MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 12 (1), 2019 doi: 10.4995/msel.2019.10897.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universitat Politècnica de València

Un modelo de oferta y demanda con incertidumbre
An offer and supply model with uncertainty

C. Burgos, J.-C. Cortés, D. Martínez-Rodríguez, A. Navarro-Quiles, R.-J. Villanueva
Universitat Politècnica de València
clabursi@posgrado.upv.es, jccortes@imm.upv.es, damarro3@etsii.upv.es, annaqui@doctor.upv.es, rjvillan@imm.upv.es.

Abstract

El modelo lineal estático de oferta y demanda es uno de los modelos fundamentales que se estudia en la asignatura de Microeconomía del Grado de Administración y Dirección de Empresas y en otras titulaciones afines. Los estudiantes de estas titulaciones cursan simultáneamente asignaturas de Matemáticas y de Estadística, donde se presentan herramientas determinísticas y estocásticas, respectivamente, que tienen gran aplicabilidad en los modelos que aparecen en Economía. El trabajo que se presenta proporciona un ejemplo sencillo para trabajar de forma multidisciplinar las tres asignaturas anteriormente citadas. Concretamente, se propone la aleatorización del modelo lineal de oferta y demanda, considerando que los parámetros que aparecen en dicho modelo son variables aleatorias, en lugar de constantes deterministas. La motivación de esta "randomización"se basa en el hecho de que en la práctica dichos parámetros deben ajustarse a partir de muestras que contienen la incertidumbre asociada no solo a los errores del muestreo, sino también a la complejidad inherente al comportamiento de consumidor, que influye en la oferta del mercado. Utilizando técnicas de transformación de variables aleatorias, en el trabajo se determina la función de densidad de probabilidad de la funciones de oferta y demanda. Además, dado su interés, obtenemos las distribuciones del precio y de la cantidad de equilibrio del mercado. Posteriormente, los resultados teóricos previamente establecidos son aplicados en un ejemplo numérico haciendo uso de datos obtenidos sintéticamente.

The stationary offer and supply models are useful in order to describe different macro-economical scenarios, for this reason they are one of the most essential tools in different subjects like Macroeconomics taught in the University degrees like Business Administration and Management and similar. The students of those degrees learn simultaneously mathematics and statistics, where they study deterministic and stochastic tools in order to apply them in that kind of models. In this work we present a simple example in order to work in a multidisciplinary way three different subjects, macroeconomics, mathematics and statistics. In particular, we will randomize the linear offer and supply model, considering that the parameters of the model are random variables instead single values. That is, because in some cases the parameters of the model have been fitted using real data, and this data has an intrinsic randomness which it could be given by two different factors, the device or the way we measure the data or the innate randomness to the consumer behaviour. Using the Random Variable Transformation Technique we can obtain the probability density function of the offer and supply functions. Moreover, we will obtain the distributions of the price and amount of equilibrium in the trade. Finally we will show the theoretical results with a numerical example.

Palabras clave: Modelo de oferta y demanda, Microeconomía, Técnica de transformación de variables aleatorias, Incertidumbre, Función de densidad probabilidad, Precio y cantidad en equilibrio.
Keywords: Offer and Supply Model, Microeconomy, Random Variable Transformation Technique, Uncertainty, Probability Density Function, Price and Amount in Equilibrium.

1. Motivación y preliminares

Los **modelos estáticos de oferta y demanda** son fundamentales en asignaturas como Microeconomía del Grado de Administración y Dirección de Empresas, dado que dichos modelos se pueden usar para explicar una gran variedad de escenarios microeconómicos. Los modelos estáticos desempeñan un rol formativo importante ya que permiten introducirse de manera sencilla en los principales aspectos de la modelización matemática en Economía. Los modelos de oferta y demanda describen la interacción en el mercado de un determinado bien, (por ejemplo, café, petróleo, etc.), entre consumidores y productores, en relación con el precio y las ventas del citado bien. En economía, la oferta y la demanda se definen como la cantidad de bienes (o servicios) que los productores están dispuestos a vender a los consumidores o que los consumidores están dispuestos adquirir, en una unidad de tiempo específica. En lo siguiente, para simplificar los resultados obtenidos vamos a suponer que estamos estudiando un mercado de un solo bien y de libre competencia (en terminología microeconómica, en un mercado perfecto). En un mercado perfecto la cantidad ofrecida por el productor y la cantidad demanda por el consumidor dependen ambas del precio de mercado del producto y se rigen por la ley de oferta y demanda. La ley de la oferta indica que la oferta es directamente proporcional, con constante de proporcionalidad positiva, al precio (a mayor precio más unidades se ofrecen). La ley de la demanda indica que la demanda es directamente proporcional, con constante de proporcionalidad negativa, al precio (a mayor precio menor demanda del consumidor). Por tanto la oferta y la demanda hacen variar el precio del bien. El principal objetivo de estos modelos es conocer a qué precio se puede vender la totalidad del producto, evitando así un exceso o escasez de oferta o demanda. Por ello, estos modelos son conocidos como modelos de equilibrio de mercado, buscando así el precio del producto para el cual la oferta iguala a la demanda.

