MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 12 (1), 2019 doi: 10.4995/msel.2019.11001.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universitat Politècnica de València

¿Cómo modelizan los futuros profesores en situaciones de área y perímetro? El papel de las unidades y de las fórmulas

How do future teachers model area and perimeter situations? The role of units and formulae

Jesús Montejo-Gámez
Universidad de Granada
jmontejo@ugr.es.

Elvira Fernández-Ahumada
Natividad Adamuz-Povedano
Universidad de Córdoba
elvira@uco.es, nadamuz@uco.es.

Abstract

Se presenta una investigación que explora el tipo de modelo que los futuros profesores de educación primaria y secundaria desarrollan cuando trabajan en situaciones de medida. La muestra empleada estuvo compuesta por un total de 12 alumnos de máster de formación de profesorado y 13 estudiantes del grado en educación primaria, que resolvieron en grupos una tarea diseñada específicamente para trabajar la medida a través de la modelización. El análisis de los modelos producidos por los futuros profesores reveló gran riqueza de ideas y evidenció limitaciones al uso de fórmulas para el cálculo y estimación de áreas. Los resultados también indican relación entre la cercanía del modelo con la situación en contexto y la tendencia de los participantes a validarlo, así como la importancia del formato de la tarea empleada sobre los modelos producidos.

This study explores those skills associated with modeling that preservice primary and secondary teachers develop when working with measure. The sample was made up of a total of 12 master's degree students and 13 primary school teacher students, who worked in groups to solve a task, which was specifically designed to develop skills associated with measure through modeling. The analysis of the models produced by the prospective teachers revealed a great wealth of ideas and evidence of the dependence on formulae for the calculation and estimation of areas. Results also indicate relationship between the model's closeness to the real situation and the tendency of participants to validate it, as well as the importance of the layout of the task on the produced models.

Palabras clave: Formación de profesorado, Modelización matemática, Análisis de modelos, Medida.
Keywords: Teachers Training, Mathematical Modelling, Analysis of Models, Measurement.

1. Introducción

A lo largo de los últimos años, el planteamiento de las políticas educativas a nivel internacional así como los currículos escolares vienen haciendo hincapié en el papel esencial de la competencia matemática de los ciudadanos como una característica indispensable para participar en la sociedad actual de forma productiva (Comisión Europea/EACEA/Eurydice, 2012; NCTM, 2000; OCDE, 2013). Esta importancia del conocimiento matemático útil también se ve reflejada en nuestra experiencia diaria de forma cada vez más patente, en un contexto social que exige el pensamiento crítico de los individuos y su participación en la resolución de problemas en diferentes ámbitos de la vida cotidiana.

El debate educativo sobre cómo debe abordarse el desarrollo de esta competencia matemática en las enseñanzas formales es extenso y avanza con lentitud (Venkat y Winter, 2015). No obstante, la investigación en educación matemática, al igual que diversas instituciones a nivel internacional están promoviendo enfoques educativos basados en un denominador común: un modelo de aprendizaje que promueve la aplicación del conocimiento matemático a la vida diaria (De Lange, 2003). Estos son los casos, por ejemplo, de la perspectiva STEM (del inglés Science, Technology, Engineering and Mathematics), que propone el desarrollo de las competencias asociadas a las diferentes disciplinas científico-técnicas desde un enfoque integrado (véase Comisión Europea/EACEA/Eurydice, 2012) o la Educación Matemática Realista (Van den Heuvel-Panhuizen, y Drijvers, 2014), que defiende que el aprendizaje matemático es inseparable de la situación real en la que es aplicable y por tanto, solo se aprende matemáticas trabajándolas directamente en dicho contexto. Estos dos casos ilustran cómo la comunidad educativa concibe hoy en día la educación matemática asociada a dos destrezas matemáticas transversales a los contenidos. En primer lugar, el establecimiento de conexiones no solo entre los diferentes conceptos matemáticos (NCTM, 2000) sino, sobre todo, entre conocimientos matemáticos y extramatemáticos. En segundo lugar, la resolución de problemas vinculados a estos conocimientos, para los que las matemáticas son una herramienta útil que permite describir y predecir fenómenos propios de diferentes campos de conocimiento. En relación a estas destrezas, Niss (1999) señaló que no hay una transferencia automática del conocimiento matemático hacia la capacidad de resolver problemas no rutinarios, por lo que la modelización debe ser objeto de estudio no solo para los docentes, sino también para los investigadores (García et al., 2006). A pesar de que la investigación no posee una noción homogénea, hay características que permiten describir a grandes rasgos cómo se entiende la modelización en educación matemática en torno a su naturaleza y a su finalidad.

En cuanto a su naturaleza, la modelización es una actividad escolar de carácter procesual. En este sentido, autores como Freudenthal (1973) en el contexto de la Educación Matemática Realista, identificaron las matemáticas escolares como una actividad humana que no se puede desarrollar sin matematización. En la misma línea, desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Chevallard, Bosch y Gascón (1997) identificaron gran parte del conocimiento matemático como una actividad de modelización y enfatizaron que el conocimiento matemático es una actividad humana y, como parte de las matemáticas, la modelización también lo es. Esta actividad, además, está asociada a un proceso de trabajo que se estructura en diferentes tipos de actividades. Bajo esta perspectiva se pueden establecer esquemas teóricos basados en la descripción de dichas actividades. Es el caso de Blum y Leiß (2007) y Borromeo-Ferri (2006), que propusieron *ciclos de modelización*, es decir, esquemas donde el proceso de modelización se desarrolla a través de una secuencia de acciones idealmente cíclica que se realizan para abordar una situación problemática. Del mismo modo, Ärlebäck (2009) propuso el Diagrama de la Actividad de Modelización, basado en los grafos de resolución de problemas de Schoenfeld (1985), que se centra en la secuencia temporal (esta vez no cíclica) de las tareas que se llevan a cabo para abordar problemas de estimación de grandes cantidades. Pueden verse ejemplos de otros planteamientos similares en Kaiser (2014).

