L \gamma(x,y,z)dl}.$$

Знайдемо масу дуги: $m = \int\limits_L \gamma(x,y,z)dl$. Відповідно до умови, $\gamma(x,y,z) = kxy$, тоді

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = \sqrt{a^2 + b^2}\,dt;$$

$$m = \int\limits_0^{\pi/2} kxy\sqrt{a^2+b^2}\,dt = k\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi/2} a^2\cos t\sin t\,dt =$$

$$a^2k\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^2k\sqrt{a^2+b^2}}{2};$$

$$\int\limits_L x\gamma(x,y,z)dl = ka^3\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin t\,dt = \frac{ka^3\sqrt{a^2+b^2}}{3};$$

$$\int\limits_L y\gamma(x,y,z)dl = ka^3\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos t\,dt = \frac{ka^3\sqrt{a^2+b^2}}{3};$$

$$\int\limits_L z\gamma(x,y,z)dl = kba^2\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi/2} t\sin t\cos t\,dt =$$

$$= \frac{a^2bk\sqrt{a^2+b^2}}{2}\int\limits_0^{\pi/2} t\sin 2t\,dt = \frac{a^2bk\sqrt{a^2+b^2}}{2}\frac{\pi}{4};$$

$$x_c = 2a/3, \quad y_c = 2a/3, \quad z_c = \pi b/4.$$

13.2. Криволінійні інтеграли 2-го роду

1) Нехай L кусково-гладка просторова крива, на якій задано напрям, а $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – неперервні функції на ній. Розіб'ємо криву L на елементарні ділянки $A_{i-1}A_i$, проекції яких на координатні осі Ox, Oy, Oz відповідно позначимо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. Виберемо на кожній з ділянок довільну точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ й обчислимо значення функції в цій точці.

Створимо суму:

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R\left(Mi\right)\Delta z_i,$$

що називається інтегральною сумою по координатах. Якщо при наближенні до нуля ця сума має скінчену межу *W,* що не залежить від способу розбивки кривої і вибору точок M_i, то ця межа називається криволінійним *інтегралом ІІ-го роду* по кривій L і позначається

$$W = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Криволінійний інтеграл ІІ-го роду залежить від вибору напряму кривої. Якщо змінити напрям кривої, то інтеграл змінює знак:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = -\int_{BA} Pdx + Qdy + Rdz.$$

За своїм фізичним змістом криволінійний інтеграл ІІ-го роду є робота змінної сили $\vec{F} = \left(P,Q,R\right)$, точка прикладання якої описує криву *L*.

2) *Обчислення криволінійного інтеграла ІІ-го роду* зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

а) Якщо плоска крива задана рівнянням $y = y(x), \quad x \in \left[a,b\right]$, причому початку кривої відповідає $x = a$, а кінцю – $x = b$, то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P[x,y(x)]dx + Q[x,y(x)]y'_x dx.$$

б) Якщо крива L задана параметричними рівняннями і початку кривої відповідає значення параметра $t = t_1$, а кінцю – $t = t_2$:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in \left[t_1, t_2\right],$$

то $\displaystyle\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} P[x(t),y(t)]x'_t dt + Q[x(t),y(t)]y'_t dt.$

Зверніть увагу, що у випадку а) і у випадку б) нижня межа інтеграла не обов'язково менше верхньої.

В однозв′язній області *D* для функцій *P, Q, R* , що мають неперервні похідні першого порядку, необхідною і достатньою умовою повного диференціала є виконання таких рівностей:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

в) Якщо під знаком інтеграла стоїть повний диференціал

$$Pdx + Qdy + Rdz = dU(x,y,z),$$

то незалежно від форми кривої *L*, повністю розташованої в області *D*,

$$\int_L (Pdx + Qdy + Rdz) = U(B) - U(A),$$

де A - початкова, а B - кінцева точка шляху інтегрування. Тоді функцію $U(x,y,z)$ можна знайти за формулою

$$U(x,y,z)+C=\int_{M_0M} dU=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz,$$

де (x_0, y_0, z_0) - довільна точка області *D*.