En este trabajo, nos vamos a centrar en el siguiente modelo lineal parámetro-dependiente de oferta y demanda

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Q_D(p) & = & \alpha - \beta p, \\ Q_S(p) & = & -\gamma + \delta p, \\ Q_D(p) & = & Q_S(p), \end{array} \right. \tag{1}$$

donde α, β, γ y δ son constantes positivas, las cuales determinan el comportamiento de la oferta, $Q_S(p)$, y la demanda, $Q_D(p)$, con respecto al precio. En la Figura 1 se han representado las "curvas" de oferta y demanda con respecto al precio.

Esta representación gráfica resulta fundamental para entender el significado económico de los parámetros involucrados. α representa la cantidad que estaría dispuestos a adquirir los demandantes a un precio nulo, por tanto α puede interpretarse como la demanda del mercado cuando el producto no existe todavía en el mercado y las empresas saben por estudios de mercado de su potencial demanda. Por otra parte, γ/δ representa el precio de salida del producto, es decir, el precio mínimo que el fabricante está dispuesto a cobrar para comenzar a producir, y puede interpretarse como los costes de fabricación y el precio a partir el cual el empresario estará dispuesto a ofertar su producto. Finalmente, α/β representa el precio máximo que los compradores están dispuestos a pagar por dicho producto.

En el modelo (1) se añade una tercera condición que representa el **equilibrio del mercado**. Igualando la oferta, $Q_S(p)$, a la demanda, $Q_D(p)$, para que el excedente sea nulo y mediante cálculos sencillos obtenemos que el precio y la cantidad de equilibrio vienen dados por

$$(P_{\mathrm{e}}, Q_{\mathrm{e}}) = \left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}, \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta + \delta} \right). \tag{2}$$

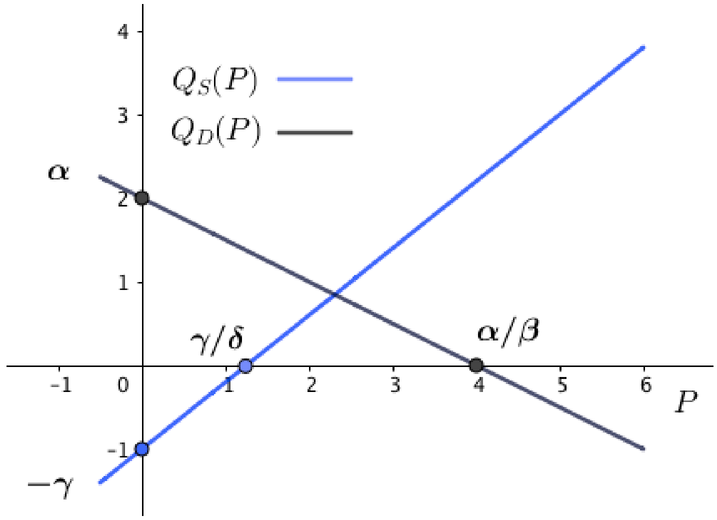

Figura 1: Curvas de oferta y demanda correspondientes al modelo (1).

Dicho punto de equilibrio puede observarse en la Figura 1, siendo este el punto de corte de las funciones de oferta y demanda. Destacar la necesidad de que se cumpla la **condición de compatibilidad** del modelo

$$\alpha\delta > \beta\gamma. \tag{3}$$

La condición (3) nos dice que para cero unidades de un producto el precio que está dispuesto a pagar el comprador siempre debe ser mayor que el precio de salida dado por el fabricante, como se puede observar en la Figura 1. A partir de la condición de compatibilidad (3) podemos asegurar que la cantidad dada en la expresión (2) es positiva y por tanto tiene sentido económico.

Nótese que existen otros modelos, como pueden ser de tipo cuadrático o de tipo logarítmico, entre otros, que ciertamente resultan de gran interés para modelizar el comportamiento en el mercado de algunos productos. Pero en este artículo queremos mostrar de una forma pedagógica cuál puede ser el tratamiento de estos modelos si consideramos incertidumbre en su formulación. Por tanto, desarrollaremos la investigación en torno al problema lineal (1).

Por ello, en este trabajo vamos a considerar que los parámetros que aparecen en el modelo (1) no son conocidos de forma exacta, considerándolos variables aleatorias (VAs). Esto se debe al hecho de que en la práctica dichos parámetros son obtenidos a partir de muestras que contienen la incertidumbre asociada no solo a los errores de muestreo, sino también a la complejidad inherente al comportamiento del consumidor, el cual como hemos dicho antes, influye en la oferta del mercado. Así nuestro modelo aleatorizado es el siguiente

$$\left\{\begin{array}{rcl} Q_D(p,\omega) & = & \alpha(\omega) - \beta(\omega)p, \\ Q_S(p,\omega) & = & -\gamma(\omega) + \delta(\omega)p, \\ Q_D(p,\omega) & = & Q_S(p,\omega), \end{array}\right. \tag{4}$$

donde $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$, $\gamma(\omega)$ y $\delta(\omega)$ son consideradas VAs absolutamente continuas definidas en un espacio de probabilidad completo común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, con función de densidad probabilidad (FDP) conjunta $f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$. Así, las funciones de oferta y demanda son procesos estocásticos (PEs) (VAs para cada valor del precio P) en lugar de funciones deterministas. Conforme a la teoría determinista, vamos a considerar que las VAs tienen dominio positivo que denotaremos, por ejemplo para el parámetro α, $\mathcal{D}(\alpha) \subset \mathbb{R}^+$ (y análogamente para el resto de variables aleatorias). En estos momentos nos preguntamos: ¿Qué significa resolver el problema aleatorizado? y ¿cómo podemos hacerlo?