En cuanto a su finalidad, la modelización se lleva a cabo para crear modelos que permitan obtener información sobre cierto sistema y así desarrollar determinadas habilidades en los estudiantes. En efecto, el proceso de modelización busca obtener un producto final del proceso (Sriraman, 2006), que constituye un modelo. Este debe introducir un cambio de lenguaje entre el mundo real y las matemáticas (Blum y Borromeo-Ferri, 2009; Niss, 2012) o entre diferentes descripciones matemáticas (García et al., 2006) y se basa en ciertas representaciones para expresar la conexión entre los diferentes elementos del sistema real y su matematización (Lesh y Hairel, 2003; Montejo-Gámez y Fernández-Ahumada, 2019). Esta conexión es necesaria para generar conocimiento sobre un sistema de interés (Chevallard, 1989). Los escolares trabajan sobre las conexiones y el modelo, desarrollando así determinadas destrezas específicas. A este respecto, Blomhøj y Højgaard (2003) definieron la competencia de modelización matemática como aquella que permite al individuo llevar a cabo el proceso de modelización completo, idea que fue desarrollada por Niss y Højgaard (2011), incluyéndola dentro del proyecto KOM como una competencia matemática que debe desarrollarse en la etapa escolar y, como señalaron García et al. (2006), tiene un valor didáctico doble: por una parte se pueden proponer tareas de modelización para trabajar las destrezas específicas de modelización, mientras que por otra se pueden aprovechar situaciones de modelización como una herramienta para la comprensión de otros contenidos matemáticos.

La integración de estas características destacadas permite entender la modelización en educación matemática como "*la actividad que involucra el desarrollo de ciertas destrezas, surge a partir de una cuestión sobre cierto sistema y se desarrolla mediante el proceso de diseño, aplicación y evaluación de modelos que permiten utilizar las matemáticas para construir conocimiento acerca del sistema*" (Montejo-Gámez y Fernández-Ahumada, 2019, p. 2). Esta definición permitió abordar la investigación que se presenta en este trabajo, cuya estructura es la siguiente: a lo largo de esta primera sección se exponen algunos beneficios del desarrollo de destrezas de modelización para la formación inicial del profesorado de matemáticas. A continuación se describen investigaciones precedentes en este contexto, que apuntan hacia la necesidad de trabajar situaciones asociadas a medida con los futuros profesores. Esos resultados generan los objetivos específicos que se describen en la sección 2. A continuación se detalla la metodología (sección 3), en la que se incluye la definición de modelo matemático empleada en este estudio, y se exponen los resultados (sección 4), los cuales se discuten en la sección 5, donde también se extraen conclusiones de la investigación llevada a cabo.

1.1. Modelización matemática en la formación del profesorado

Son numerosos los autores que han enfatizado los beneficios de trabajar la modelización a diferentes niveles educativos. De forma general, Niss (2003) destacó la relación entre la modelización y destrezas específicas asociadas a procesos, mientras que Gallart, Ferrando y García-Raffi (2014) encontraron mejoras en el nivel de competencia matemática PISA de alumnos de secundaria que trabajaron con tareas de modelización abiertas. De forma específica, la literatura también apoya la idoneidad del empleo de actividades de modelización para desarrollar capacidades asociadas a la resolución de problemas presentados en contexto (Niss y Højgaard, 2011) y las conexiones (Montoya Delgadillo et al., 2017). En esta línea, Stacey (2015) señaló que adquirir las capacidades que permiten al individuo conectar las matemáticas con el mundo real constituye uno de los objetivos más importantes para el desarrollo matemático de los ciudadanos. Por su parte, De Lange (2003) incidió en que el trabajo con tareas de modelización promueve el compromiso de los estudiantes con la comprensión y la aplicación de los contenidos matemáticos escolares. En la misma línea, Gravemeijer y Doorman (1999) destacaron la importancia de la modelización no solo para estimular las conexiones, la resolución de problemas y estimular la motivación del alumnado, sino también para la comprensión de fenómenos propios de otras disciplinas científicas, técnicas o de ciencias sociales.

En el contexto de formación de profesorado, la importancia del trabajo con tareas de modelización es especialmente significativa en tres sentidos. En primer lugar, fortalece el conocimiento de los contenidos matemáticos. A este respecto, Mathews y Redd (2007) afirmaron que la modelización permite a los profesores en formación aplicar conceptos y procedimientos matemáticos a través del abordaje de situaciones presentadas en contexto y la formación inicial es el momento adecuado para plantearles este tipo de situaciones (Colwell y Enderson, 2016). En segundo lugar, supone un apoyo metodológico para los futuros profesores. En efecto, Doerr (2007) enfatizó que los profesores de matemáticas en formación necesitan experiencias sobre modelización, ya que estas les proporcionan un conjunto de contextos y herramientas para la enseñanza que no solo potencian su reflexión sobre el significado de los conceptos matemáticos sino que constituyen ejemplos prácticos que posteriormente ellos mismos pueden utilizar como docentes. En tercer lugar, la modelización estimula el pensamiento crítico y la reflexión sobre la importancia de las matemáticas (Kaiser et al., 2006). Además, debe destacarse que habituar a los futuros profesores a este tipo de actividades contribuye a mejorar su predisposición a implementarlas en el aula. En este sentido, Burkhardt (2004) apuntó hacia un posible rechazo del profesorado a implementar experiencias de modelización, debido a que la enseñanza se vuelve más abierta y menos predecible. Por su parte, Cabassut y Ferrando (2017) encontraron relación entre la actitud hacia la enseñanza de la modelización y la confianza del profesorado en su labor docente. En consecuencia, un contacto adecuado en el periodo de formación inicial puede contribuir a que los futuros profesores y maestros valoren y apliquen todos los beneficios expuestos.