Якщо вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ - повний диференціал у деякій однозв'язній області *D*, то криволінійний інтеграл по будь-якому замкненому контуру *L* дорівнює нулю і навпаки.

г) *Зв'язок між криволінійним і подвійним інтегралом*. Якщо L – кусково-гладкий замкнений контур, що обмежує область D, орієнтований так, що при обході L область D залишається ліворуч, а функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в замкненій області D, то має місце *формула Гріна*:

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

3) *Застосування криволінійного інтеграла 2-го роду*.

а) Площа плоскої фігури, обмеженої кривою L,

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx.$$

б) Робота, здійснена змінною силою $\vec{F}(P,Q,R)$ уздовж шляху L:

$$W=\int_L Pdx+Qdy+Rdz.$$

13.2.1. Приклади обчислення криволінійних інтегралів 2-го роду

Приклад. Обчислити $\int_L x^2dx+\frac{dy}{y^2}$, де L - дуга кривої $x=\frac{1}{y}$ від точки $A(4, 1/4)$ до $B(1,1)$.

Розв′язання. З рівняння кривої $y=\frac{1}{x}$, $y'=-\frac{1}{x^2}$. Змінна *x* відіграє роль параметра. Початковій точці кривої відповідає $x=4$, кінцевій – $x=1$:

$$\int_L x^2dx+\frac{dy}{y^2}=\int_4^1 x^2dx-\frac{1}{x^2}x^2dx=\int_4^1 (x^2-1)dx=-18.$$

Приклад. Обчислити $\int\limits_L ydx + xdy$, де L – дуга астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, що пробігається від $A(a,0)$ до $B(0,a)$.

Розв′язання. Знайдемо:

$dx = -3a\sin t\cos^2 tdt$, $\qquad dy = 3a\sin^2 t\cos tdt$,

$$ydx + xdy = -3a^2\sin^4 t\cos^2 tdt + 3a^2\cos^4 t\sin^2 tdt =$$

$$= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t - \sin^2 t)dt = \frac{3}{4}a^2\sin^2 2t\cos 2tdt.$$

Початковій точці шляху відповідає $t = 0$, кінцевій – $t = \dfrac{\pi}{2}$, тоді

$$\int\limits_L ydx + xdy = \frac{3}{4}a^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2t\cos 2tdt = \frac{3}{8}a^2\left.\frac{\sin^3 2t}{3}\right|_0^{\pi/2} = 0.$$

Приклад. Обчислити $\int\limits_L y^2dx + x^2dy + z^2dz$, де L – відрізок прямої у просторі від точки $A(1,0,2)$ до $B(3,1,4)$.

Розв′язання. Складемо рівняння прямої, що проходить через точки A і B:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2} = t.$$

Одержимо параметричні рівняння прямої:

$x = 2t + 1, dx = 2dt;$

$y = t, dy = dt;$

$z = 2t + 2, dz = 2dt.$

Параметр змінюється в межах $t_A \le t \le t_B$, тобто $0 \le t \le 1$, тоді

$$\int\limits_L y^2dx + x^2dy + z^2dz =$$

$$= \int\limits_0^1 2t^2dt + (1+2t)^2dt + (2t+2)^2 2dt = \int\limits_0^1 (14t^2 + 20t + 9)dt = \frac{71}{3}.$$

Приклад. Знайти площу еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Розв′язання. Перейдемо до параметричних рівнянь $x = a\cos t; y = b\sin t$. Додатному обходу контуру відповідає зміна параметра t від 0 до 2π, тоді

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} a\cos tb\cos tdt + b\sin ta\sin tdt = \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2}2\pi = \pi ab.$$

Приклад. Перевірити, що даний вираз є повним диференціалом функції $u(x, y)$, і знайти цю функцію: $(1-\sin 2x)dy-(3+2y\cos 2x)dx = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Розв′язання. Знайдемо: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -2\cos 2x; \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2\cos 2x$.

Оскільки $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом функції $u(x, y)$. Знайдемо цю функцію, приймаючи $x_0 = 0; \quad y_0 = 0$:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C = \int_0^x -3dx + \int_0^y (1-\sin 2x)dy + C =$$

$$= -3x + (1-\sin 2x)y + C.$$

Приклад. Обчислити $\oint\limits_L - x^2ydx + xy^2dy$, де L – коло $x^2 + y^2 = a^2$, що пробігається в додатному напрямку.