Dado que nuestra solución es un PE, es importante calcular para cada valor del precio p una medida central de su comportamiento (como la media) y de su variabilidad (como la varianza) para conocer así su comportamiento estadístico. Por ejemplo, dada la linealidad del operador esperanza, denotado por $\mathbb{E}[\cdot]$, la media puede ser fácilmente obtenida

$$\mathbb{E}\left[Q_D(p,\omega)\right] = \mathbb{E}[\alpha(\omega)] - \mathbb{E}[\beta(\omega)]p.$$

Pero nuestras pretensiones va un poco más allá, nos proponemos determinar la primera función de densidad probabilidad (1-FDP) de ambas funciones, $f_1^D(q,p)$ y $f_1^S(q,p)$, dado que con la 1-FDP obtenemos una descripción probabilística completa del PE solución para cada precio p. En particular, a partir de la 1-FDP podemos calcular todos los momentos estadísticos unidimensionales

$$\mathbb{E}\left[Q_D(p,\omega)^k\right] = \int_{\mathbb{R}^+} q^k f_1^D(q,p)\,\mathrm{d}q.$$

Así, la media y la varianza pueden ser directamente calculadas a partir de la 1-FDP

$$\mathbb{E}\left[Q_D(p,\omega)\right], \quad \mathbb{V}\left[Q_D(p,\omega)\right] = \mathbb{E}\left[Q_D(p,\omega)^2\right] - \mathbb{E}\left[Q_D(p,\omega)\right]^2. \tag{5}$$

Por último, diremos que la 1-FDP resulta de gran utilidad para calcular probabilidades en conjuntos de interés. Por ejemplo, la probabilidad de que la cantidad demandada esté entre dos valores a y b

$$\mathbb{P}\left[a \le Q_D(p,\omega) \le b\right] = \int_a^b f_1^D(q,p)\,\mathrm{d}p. \tag{6}$$

Por tanto, la primera pregunta queda contestada, vamos a calcular la 1-FDP de ambas funciones, de oferta y demanda. Para hacerlo, vamos a aplicar la técnica de **transformación de variables aleatorias (TVA)**. El método TVA nos permite calcular la FDP de una VA transformación de otra VA cuya FDP se considera conocida. En el Teorema 1 se enuncia la versión multidimensional de este método.

Teorema 1 (Transformación de Variables Aleatorias) (Soong, 1973, p.25)
Considera $\mathbf{X} = (X_1,\dots,X_n)^\top$ *y* $\mathbf{Z} = (Z_1,\dots,Z_n)^\top$ *dos vectores aleatorios n-dimensionales absolutamente continuos definidos en un espacio de probabilidad* $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$. *Sea* $\mathbf{r}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una transformación determinista biyectiva de* $\mathbf{X}$ *en* $\mathbf{Z}$, *i.e.,* $\mathbf{Z} = \mathbf{r}(\mathbf{X})$. *Supongamos que* $\mathbf{r}$ *es continua y tiene derivadas parciales continuas con respecto a cada* X_i, $1 \le i \le n$. *Entonces, si* $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ *denota la función de densidad probabilidad conjunta del vector aleatorio* $\mathbf{X}$, *y* $\mathbf{s} = \mathbf{r}^{-1} = (s_1(z_1,\dots,z_n),\dots,s_n(z_1,\dots,z_n))^\top$ *representa la inversa de* $\mathbf{r} = (r_1(x_1,\dots,x_n),\dots,r_n(x_1,\dots,x_n))^\top$, *la función de densidad probabilidad del vector aleatorio* $\mathbf{Z}$ *está dada por*

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = f_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{s}(\mathbf{z})\right)|J|, \tag{7}$$

donde $|J|$, *que se asume diferente de cero, es el valor absoluto del Jacobiano, definido como el siguiente determinante*

$$J = \det\left(\frac{\partial \mathbf{s}^\top}{\partial \mathbf{z}}\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial s_1(z_1,\dots,z_n)}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial s_n(z_1,\dots,z_n)}{\partial z_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial s_1(z_1,\dots,z_n)}{\partial z_n} & \cdots & \frac{\partial s_n(z_1,\dots,z_n)}{\partial z_n} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Esta contribución se organiza como sigue. En la Sección 2 se desarrollan los resultados principales, es decir, obtenemos expresiones para las 1-FDP de las funciones de oferta y demanda. Además, calculamos las distribuciones de probabilidad de cantidades de interés como son el precio y la cantidad de equilibrio. Los resultados teóricos obtenidos en la Sección 2 se aplican a un ejemplo numérico en la Sección 3, para así poder observar la potencialidad de dichos resultados. En la Sección 4 se describe una metodología de aula para llevar a la práctica docente las ideas que se proponen en este trabajo. Finalmente en la Sección 5 resumimos las conclusiones que obtenemos de este trabajo.