Las ventajas que presenta la modelización en la formación de profesorado da lugar a algunas investigaciones empíricas que han explorado el alcance del conocimiento matemático activado por futuros profesores en situaciones de modelización. Desde el punto de vista del conocimiento del profesor, Huincahue Arcos, Borromeo-Ferri y Mena-Lorca (2018) exploraron las reflexiones de profesores de matemáticas en formación inicial que participaron en un curso de modelización para conocer la influencia del curso en el conocimiento especializado de los futuros profesores. Desde el punto de vista del proceso de modelización, se ha observado la importancia de la validación de los modelos producidos. Este es el caso de Gallart et al. (2014), que analizaron las transiciones entre las diferentes fases del ciclo de Blum y Leiß (2007) al resolver ítems liberados de PISA. De forma análoga, Bukova-Güzel (2011) examinó en qué medida profesores en formación inicial implementaban el ciclo de modelización al resolver los problemas que ellos mismos propusieron, observando dificultades en la validación, y también en la interpretación de los modelos propuestos. Hıdıroğlu, Dede, Kula-Ünver y Bukova-Güzel (2017) analizaron las soluciones que estudiantes para profesores de secundaria daban en una situación de medida (*El problema de las alfombras de Eşme*, véase Hıdıroğlu et al., 2017), encontrando dificultades en las fases del ciclo que comienzan con la matematización. En esta investigación las dificultades en el proceso de modelización guardaban relación con conocimientos asociados al uso de las unidades de medida y al área. Similares resultados fueron obtenidos por Montejo-Gámez, Fernández-Ahumada, Jiménez-Fanjul, Adamuz-Povedano y León-Mantero (2017), que constataron la necesidad de reforzar el trabajo con unidades de medida en tareas de modelización asociadas a pensamiento visual con maestros de educación primaria en formación inicial. Concretamente, se observó dependencia del uso de fórmulas y confusiones a la hora de utilizar unidades de medida diferentes a las del sistema métrico y en situaciones donde se mezclan ideas de longitud y de área. Las investigaciones antecedentes que se han señalado plantean interrogantes sobre el tipo de conocimiento que se activa para modelizar situaciones de medida y de qué forma el profesorado activa dicho conocimiento para producir y validar modelos en dichas situaciones. Estas cuestiones centran el foco del estudio que se presenta.

2. Objetivos

Esta investigación explora las características de los modelos que diferentes profesores en formación inicial desarrollan ante una situación contextualizada que involucra medida, así como la capacidad para validarlos y los conocimientos sobre medición que activan para responder a cuestiones abiertas. Específicamente, se busca:

O1: Conocer los modelos que desarrollan profesores en formación inicial en situaciones contextualizadas de medida, prestando atención específica a la validación de los mismos.

O2: Comprender cómo los estudiantes para profesores ponen en juego las nociones asociadas a la medida para producir y validar los modelos generados.

3. Metodología

Para alcanzar los objetivos arriba indicados, y desde la perspectiva de modelización como una herramienta para la adquisición de otros conceptos (García et al., 2006), se hizo uso de una tarea diseñada siguiendo los principios de la matemática realista (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014) y de las Modelling Elicit Activities (Lesh et al., 2000). Dicha tarea (Figura 1) planteaba una situación en el contexto realista de un aula escolar, que podía ser abordada desde distintos enfoques y con la que se pretendía trabajar representaciones pictóricas a escala y uso integrado de diferentes unidades de medida, así como la elaboración de justificaciones razonadas del enfoque elegido y la descripción de un método útil para un aula genérica. La tarea se planteó a un total de 25 docentes en formación inicial, de los cuales 13 eran estudiantes de primero del grado en educación primaria y 12 cursaban el máster de formación del profesorado. Todos ellos trabajaron en la resolución de la tarea de forma grupal. Se constituyeron tres grupos con miembros del grado en educación primaria y cuatro con componentes del máster en formación del profesorado.

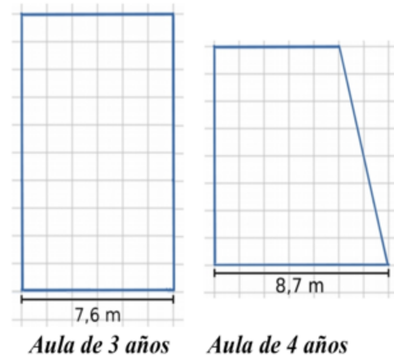
Se llevó a cabo un proceso de recogida de información con el que se obtuvieron 7 registros escritos con las soluciones proporcionadas por los participantes. No hubo interacciones entre los diferentes grupos.

3.1. Definición de modelo y estrategia analítica

Para abordar el objetivo 1 y caracterizar los modelos analizados, se hizo uso de la definición de modelo propuesta por Montejo-Gámez y Fernández-Ahumada (2019). Dicha definición trata de aunar las siguientes características: (i) estructura conjuntista que permite establecer focos de atención para la investigación educativa; (ii) independencia de un problema concreto; (iii) inclusión de una estructura matemática y (iv) toma en consideración de los sistemas de representación empleados. Una integración adecuada de estos elementos permite proporcionar la siguiente definición de modelo para la investigación en educación matemática:

"El director del CEIP Europa desea habilitar una ludoteca en un aula de infantil. La normativa indica que las ludotecas deben ocupar ***exactamente la cuarta parte del aula*** *y estar delimitadas con una valla especial. El colegio dispone de 10 m de esa valla, pero no puede gastar dinero en más, por lo que ha pedido a los maestros de infantil que le expliquen si se puede habilitar la ludoteca en su aula y cómo hacerlo.*

a) El maestro de los niños de 3 años cree que la ludoteca podría estar en su aula (tenéis debajo un plano del aula a escala), pero no sabe cómo situarla. Justificad razonadamente si lleva razón y, en caso de que sí, explicad cómo podría situarse la valla y cuánta valla sobraría.



b) Aplicad el método obtenido en a) para saber si puede habilitar la ludoteca en el aula de infantil de 4 años con los diez metros de valla y cuánta valla sobraría. El plano a escala de este aula lo tenéis a continuación.

c) Si el método aplicado en a) no funciona en el aula de 4 años, decid por qué e inventad uno nuevo que sí funcione en las dos aulas. Usadlo para explicar cómo habría que situar la valla en cada una de las aulas y cuánta valla sobraría en cada caso."

Figura 1: Tarea utilizada en el presente estudio.

Un modelo matemático es una terna (S, M, R), donde:

• S es el *sistema* sobre el que se quiere obtener conocimiento. Se compone de los objetos del sistema, sus propiedades y las relaciones entre objetos y propiedades.

• M es la *matematización* (conceptual) del sistema, es decir, la colección de conceptos y propiedades matemáticas que abstraen la información relevante de los elementos de S junto con la colección de relaciones que se aplican para extraer conocimiento matemático a partir de dichos elementos.