Розв′язання. Маємо $P(x, y) = -x^2y; \quad Q(x, y) = xy^2$; $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -x^2; \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y^2$.

Оскільки функції $P(x, y), \quad Q(x, y), \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ – неперервні в області D, обмеженій колом L, застосуємо формулу Гріна:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy;$$

$$\oint\limits_L - x^2ydx + xy^2dy = \iint\limits_{(D)} \left(y^2 + x^2\right)dxdy.$$

У подвійному інтегралі перейдемо до полярних координат, тому що область інтегрування D – це круг $x^2 + y^2 \le a^2$:

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi; \quad x^2 + y^2 = a^2 = \rho^2;$$

$$\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy = \iint\limits_D \rho^2\rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{a^4}{4}2\pi = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Приклад. Знайти функцію за повним диференціалом: $du = \dfrac{2(zxdy + xydz - yzdx)}{(x-yz)^2}$.

Розв′язання. Щоб знайти $u(x,y,z)$, проінтегруємо цей вираз уздовж ламаної M_0ABM, відрізки якої паралельні координатним осям, обравши початкову точку в $M_0(1,0,0)$:

$$u(x,y,z)=\int\limits_{M_0M} du=\int\limits_{M_0A} du+\int\limits_{AB} du+\int\limits_{BM} du\,.$$

Обчислимо кожний інтеграл окремо.

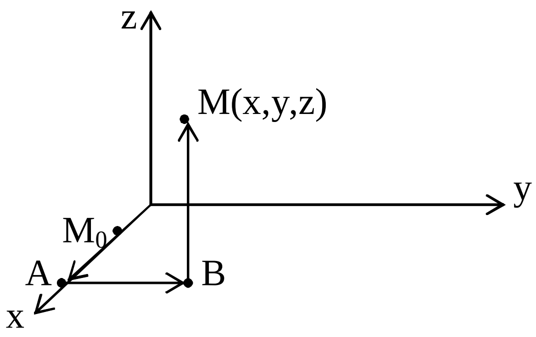


Рис. 13.3

Рівняння лінії M_0A: $y=0, \quad z=0 \;\Rightarrow\; \int\limits_{M_0A}\frac{2(zxdy+xydz-yzdx)}{(x-yz)^2}=0\,.$

Рівняння лінії AB: $x=const, \quad z=0 \;\Rightarrow\; \int\limits_{AB}\frac{2(zxdy+xydz-yzdx)}{(x-yz)^2}=0\,.$

Рівняння лінії BM : $x=const, \quad y=const \;\Rightarrow\; \int\limits_{BM}\frac{2(zxdy+xydz-yzdx)}{(x-yz)^2}=$

$$=2\int_0^z\frac{xydz}{(x-yz)^2}=-2x\int_0^z\frac{d(x-yz)}{(x-yz)^2}=\frac{2x}{(x-yz)}\Bigg|_0^z=\frac{2x}{x-yz}+C.$$

Отже, $u(x,y,z)=\dfrac{2x}{x-yz}+C\,.$

Контрольні завдання до розділу 13

Завдання 1. Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду:

13.1.1. $\int\limits_L (xy-x)dl\,; L$ − дуга кривої: $y=2\sqrt{x}, \quad (0\le x\le 2)$.

13.1.2. $\int\limits_L (x+y)^2 dl; \quad L:$ *відрізок* $AB, \; A(1,0), \; B(0,1)$.

13.1.3. $\int\limits_L \sqrt{1+\cos^4 x}\,dl; \quad L: y=\mathrm{tg}\,x \quad (0\le x\le \frac{\pi}{4})$.

13.1.4. $\int\limits_L \sin x\sqrt{1+\sin^4 x}dl$; L: $y=\operatorname{ctg} x$ $(\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2})$.

13.1.5. $\int\limits_L (x^2-2y)dl$; L: $x=2y^2$, $0\le x\le 2, y\ge 0$.