2. Resultados principales

Esta sección se divide en dos partes. En la primera obtenemos la 1-FDP de las funciones de oferta y demanda, mientras que en la segunda calculamos las distribuciones del precio y de la cantidad de equilibrio. Todo ello haciendo uso del método TVA, enunciado en el Teorema 1.

2.1. Cálculo de la 1-FDP de las funciones de oferta y demanda

En este apartado aplicaremos el método de TVA para obtener la 1-FDP de la función de demanda, análogamente obtendremos la correspondiente a la función de oferta. En primer lugar, fijamos un precio $p \geq 0$. Aplicamos el método de TVA para obtener la FDP de la función de demanda, $Q_D(p,\omega)$, dada en (4). Esta FDP se va a expresar en términos de la FDP conjunta $f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$. Para ello, considera la siguiente transformación determinista

$$x = \alpha - \beta p, \quad y = \beta.$$

La inversa viene dada por

$$\alpha = x + yp, \quad \beta = y.$$

Obsérvese que el Jacobiano de la transformación inversa es $1 \neq 0$. Así, aplicando el método TVA obtenemos la FDP del vector aleatorio (X, Y)

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{\alpha,\beta}(x + yp, y).$$

Por tanto, marginado con respecto a $Y = \beta$ y tomando $p > 0$ arbitrario, obtenemos la 1-FDP de la función de demanda $Q_D(p,\omega)$

$$f_1^D(q,p) = \int_{\mathcal{D}(\beta)} f_{\alpha,\beta}(q + \beta p, \beta)\mathrm{d}\beta.$$

Ahora, dado que conocemos la FDP conjunta $f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, la FDP marginal del vector aleatorio (α,β) puede ser fácilmente obtenida

$$f_{\alpha,\beta}(\alpha,\beta) = \int_{\mathcal{D}(\gamma,\delta)} f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\delta.$$

Así para la función de demanda tenemos

$$\boxed{f_1^D(q,p) = \int_{\mathcal{D}(\beta)} \left[\int_{\mathcal{D}(\gamma,\delta)} f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(q + \beta p, \beta, \gamma, \delta)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\delta\right] \mathrm{d}\beta.} \tag{9}$$

Análogamente, para la función de oferta

$$\boxed{f_1^S(q,p) = \int_{\mathcal{D}(\delta)} \left[\int_{\mathcal{D}(\alpha,\beta)} f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\alpha, \beta, -q + \delta p, \delta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right] \mathrm{d}\delta.} \tag{10}$$

2.2. Cálculo de la FDP del precio y la cantidad de equilibrio

Como se ha destacado anteriormente en la introducción, el precio y la cantidad de equilibrio dados en (2) dependen de los parámetros del problema. Aplicamos el TVA para obtener la distribución de probabilidad del precio de equilibrio en función de la distribución conjunta de los parámetros que consideramos conocida. Para ello, definimos la siguiente transformación

$$x_1 = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \gamma, \quad x_4 = \delta.$$

La transformación inversa viene dada por

$$\alpha = x_1(x_2+x_4) - x_3, \quad \beta = x_2, \quad \gamma = x_3, \quad \delta = x_4.$$

Obsérvese que el Jacobiano de la transformación inversa viene dado por $(x_2 + x_4) = \beta + \delta > 0$ (dado que $\beta, \delta > 0$). Así, aplicando el método TVA obtenemos la FDP del vector aleatorio $(x_1(\omega), x_2(\omega), x_3(\omega), x_4(\omega))$

$$f_{x_1,x_2,x_3,x_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x_1(x_2 + x_4) - x_3, x_2, x_3, x_4)(x_2 + x_4).$$

Por tanto, marginando con respecto a $(X_2, X_3, X_4) = (\beta, \gamma, \delta)$ obtenemos la FDP del precio de equilibrio, P_{e},

$$\boxed{f_{P_{\mathrm{e}}}(p_{\mathrm{e}}) = \int_{\mathcal{D}(\beta,\gamma,\delta)} f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(p_{\mathrm{e}}(\beta+\delta) - \gamma, \beta, \gamma, \delta)(\beta+\delta)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\delta.} \tag{11}$$

Análogamente, para la cantidad de equilibrio, Q_{e},

$$\boxed{f_{Q_{\mathrm{e}}}(q_{\mathrm{e}}) = \int_{\mathcal{D}(\beta,\gamma,\delta)} f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\left(\frac{q_{\mathrm{e}}(\beta+\delta)+\beta\gamma}{\delta}, \beta, \gamma, \delta\right)\left(\frac{\beta}{\delta}+1\right)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\delta.} \tag{12}$$