• R es la *representación* matemática del sistema, es decir, el conjunto de descripciones explícitas de los elementos de M que permiten trabajar matemáticamente con ellos y extraer conocimiento acerca del sistema.

Esta definición se articula en torno a tres componentes indisolubles que presentan diferentes niveles de abstracción: S es real (tanto como el contexto en el que se encuadra el sistema), R es observable y es, por tanto, la vía natural para describir y trabajar con el modelo y M es puramente conceptual, por lo que es inaccesible y difícilmente evidenciable. La característica principal de esta definición es su operatividad, ya que permite establecer categorías para el análisis de modelos matemáticos producidos en contextos educativos. Con el fin de proporcionar una visión completa de la aportación del creador del modelo, se propone descomponer el análisis de la terna (S,M,R) en el estudio de los elementos recibidos y los aportados por el desarrollador del modelo. La parte recibida está constituida por la información que este recibe de forma explícita (el enunciado de una tarea, por ejemplo). Los elementos aportados son todos aquellos objetos o hipótesis sobre S, conceptos o relaciones de M subyacentes al mismo o representaciones novedosas que el creador introduce en R para producir conocimiento a través de trabajo matemático. En este sentido, es de especial interés precisar dos subcategorías dentro de la matematización aportada: (i) las premisas, que son afirmaciones matemáticas cuya veracidad no queda justificada por el desarrollador y que se utilizan explícitamente o subyacen a lo que se describe en R, y (ii) las deducciones, que son aquellas afirmaciones cuya veracidad se justifica expresamente.

Obsérvese que estas subcategorías no son exhaustivas, ya que se pueden encontrar elementos aportados de matematización que no sean premisas ni deducciones. Las concreciones hechas previamente dan lugar a seis categorías de análisis (una de las cuales contiene dos subcategorías destacadas) que dan cuenta de los elementos que caracterizan el modelo matemático a estudiar. Estas categorías inducen una primera etapa de descripción de la parte recibida para un posterior análisis de los elementos aportados. Además, dentro del análisis de cada parte surge una estrategia natural S-R-M, de manera que el investigador puede obtener información completa sobre el modelo a través de tres acciones: en primer lugar (i) prestar atención a los elementos del sistema involucrados para después (ii) centrarse en las representaciones y por último (iii) describir la matematización conceptual del sistema. Esta secuencia de análisis propuesta contrasta con la disposición de las componentes (S, M, R) en la definición. Se optó por esta última ordenación ya que evoca el proceso mental ideal de construcción de un modelo y, por tanto, permite describir las componentes del modelo siguiendo dicho proceso. El seguimiento de dicho proceso mental asocia a esta definición una hipotética secuencia de acciones (de conceptualización y posterior representación) que conducirían a la construcción del modelo, lo que deja de manifiesto la conexión entre las características procesual y de cambio de lenguaje de la modelización. La Figura 2 representa los tres componentes de un modelo matemático dentro de la idea utilizada, incluyendo la distinción entre la descripción de la parte recibida (r) y el análisis de los elementos aportados (c).

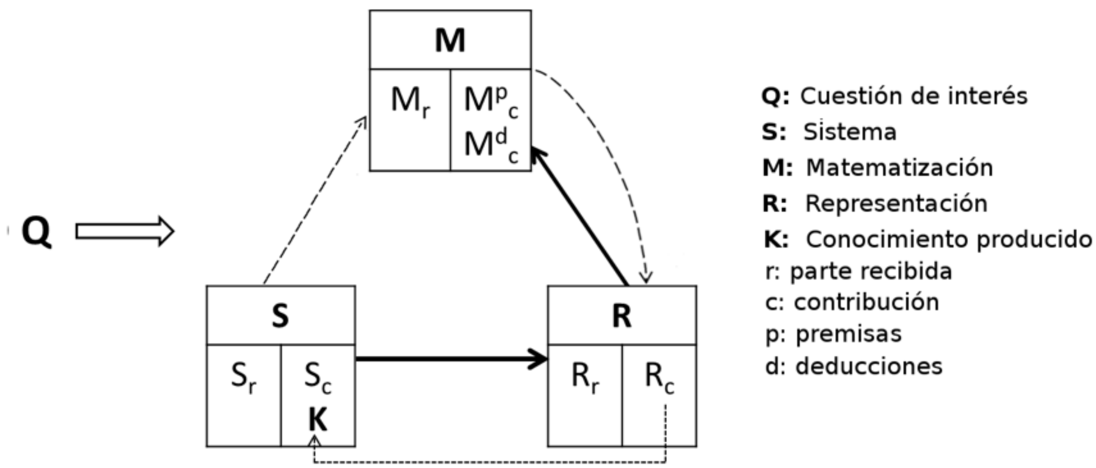


Figura 2: Definición de modelo utilizada en el estudio (Fuente: Montejo-Gámez y Fernández-Ahumada, 2019).

La descripción a partir de la terna (S,M,R) permitió hacer un análisis completo de cada uno de los modelos estudiados, acción que constituyó el primer paso de la estrategia empleada y que se ilustra en la siguiente sección. Para responder a los objetivos planteados se categorizaron los modelos atendiendo a cuatro criterios: i) la geometría de las ludotecas propuestas, ii) el tipo de unidad de medida básico que se empleó en la formulación final de los modelos, iii) el rol del uso de fórmulas para hacer cálculos de áreas y perímetros y iv) las acciones llevadas a cabo para validar los modelos propuestos.

4. Resultados

4.1. Ejemplo de análisis de un modelo

Para ilustrar la información que surgió al aplicar la definición de modelo detallada previamente, se presenta a continuación un ejemplo completo de análisis basado en las categorías S, M y R (Figura 3) . Los participantes que conformaron el grupo cuyo modelo se analiza fueron dos alumnas y un alumno del máster de formación del profesorado de secundaria.