13.1.6. $\int\limits_L \sin^4 x\cos x dl$; L: $y=\ln\sin x$ $(\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3})$.

13.1.7. $\int\limits_L \sin^2 x\cos^3 x dl$; L: $y=\ln\cos x$ $(0\le x\le\frac{\pi}{4})$.

13.1.8. $\int\limits_L \sin^4 x\cos^2 x dl$; L: $y=\ln\operatorname{cosec} x$ $(\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{3})$.

13.1.9. $\int\limits_L \cos^4 x\sin^2 x dl$; L: $y=\ln\sec x$ $(0\le x\le\frac{\pi}{6})$.

13.1.10. $\int\limits_L x dl$; L − дуга кола: $\rho=R$ $(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$

13.1.11. $\int\limits_L \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$; L − дуга синусоїди: $y=\sin x$ $(0\le x\le\pi)$.

13.1.12. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$; L – верхня половина кардіоїди: $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

13.1.13. $\int\limits_L \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl$; $L: y=\cos x$ $(0\le x\le\frac{\pi}{2})$

13.1.14. $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)^{1/2} dl$; L – дуга кола: $x^2+y^2=16, y\ge 0$.

13.1.15. . $\int\limits_L \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl$; $L: y=\cos x$ $(0\le x\le\frac{\pi}{2})$

13.1.16. $\int\limits_L \sqrt{y^2+x^2}dl$; L – дуга кола: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$.

13.1.17. $\int\limits_L y dl$; L – перша арка циклоїди:

$x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$.

13.1.18. $\int\limits_L (x+2y-3z)dl$; L − відрізок прямої між точками

$A(1,3,-1), \quad B(3,5,-1)$.

13.1.19. $\int\limits_L (x-y+z)dl$; L − відрізок прямої між точками $A(0,1,2), \quad B(4,3,4)$.

13.1.20. $\int\limits_L (y-x\sqrt{x^2+y^2})dl$; L − дуга кривої: $x^2+y^2=4, y\ge 0$.

13.1.21. $\int\limits_L (x+3y)dl$; L – дуга кривої: $x^2+4y^2=4,\ x\ge 0, y\ge 0$.

13.1.22. $\int\limits_L (y+5x)dl$; L − відрізок прямої: 2y-3x=6, $0\le x\le 3$.

13.1.23. $\int\limits_L (x^2+y^2)dl$;

$L:\quad x=a(\cos t+t\sin t),\ \ y=a(\sin t-t\cos t) \quad (0\le t\le 2\pi)$. $0\le x\le 3$

13.1.24. $\int\limits_L xyzdl$; $L: \quad x=\frac{1}{2}t^2, \quad y=t, \quad z=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3} \quad (0\le t\le 1)$.

13.1.25. $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$; L - дуга гвинтової лінії:

$x=a\cos t, \quad y=a\sin t, \quad z=bt \quad (0\le t\le 2\pi)$.

13.1.26. $\int\limits_L xydl$; L − дуга еліпса: $x=a\cos t, \quad y=b\sin t \quad (0\le t\le \frac{\pi}{2})$.

13.1.27. $\int\limits_L zdl$; L − дуга конічної гвинтової лінії: $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t \quad (0\le t\le \pi)$;

13.1.28. $\int\limits_L \frac{dl}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; L − дуга гіперболічної спіралі $\rho\varphi=1, \quad \varphi_1=\sqrt{3}, \quad \varphi_2=2\sqrt{2}$.

13.1.29. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$; L − коло: $x^2+y^2=Rx$.

13.1.30. $\int\limits_L (xy+x)dl$; L − дуга параболи y=2x^2+1, $0\le x\le 1$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Архипова Е.С., Болотина Л.В. Методические указания и контрольные задания по теме «Сходимость числовых рядов» по курсу высшей математики. Харьков, ХПИ, 1984, 14 с.

2. Архипова Е.С., Ажиппо Л.А. Методические указания и контрольные задания по теме «Кратные интегралы». Харьков, ХПИ, 1988, 20 с.