3. Ejemplo numérico: Aplicación a datos sintéticos

El objetivo de esta sección es aplicar los resultados teóricos previamente obtenidos a un problema real. A partir de la referencia (Principle of Macroeconomics, 2016) sabemos que la oferta y demanda (medidas en millones de libras) de café por mes vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{lcl} Q_D(p) & = & 55 - 5p, \\ Q_S(p) & = & -5 + 5p. \end{array}\right. \tag{13}$$

Así, identificando (13) con (1), se tiene: $\alpha = 55$, $\beta = \gamma = \delta = 5$. Como hemos dicho anteriormente estos parámetros son obtenidos a partir de experimentos sociales, encuestas, datos de producción, datos de ventas, etc. y por tanto son de naturaleza aleatoria. De esta forma perturbando las ecuaciones de oferta y demanda (nosotros hemos elegido perturbarlos mediante una distribución Gaussiana) obtenemos una serie de datos sintéticos. En la Figura 2 hemos representado los valores de la oferta y la demanda obtenidos para los precios $p \in [4, 9]$ correspondientes al modelo (13).

Dado que las expresiones de las distribuciones obtenidas en la Sección 2 dependen de la distribución conjunta de los parámetros del problema, nuestro primer objetivo es obtener dicha distribución a partir de los datos que hemos generado sintéticamente. Para ellos vamos a asumir las siguientes hipótesis (donde Ga, N y U denotan las distribuciones Gamma, Gaussiana y Uniforme, respectivamente):

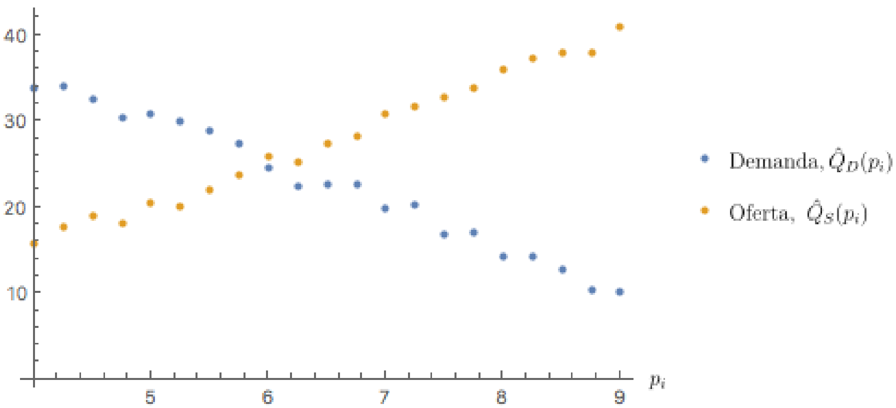

Figura 2: Datos sintéticos de la oferta y la demanda correspondientes al modelo (13).

- $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$, $\gamma(\omega)$ y $\delta(\omega)$ son VAs independientes.
- **Demanda:** $\alpha(\omega) \sim \mathrm{Ga}(\gamma_1, \gamma_2)$ y $\beta(\omega) \sim \mathrm{N}(\delta_1, \delta_2)$.
- **Oferta:** $\gamma \sim \mathrm{N}(\tau_1, \tau_2)$ y $\delta \sim \mathrm{U}([\eta_1, \eta_2])$.

A partir de los datos representados en la Figura 2 podemos estimar los parámetros de las distribuciones. Por ejemplo, para la demanda, buscamos los parámetros $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1$ y δ_2 que resuelvan el siguiente problema de optimización que impone la minimización del error cuadrático medio de la aproximación de la demanda a los datos sintéticos utilizando la función media del proceso estocástico que define la demanda

$$\min_{\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2>0} \sum_{i=0}^{20} \left(\underbrace{\mathbb{E}[Q_D(p_i), \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2]}_{\int_{\mathbb{R}} q\, f_1^D(q,p)\mathrm{d}q} - \underbrace{\hat{Q}_D(p_i)}_{\text{Datos sintéticos}} \right)^2 .$$

Haciendo uso del software Mathematica® obtenemos los siguientes valores

$$\gamma_1^* = 3873.68, \quad \gamma_2^* = 0.0143888, \quad \delta_1^* = 5.05146, \quad \delta_2^* = 0.100332.$$

Análogamente para la oferta. En resumen, obtenemos las siguientes distribuciones para los parámetros de entrada

- **Demanda**: $\alpha(\omega) \sim \mathrm{Ga}(3873.68, 0.0143888)$ y $\beta(\omega) \sim \mathrm{N}(5.05146, 0.100332)$.
- **Oferta**: $\gamma(\omega) \sim \mathrm{N}(4.70033, 0.720777)$ y $\delta(\omega) \sim \mathrm{U}([4.90155, 5.07868])$.

A partir de las distribuciones obtenidas, en la Figura 3 hemos representado la FDP de la oferta y de la demanda, ver (10) y (9), respectivamente, para cada unidad del precio $P_i = 4 + 0.25i$, $i = 0, 1, \ldots, 20$. Podemos observar que al igual que sucede en la teoría determinista al aumentar el precio se incrementa la oferta y se disminuye la demanda. Este comportamiento puede ser también observado en la Figura 4 donde hemos representado los datos, la media y los intervalos de confianza al 95 % para la oferta y la demanda. Podemos observar que en el caso de la demanda el intervalo de confianza es claramente no simétrico, lo que nos indica que las expresiones que hemos obtenido no siguen una distribución Gaussiana.