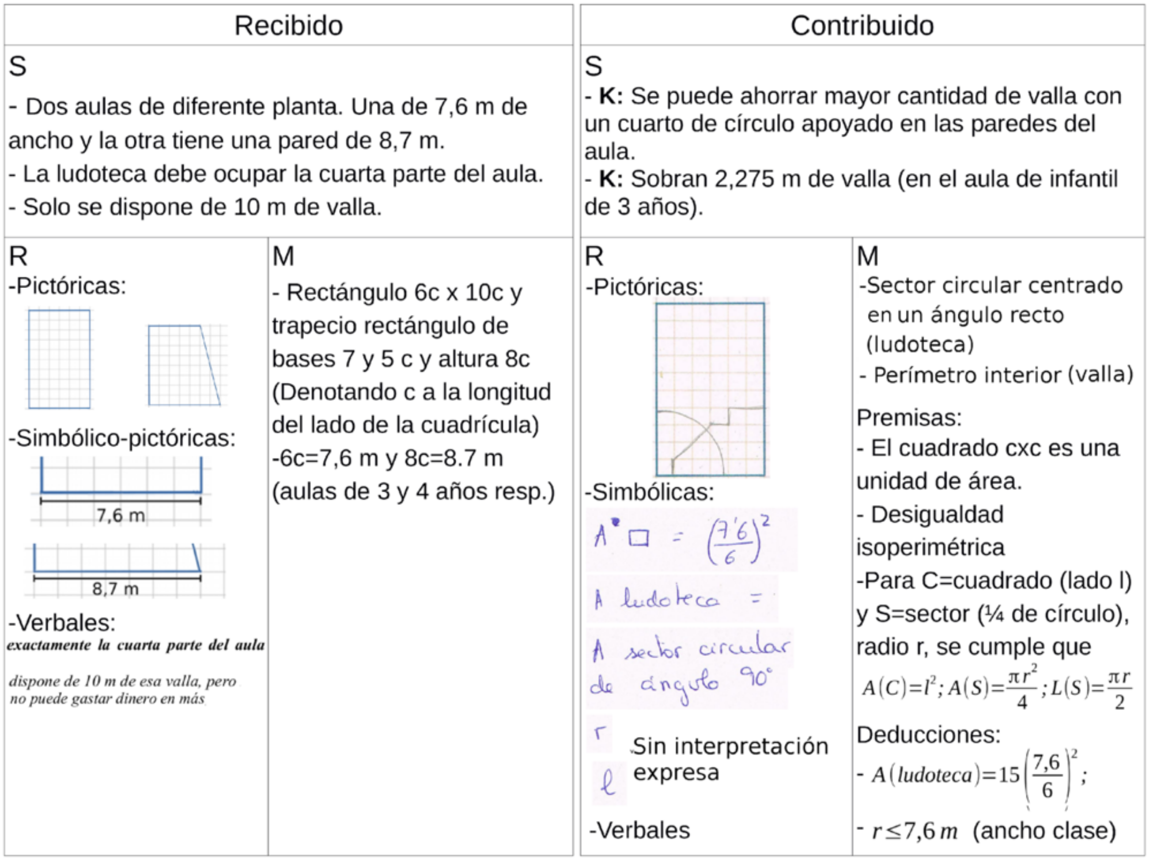


Figura 3: Análisis completo del modelo producido por uno de los grupos participantes.

En el ejemplo analizado se comenzó por el estudio de los elementos aportados al sistema S (Figura 3). En este caso, el grupo no aportó objetos ni hipótesis adicionales a S para generar el modelo. Sin embargo, el conocimiento que aportan sobre el sistema, la forma de colocar la valla, va más allá de la cuestión planteada, ya que proporciona una regla para optimizar el uso de la misma (véase K en S contribuido). La descripción de R confirma, mediante la representación pictórica, la idea básica del modelo, que consistió en aprovechar las paredes del aula y las propiedades del círculo para optimizar la cantidad de valla necesaria para rodear un área fijada (en este caso, la cuarta parte del área del aula). El grupo también utilizó representaciones simbólicas para expresar las áreas y longitudes utilizadas en el modelo. En este sentido, la notación empleada no es completamente simbólica, ya que no es uniforme. Concretamente, utilizan un dibujo de un cuadrado para expresar el área de la cuadrícula, pero escriben "sector circular de ángulo 90º"para expresar el área de su propuesta de ludoteca. Además, emplean las letras "l" y "r"sin un significado explícito. De igual modo, cabe destacar la abundancia de razonamientos verbales que desarrollan lo representado de forma simbólica y pictórica. La matematización (M) del sistema incluyó un sector circular recto para modelizar la ludoteca. Se puede conjeturar, en virtud de los elementos de S y R, que los miembros del grupo aplicaron la desigualdad isoperimétrica para utilizar esta figura plana. En cuanto al conocimiento sobre medida puesto en juego, este grupo evidencia haber trabajado con una unidad de medida asociada al problema concreto (la cuadrícula), como se observa en la igualdad donde se obtiene el área de la ludoteca (véanse las deducciones en M contribuido). Por otra parte, este grupo hizo un uso adecuado de las fórmulas usuales de las áreas y perímetros útiles para dar respuesta a la situación planteada. Finalmente, respecto a la validación del modelo, el grupo la completó a través de dos acciones complementarias: por una parte, se constató que el radio obtenido para el sector circular era menor que el ancho del aula mientras que, por otra parte, se calculó la longitud del perímetro del sector circular para verificar que no superaba los diez metros de valla disponibles.

4.2. Respuesta a los objetivos de la investigación

La Figura 4 describe la categorización hecha para describir los modelos producidos a partir de la geometría de las ludotecas, el tipo de unidad de medida empleado, el rol de las fórmulas para calcular áreas y perímetros y las acciones de validación llevadas a cabo.