3. Архипова Е.С., Ажиппо Л.А. Методические указания к типовым расчетам и варианты контрольных заданий по теме «Приложение производных к построению графиков функций, заданных параметрически» Харьков, ХПИ, 1990, 21 с.

4. Курпа Л.В, Архипова Е.С., Корниль Т.Л. Высшая математика. Общий курс. Харьков, ХГПУ,1997,173 с.

5. Курпа Л.В, Архипова Е.С., Корниль Т.Л. Учебное пособие и контрольные задания по курсу высшей математики для студентов экономических специальностей. Харьков, ХГПУ, 1998, 170 с.

6. Архипова Е.С., Курпа Л.И. Ряды. Учебно-методическое пособие для студентов инженерно-физических, машиностроительных и экономических специальностей. Харьков, ХГПУ, 1999, 79 с.

7. Курпа Л.В., Архипова Е.С. и др. Математика для экономистов. Решение задач и варианты индивидуальных заданий. Харьков, ХГПУ, 1999, 333 с.

8. Курпа Л.В., Архипова Е.С. и др. Высшая математика. Решение задач и варианты типовых расчетов. Часть 1. Харьков, ХГПУ, 1999, 287 с.

9. Курпа Л.В., Архипова Е.С. и др. Высшая математика. Решение задач и варианты типовых расчетов. Часть 2. Харьков, ХГПУ, 1999, 279 с.

10. Курпа Л.В., Архіпова О.С. та інші. Вища математика. Розв’язання задач та варіанти типових розрахунків. Том 1. Харків, НТУ „ХПІ”, 2002, 315 с.

11. Курпа Л.В., Архіпова О.С. та інші. Вища математика. Розв’язання задач та варіанти типових розрахунків. Том 2. Харків, НТУ „ХПІ” 2002, 311 с.

12. Архіпова О.С., Курпа Л.В. та інші. Higher mathematics. Problem solving and variants of typical calculations. Volume 1. Kharkiv, NTU «Khpi».2004, 316 с.

13. Архіпова О.С., Курпа Л.В. та інші. Higher mathematics. Problem solving and variants of typical calculations. Volume 2. Kharkiv, NTU «Khpi».2004, 305 с.

14. Торкатюк В.И., Шутенко Л.Н., Стадник Г.В., Колосов А.И., Архипова Е.С.,Протопопова В.П. и др. Математический аппарат и методы формирования оптимальных параметров управления процессом функционирования строительного предприятия. Монография. Харьков, 2007, 827 с.

15. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М : Наука, 1971.

16. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М : Наука, 1960.

17. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М : Наука, 1984.

18. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М : Наука, 1988.

19. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Вып. 1. – М : Наука, 1967.

20. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 2. – М : Наука, 1973.

21. Боревич В.И. Определители и матрицы. – М : Наука, 1970.

22. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М : Физматгиз, 1958.

23. Рублев А.Н. Линейная алгебра. – М : Высш. шк., 1968.

24. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М : Наука, 1969.

25. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М : Физматгиз, 1959. – Т.1,2,3.

26. Игнатьева А.В., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф. Курс высшей математики. – М : Высш. шк., 1964.

27. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М : Наука, 1988.

28. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика /Под ред. П.Ф. Овчинникова. – К : Вища шк., 1987.

29. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М: Наука, 1985. – Т.1,2.

30. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.
31. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М : Наука, 1985.
32. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). Учебное пособие для втузов. – М : Высш. шк., 1983.
33. Тевяшев А.Д., Литвин А.Г. Высшая математика. Общий курс. Сборник задач и упражнений. – Харьков : Рубикон, 1999.
34. Высшая математика для экономистов. /Под ред. Н.Ш.Кремера – М: ЮНИТИ, 1997.

Навчальне видання

АРХІПОВА Олена Семенівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Для студентів 1 курсу денної та заочної форми навчання за напрямами підготовки
6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)»,
6.170202 «Охорона праці»

В авторській редакції

Відповідальний за випуск *А. І. Колосов*
Комп'ютерне верстання *Є. Г. Панова*

План 2014, поз. 49 Л

Підп. до друку 28.01.2014 Формат 60 х 84 /16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 6,3
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.