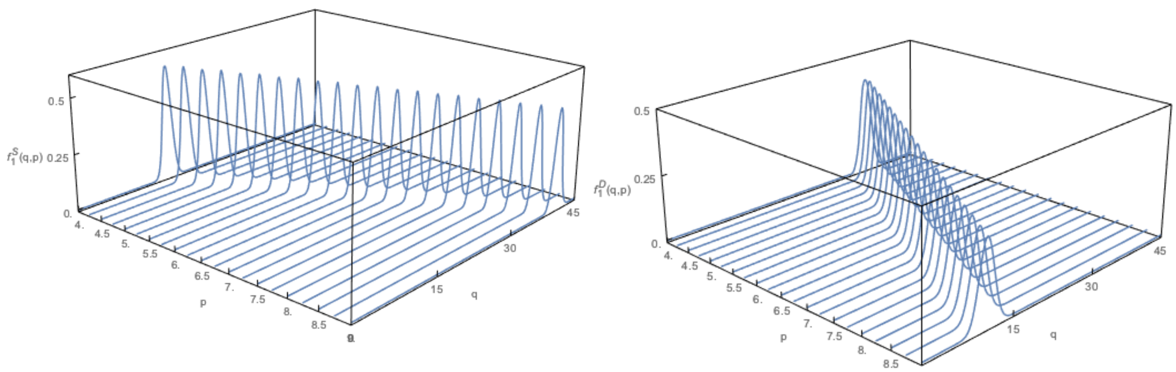

Figura 3: FDP de las funciones de oferta (izquierda) y demanda (derecha) para cada valor del precio $P = 4{+}0.25i$, $i = 0, \ldots, 20$ en el contexto del modelo (4) y a partir de las expresiones (10) y (9), respectivamente.

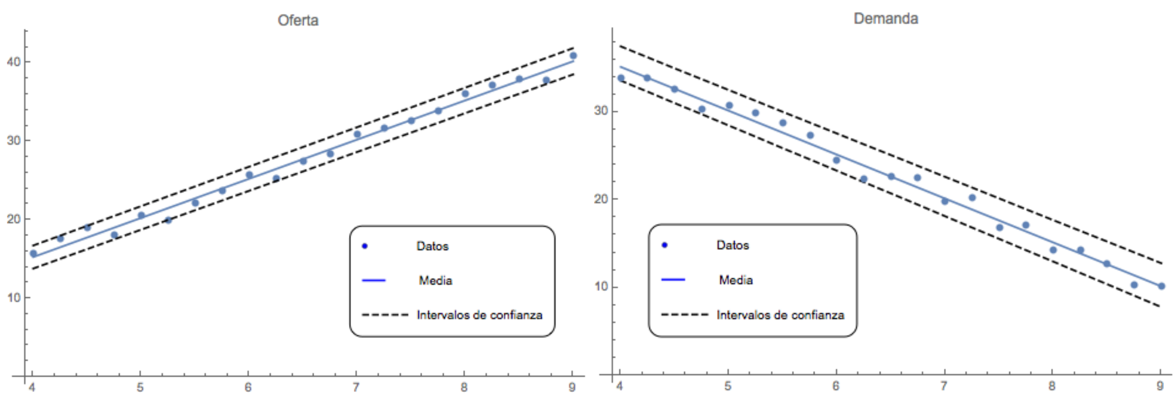

Figura 4: Datos, media e intervalo de confianza al 95 % para la funciones de oferta (izquierda) y demanda (derecha) en el contexto del modelo (4). La media y el intervalo de confianza se han calculado a partir de las expresiones (10) y (9) sustituidas en (5), respectivamente.

Al igual que hemos hecho para las funciones de oferta y demanda, en la Figura 5 hemos representado la FDP del precio y la cantidad de equilibrio, dadas en las expresiones (11) y (12), respectivamente.

Finalmente, en la Figura 6 hemos representado gráficamente la media y los intervalos de confianza de las cuatro cantidades, oferta, demanda, precio y cantidad de equilibrio, en una misma gráfica.

Para terminar, en la introducción hemos subrayado la necesidad de que en los modelos lineales de oferta y demanda se cumpla la condición de compatibilidad dada en (3). Dado que estamos en un escenario aleatorio, esta condición sucede con una cierta probabilidad

$$\mathbb{P}\left[\{\omega \in \Omega : K(\omega) := \alpha(\omega)\delta(\omega) - \beta(\omega)\gamma(\omega) > 0\}\right].$$

Aplicando el método TVA, podemos obtener la FDP de la VA $K(\omega)$ en función de la FDP conjunta de los parámetros

$$f_K(k) = \int_{\mathcal{D}(\beta,\gamma,\delta)} f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\left(\frac{k+\beta\gamma}{\delta}, \beta, \gamma, \delta\right) \frac{1}{\delta} \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}\delta.$$