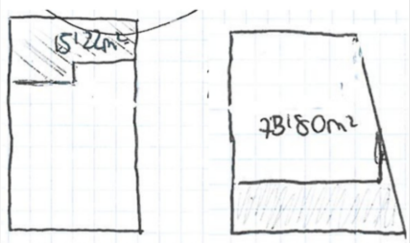
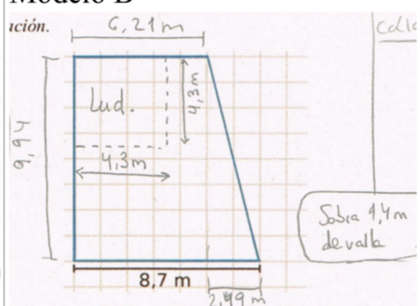
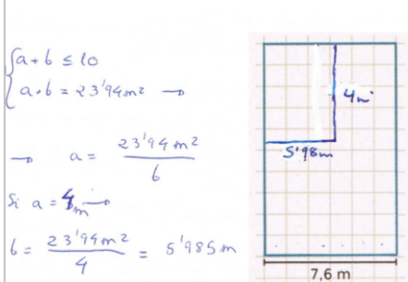
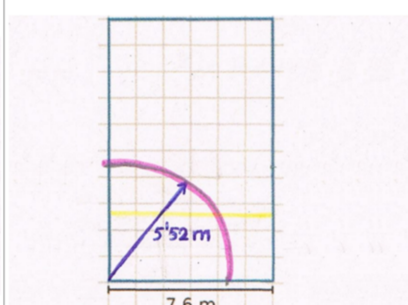
Modelo A	Modelo B
	
Geometría de la ludoteca: polígono irregular Unidad de medida para formulación del modelo: cuadrícula/m/m² Áreas como fórmulas: sí Validación: Sí (y correctamente).	Geometría de la ludoteca: cuadrado de lado indeterminado Unidad de medida para formulación del modelo: m/m² Áreas como fórmulas: sí Validación: Sí (y correctamente). Bastaba con calcular 21
Modelo C	**Modelo D**
	
Geometría de la ludoteca: rectángulo de dimensiones a determinar Unidad de medida para formulación del modelo: m/m² Áreas como fórmulas: sí Validan: Sí (correctamente). Un grupo solo validó el perímetro	Geometría de la ludoteca: sector circular de radio a determinar Unidad de medida para formulación del modelo: cuadrícula/ m/m² Áreas como fórmulas: sí/no Validan: sí (y correctamente), a través de fórmulas

Figura 4: Descripción de los modelos producidos según geometría de las ludotecas, tipo de unidad de medida básica empleada, rol de las fórmulas y acciones de validación utilizadas.

Los modelos de la Figura 4 muestran diferentes niveles de complejidad para abordar situaciones de medida: el modelo A fue el más cercano al contexto del problema y fue surgiendo mediante un proceso de ensayo y error. Por su parte, los modelos B y C incluyeron formulación algebraica permitiendo conjeturar mayor nivel de generalidad. En este sentido, el modelo C es más general, ya que está liberado de la premisa de que la ludoteca debe ser un cuadrado. No obstante, se observó que este mayor nivel de abstracción conllevó distanciamiento del problema original. Por una parte, el modelo C depende de dos incógnitas, lo que obligó a plantear un sistema de ecuaciones para calcular las dimensiones de la ludoteca y así obtener una única solución (que consume toda la valla disponible). Por otra parte, el uso de un sistema de ecuaciones perjudicó la validación de uno de los grupos que lo puso en juego, ya que este grupo no comprobó que se cumpliera la condición sobre la cuarta parte del aula. Por último, el modelo D es el más sofisticado, ya que incluye la intención de optimalidad en el gasto de valla (se aproxima a la resolución de un problema de optimización). Los modelos A y B fueron utilizados por un solo grupo, el primero por estudiantes del grado en educación primaria y el segundo por estudiantes del máster de profesorado. El modelo C fue empleado en tres ocasiones, por un grupo de máster y por dos grupos de educación primaria. El modelo D fue la opción de dos grupos, ambos de alumnado de máster.

Para describir cómo se pusieron en juego las nociones asociadas a la medida en el desarrollo y validación de los modelos, se observó que, de forma generalizada, la unidad de medida básica utilizada para la formulación de cada modelo fue de m o m^2. Esta situación condujo en la mayoría de los casos al desarrollo de cálculos con números decimales, lo que puso de manifiesto que en líneas generales, el área fue concebida como el resultado de una fórmula y no se recogieron evidencias de que se le concediera significado a esta noción dentro de la situación planteada. Un ejemplo de esta concepción de área se puso de manifiesto en uno de los grupos que calculó el área de la cuarta parte del aula utilizando la información de la escala gráfica y posteriormente la dividió entre el lado de la cuadrícula, en lugar de dividirla entre su área, para hallar el número de“baldosas”que debía rodear la valla. No obstante, se encontraron también dos casos en los que se utilizó la cuadrícula como unidad efectiva de medida, como se ilustró en el ejemplo analizado (véase en la Figura 3 el apartado de M contribuido, deducciones) pero los tres grupos del grado de educación primaria evidenciaron la tendencia a identificar áreas con fórmulas.

5. Discusión y conclusiones

Se ha presentado un estudio en el que se indaga el tipo de modelo que futuros profesores de matemáticas desarrollan al abordar situaciones de medida y geometría planteadas en un contexto real. Se observó riqueza de planteamientos pero necesidad de trabajar en mayor profundidad el significado de las unidades de medida en formación inicial del profesorado, especialmente de educación primaria.

En relación a los modelos analizados y la validación de los mismos, los resultados mostraron diversidad de geometrías. En efecto, el análisis de M mostró hasta 4 tipos de figuras geométricas para modelizar la propuesta de ludoteca. Los futuros profesores de educación secundaria mostraron algo más de profundidad al poner en juego (de forma implícita) relaciones como la desigualdad isoperimétrica. Respecto a las representaciones usadas, se observó abundancia de razonamiento verbal, que pudo verse potenciado por la cuestión planteada en el enunciado. De igual forma, los resultados constataron conciencia generalizada en los participantes del estudio sobre la necesidad de validar los modelos creados. De hecho, seis de los siete grupos participantes validaron adecuadamente sus propuestas, resultados que contrastan con los de Bukova-Güzel (2011), que observó dificultades en la validación de propuestas por parte de los participantes en su investigación. En este estudio, el único grupo que no validó la condición sobre el área, presentó una propuesta no válida, lo cual viene a apoyar la importancia de la validación, de acuerdo a lo obtenido por Gallart et al. (2014). Además, este grupo planteó un sistema de ecuaciones alejándose del contexto de la situación planteada. Se conjetura en este sentido que la cercanía al contexto con la que los participantes trabajaron propició que vieran la necesidad de validar los modelos desarrollados.

Respecto al conocimiento sobre medida que se puso en juego, dos de los grupos evidenciaron haber usado la cuadrícula como unidad de medida natural en la situación planteada. Adicionalmente, se observó un uso generalizado de fórmulas para calcular áreas y, salvo en un caso, no se evidenciaron concepciones de medida liberadas del uso de las mismas. Dada la naturaleza de la tarea y la información dada (parte recibida en la figura 3), se ven indicios de la necesidad de trabajar conceptos de medida para llegar más allá de las fórmulas. Esta misma conclusión se extrae de los hallazgos de investigaciones similares como las de Hıdıroğlu et. al (2017) y de Montejo-Gámez et al. (2017), donde se señaló la necesidad de trabajar con situaciones geométricas y de medida en la formación del profesorado. Además, el análisis realizado permitió entrever la influencia de las representaciones recibidas (véase Figura 3, izquierda) sobre los modelos propuestos.

En síntesis, el estudio llevado a cabo sugiere que los futuros profesores de matemáticas son capaces de desarrollar modelos adecuados en situaciones abiertas de medida, aunque debe potenciarse la reflexión sobre el significado de conceptos como área y perímetro, principalmente en el grado de educación primaria. Además, se intuye que la necesidad de validar un modelo está relacionada con la concreción del mismo (cercanía con el contexto en el que se plantea la situación de partida), de forma que desarrollar modelos más abstractos puede generar pérdida de conexión con la situación real y, en consecuencia, difuminar la necesidad de validación. En este sentido, se conjetura que la forma en la que se plantee la cuestión determina el tipo de acciones y de modelos que se obtienen ante situaciones idénticas. Este hecho, junto con la mencionada influencia de las representaciones recibidas por el creador de un modelo, apunta a la importancia del diseño de la tarea sobre los resultados de los trabajos empíricos relacionados con modelización y medida.

La investigación desarrollada presenta algunas limitaciones que deben discutirse. Por un lado, debe mencionarse la baja validez externa del análisis, ya que las conclusiones se basan en solo 7 producciones. Por ello, sería interesante estudiar los resultados al plantear la tarea a un mayor número de futuros maestros de primaria y profesores de secundaria, para observar la variación tanto en planteamiento como en contenido y errores en los conceptos y así contrastar los resultados obtenidos. Como se desprende del párrafo anterior, una limitación inherente a este trabajo es la dependencia de los resultados obtenidos y las conclusiones del mismo respecto de la situación planteada. Por ejemplo, las dificultades relacionadas con la medida que se han observado no podrían quedar de manifiesto ante tareas procedimentales o fuera de contexto. En este sentido, es necesario destacar que la correcta ejecución de dicho tipo de tareas tampoco proporcionaría evidencias de activación de las destrezas matemáticas observadas: en primer lugar, la modelización es en sí misma una actividad compleja que depende del contexto y el sentido que tendría estudiarla de forma aislada tendría que precisarse. En segundo lugar, las concepciones limitadas de las nociones de medida que se han observado están asociadas a la carencia de significado de estas nociones dentro de una situación real, por lo que no se podrían observar fuera de contexto. Por tanto, la investigación en modelización y medida debe asumir esta dependencia y controlar las variables de tarea necesarias para desarrollar estudios empíricos, lo cual constituye un desafío que debe ser objeto de análisis en futuras investigaciones. A la luz de los resultados obtenidos en este trabajo, surgen diferentes interrogantes que es interesante abordar en futuros trabajos: ¿cómo varían los modelos obtenidos al hacer modificaciones en la situación que se plantea? (eliminación de la cuadrícula; alteración de la geometría de las aulas;

descripción verbal de las mismas sin incluir representaciones pictóricas; supresión de la escala gráfica por un dato numérico en el texto, una escala gráfica de área –dar el área del cuadrado unidad– o quitar el dato de medida real e incluir una escala numérica, etc.) ¿Cómo ofrecer la información para observar el uso de unidades asociadas a la situación? ¿Cómo plantear la situación para potenciar el trabajo cerca del contexto y así estimular la validación? Las categorías S, M y R de la definición de modelo utilizada son una herramienta para controlar todas estas variables. Otra limitación que posee el estudio está relacionada con el carácter procesual de la modelización. El examen de los modelos en sí mismo no da cuenta de todo el conocimiento puesto en juego durante la modelización, por lo que deben desarrollarse investigaciones que contemplen el proceso en su conjunto.

Finalmente, es necesario comentar las posibles futuras líneas que surgen de este trabajo. En primer lugar, se han recogido indicios de que el trabajo cerca del contexto implica mayor tendencia a validar los modelos producidos. Debe profundizarse a este respecto para conocer el alcance de esta relación, trabajando con tareas en las que el trabajo matemático esté en mayor o menor medida separado del contexto. Por último, las dificultades que han mostrado los futuros profesores para dar significado al área en una tarea presentada en contexto invita a profundizar en los significados que dan los profesores de matemáticas en formación inicial a este y otros conceptos de medida. Este tipo de estudios en situaciones de modelización contribuirían a dar información de utilidad para la formación inicial del profesorado. Por último, es necesario ahondar en la fiabilidad de los resultados que proporciona la definición de modelo matemático bajo la que se ha trabajado. En este sentido, se propone plantear un estudio comparado del análisis que surge de la definición de modelo utilizada en este trabajo y el que se obtiene a partir de otras definiciones presentes en la literatura. Se abordará esta cuestión en futuras investigaciones.

Referencias

Ärlebäck, J. B. (2009).
Exploring the solving process of group solving Fermi problems from the perspective of the Anthropological theory of didactics.
En M. Pytlak, T. Rowland y W Swoboda (eds.), Proceedings of the Seventh Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 7), (pp. 1010–1020). CERME: Rzeszów (Poland).

Blomhøj, M., Højgaard, T. (2003).
Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning.
Teaching Mathematics and its Applications, 22(3), 123–139.

Blum, W., Leiss, D. (2007).
How do students? and teachers deal with modelling problems?
En C. Haines et al. (Eds), Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics. (pp. 222-231). Chichester: Horwood.