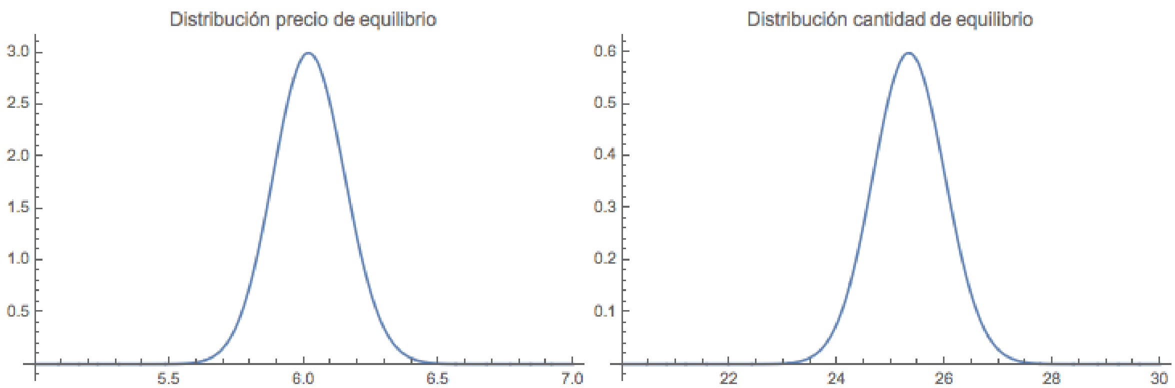

Figura 5: FDPs del precio y de la cantidad de equilibrio. Las gráficas se han obtenido a partir de las expresiones (11) y (12).

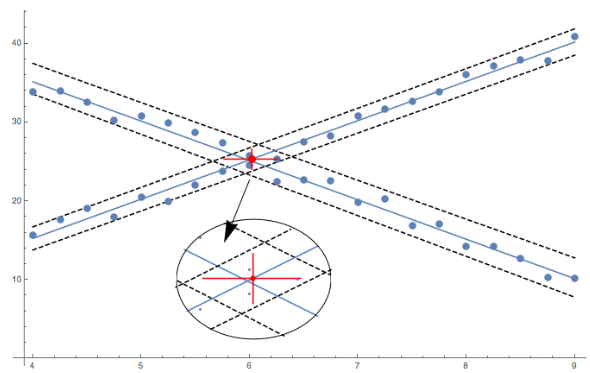

Figura 6: Media e intervalos de confianza de la oferta, la demanda, el precio y la cantidad de equilibrio.

Así la probabilidad de que se de la condición de compatibilidad, teniendo en cuenta las distribuciones dadas en este ejemplo, viene dada por

$$\int_0^\infty f_K(k)\mathrm{d}k = 1.$$

Lo cual es consistente con los resultados obtenidos y su interpretación económica.

4. Metodología de trabajo en el aula

Algunos de los autores de este trabajo impartimos docencia de la asignatura MADE I ("Modelos Matemáticos para Administración y Dirección de Empresas I") en el primer curso del Grado de ADE de la Universitat Politècncia de València. Como se especifica en la Guía Docente, el principal objetivo de la asignatura es: *"Introducir al alumno en el estudio matemático de algunos modelos económicos que juegan un papel fundamental en áreas como las Finanzas, la Microeconomía y la Macroeconomía, entre otros"*. Para alcanzar este objetivo, los conceptos matemáticos se presentan en el aula a través de la resolución de modelos económicos, cuya formulación es siempre determinista. Esta primera aproximación puede ser enriquecida introduciendo aleatoriedad en la formulación de los modelos matemático-económicos, con el objeto de que éstos sean más verosímiles. En efecto, en la realidad para trabajar con los modelos matemáticos se requieren datos del mercado (como los precios, la cantidad de unidades demandadas, la cantidad de unidades producidas, etc.), y esta información es siempre aproximada porque se obtiene por muestreo (y por tanto acarrea implícitamente algún tipo de *error no sistemático*). Además de la incertidumbre procedente del muestreo, los parámetros de los modelos matemáticos deben representar la complejidad inherente del comportamiento del consumidor, el cual, en general, no es posible describir de forma determinista. Por lo tanto, es más conveniente, y riguroso, tratar esta información usando técnicas estadísticas, en lugar de asumir una formulación y resolución determinista del modelo. Dado que los estudiantes de MADE I cursan simultáneamente las asignaturas: "Introducción a la Estadística" y "Microeconomía I", pensamos que la consideración de la incertidumbre en la formulación clásica del modelo lineal estático de oferta y demanda –el modelo económico más simple que estudian los alumnos en el primer curso de ADE–, puede servirnos como un excelente marco para trabajar de forma multidisciplinar entre las asignaturas anteriormente mencionadas.