Blum, W., Borromeo-Ferri, R. (2009).
Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?
Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(1), 45–58.

Borromeo-Ferri, R. (2006).
Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process.
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38 (2), 86–95.

Bukova-Güzel, E. (2011).
An examination of pre-service mathematics teachers' approaches to construct and solve mathematical modelling problems.
Teaching Mathematics and Its Applications 30, 19–36

Burkhardt, H. (2004).
Establishing Modelling in the Curriculum: Barriers and Levers.
En H.W.Henn y W. Blum (Eds.), ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education: Pre-Conference. Dortmund, Germany: ICMI.

Cabassut, R. , Ferrando, I. (2017).
Difficulties in Teaching Modelling: A French-Spanish Exploration.
En G.A., Stillman, W. Blum, y G. Kaiser (Eds.), Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education (pp.223-232) Springer International Publishing.

Chevallard, Y. (1989).
Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie: Perspectives curriculaires: la notion de modelisation.
Petit X, 19, 45–75.

Chevallard, Y., Bosch, M. , Gascón, J. (1997).
Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.
Barcelona: ICE/Horsori.

Colwell, J., Enderson, C. M. (2016).
"When I hear literacy": Using pre-service teachers? perceptions of mathematical literacy to inform program changes in teacher education.
Teaching and Teacher Education 53, 63–74

Comisión Europea/EACEA/Eurydice (2012).
El desarrollo de las competencias clave en el contexto escolar en Europa: desafíos y oportunidades para la política en la materia. Informe de Eurydice.
Luxemburgo: Oficina de Publicaciones de la Unión Europea.

De Lange, J. (2003).
Mathematics for literacy.
En B.L. Madison, L.A. Steen (Eds.), Quantitative literacy. Why numeracy matters for schools and colleges (pp. 75–89). Princeton, NJ: The National Council on Education and the Disciplines.

Doerr, H. (2007).
What Knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling?
En Blum, Galbrait, Henn y Niss (Eds). Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study. (pp. 69–78). New York: Springer.

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Freudenthal, H. (1973).
Mathematics as an Educational Task.
Dordrecht, The Netherlands: Riedel Publishing Company.

Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M. (2014).
Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo.
En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, T. Ortega, Investigación en educación matemática (pp. 327–336). Salamanca: SEIEM.

Garcia, F. J., Gascón, J., Ruíz Higueras, L., Bosch, M. (2006).
Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics.
ZDM, 38(3), 226-246.

Gravemeijer, K. , Doorman, M. (1999).
Context problems in realistic mathematics: A calculus course as an example.
Educational Studies in Mathematics, 39 (1-3), 111–129.

Hıdıroğlu, Ç. N., Dede, A. T., Kula-Ünver, S., Bukova-Güzel, E. (2017).
Mathematics Student Teachers? Modelling Approaches While Solving the Designed Eşme Rug Problem.
EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13(3), 873–892

Huincahue Arcos, J., Borromeo-Ferri, R., Mena-Lorca, J. (2018).
El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática.
Enseñanza de las ciencias, 36(1), 99–115.

Kaiser, G. (2014).
Mathematical modelling and applications in education.
En Encyclopedia of mathematics education (pp. 396–404).Springer, Dordrecht.

Kaiser, G., Blomhøj, M., Sriraman, B. (2006).
Mathematical modelling and applications: empirical and theoretical perspectives.
ZDM - Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2), 82–85.

Lesh, R., Harel, G. (2003).
Problem solving, modeling and local conceptual development.
Mathematical Thinking and Learning, 5, 157–189.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., Post, T. (2000).
Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers.
En A. Kelly y R. Lesh (eds.), Research Design in Mathematics and Science Education, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey, 591–646.

Mathews, S. Reed, M. (2007).
Modelling for pre-service teachers.
En Haines, Galbraith, Blum y Khan (Eds.), Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics. (pp. 458–464). Chichester: Horwood Publishing.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E. (2019).
The notion of mathematical model for educational research: insights of a new proposal.
Aceptado para CERME 11.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N., León-Mantero, C. (2017).
Modelización como proceso básico en la resolución de problemas contextualizados: un análisis de necesidades.
En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.). Investigación en Educación Matemática XXI (pp. 347–356). Zaragoza: SEIEM.

Montoya Delgadillo, E. Viola, F., Vivier, L. (2017).
Choosing a Mathematical Working Space in a modelling task: The influence of teaching.
En Dooley, T. y Gueudet, G. (Eds.), Proceedings of the CERME10 (pp. 956–963). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Niss, M. (1999).
Aspects of the nature and state of research in mathematics education.
Educational Studies in Mathematics, 40(1), 1–24.

Niss, M. (2003).
Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project.
En A. Gagatsis y S. Papastavridis (Eds), 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education (pp. 115–124). Athens, Greece: The Hellenic Mathematical Society.

Niss, M. (2012).
Models and modelling in mathematics education.
En Mathematical biology. Degree programs in mathematical biology. (pp. 49–52). Zurich, Switzerland: European Mathematical Society Newsletter.

Niss, M., Højgaard, T. (Eds.) (2011).
Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.
Roskilde: IMFUFA/NSM, Roskilde University.

NCTM. (2000).
Principles and Standards for School Mathematics.
School Science and Mathematics, 47(8), 868–279.
https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2001.tb17957.x

OCDE (2013).
Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias.
Madrid: MECD.

Schoenfeld, A. H. (1985).
Mathematical problem solving.
Orlando: Academic Press.

Sriraman, B. (2006).
Conceptualizing the model-eliciting perspective of mathematical problem solving.
En M. Bosch (Ed.), Proceedings of the CERME4 (pp. 1686–1695). Sant Feliu de Guíxols: FUNDEMI IQS, Universitat Ramon Llull.

Stacey, K. (2015).
The Real World and the Mathematical World.
En K. Stacey y R. Turner (Eds.), Assessing Mathematical Literacy (pp. 57–84). Zurich: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-10121-7

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Drijvers, P. (2014).
Realistic mathematics education.
En S. Lerman (Ed.) Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 521–525). Amsterdam: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8.

Venkat, H., Winter, M. (2015).
Boundary objects and boundary crossing for numeracy teaching.
ZDM Mathematics Education 47, 575–586.