Para la metodología de aula, proponemos coordinar la docencia entre el profesorado de las tres asignaturas del siguiente modo: después de haber introducido el modelo lineal estático de oferta y demanda determinista en el aula por parte del profesor de MADE I, el profesor de Microeconomía I participará dentro de la clase de MADE I para motivar, desde el punto de vista económico, los argumentos que sostienen la introducción del modelo con aleatoriedad, y proporcionará datos de la oferta y la demanda de algún producto del mercado que hayan sido recogidos por muestreo. Aquí es interesante la discusión que pueda surgir en torno a la obtención de datos reales del mercado, su fiabilidad, la adecuación del modelo, etc. Posteriormente, en otra clase, el profesor de MADE I, en coordinación con el profesor de Estadística I, resolverá (tal y como se ha descrito en las Secciones 2 y 3), el modelo aleatorizado y el profesor de Estadística I utilizará los datos del mercado proporcionados por el profesor de Microeconomía I para realizar un ajuste del modelo a través de la función de densidad de probabilidad para la oferta, la demanda, y también para el precio y la cantidad de equilibrio, usando un *software* estadístico adecuado. En este trabajo, nosotros hemos utilizado el *software* Mathematica®. Finalmente, el profesor de Microeconomía I se incorporará al aula para hacer una interpretación económica de los resultados obtenidos y discutir las ventajas que pueda tener el modelo de oferta y demanda estocástico respecto de los resultados que se obtengan con su versión determinista. Aquí será necesario (y muy pedagógico) relacionar las soluciones aportadas con ambos modelos para que la discusión sea más completa.

Es importante señalar que esta metodología docente no se ha desarrollado todavía en la asignatura de MADE I, pero los docentes de esta materia han desarrollado, en años académicos anteriores, coordinaciones docentes similares entre dicha asignatura y el profesorado de Macroeconomía (asignatura que se imparte en el segundo curso del Grado de ADE). Los resultados que entonces obtuvimos fueron bastante satisfactorios. Por nuestra experiencia, la dificultad de la coordinación y metodología docente que se propone es asumible, aunque ahora involucra a tres asignaturas. Es importante señalar que el tiempo de aula estimado para desarrollar esta experiencia docente es de dos clases de una duración de 60 minutos cada una. Se considera que la clase coordinada con la asignatura de Estadística I debe realizarse en un laboratorio con el *software* apropiado instalado en los equipos de los estudiantes.

Finalmente, creemos que implementar este tipo de experiencias con docencia horizontal (involucrando las asignaturas de matemáticas y otras que cursen simultánemente los alumnos), va a contribuir a que los estudiantes que cursan cualquier titulación tengan una visión más positiva del importante rol de las matemáticas (y en particular, de la modelización matemática) tanto en su formación universitaria como cuando se incorporen al mercado laboral y sean ellos quienes deban tomar la decisión de apoyarse en las matemáticas para mejorar los resultados en su trabajo. Todo ello va a redundar en la visión más positiva que van a tener nuestros estudiantes, nuestros titulados, y en general, la sociedad, del rol formativo de la Matemáticas.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado un estudio probabilístico completo de un sencillo modelo de oferta y demanda que ha sido previamente aleatorizado. Para implementar el estudio probabilístico se ha utilizado un enfoque analítico muy poco habitual en el análisis de modelos económicos, donde es más común el uso de la Estadística (regresiones, series temporales, etc.) en lugar de la Probabilidad. Mediante el enfoque propuesto se obtiene una descripción más completa de la respuesta del modelo económico, ya que permite calcular las funciones de densidad de probabilidad de las variables output (en nuestro caso, oferta, demanda y equilibrio). Esta es una información relevante ya que a partir de ella se deducen todos los momentos estadísticos unidimensionales (media, varianza, simetría, curtosis, etc.) del proceso estocástico solución del modelo, así como los intervalos de confianza y la probabilidad de que la respuesta varíe en un determinado intervalo de interés. Más allá del modelo económico concreto que se ha utilizado para conducir el estudio, desde el punto de vista docente esta aportación pretende mostrar la gran potencialidad que a nivel formativo tiene la interacción de las Matemáticas y la Estadística con otras asignaturas del área de la Economía, como la Microeconomía. Para motivar la aplicación de las técnicas introducidas en este artículo, y, basándonos en la experiencia previa como docentes de los autores, hemos añadido una metodología de trabajo en el aula. Dicha metodología se basa principalmente en la interacción de tres asignaturas fundamentales en el Grado de Administración y Dirección de Empresas: Introducción a la Estadística, Microeconomía I y MADE I. Destacar que esta experiencia docente ayudará a los estudiantes a tener una visión más positiva del uso de las matemáticas tanto en el ámbito universitario como posteriormente en el mercado laboral. Por último queremos subrayar que son numerosos los modelos económicos a los cuales podría extenderse el enfoque empleado en esta contribución para realizar un estudio más completo de los mismos, ya que es habitual que en su formulación aparezcan parámetros susceptibles de ser tratados como magnitudes aleatorias (debido a su naturaleza intrínsecamente estocástica o a su obtención experimental mediante muestreos que involucran errores estadísticos).

Referencias

Martínez Torres, O. A. (2014).
Análisis Económico.
México. Astra ediciones.

Aquino, R. (2008).
Teoría de la oferta y la demanda.
GestioPolis, 31.
https://www.gestiopolis.com/teoria-de-la-oferta-y-la-demanda

DeGroot, M. H. (1988).
Probabilidad y Estadística.
Ed. Addison–Wesley. Iberoamericana. Madrid.

Soong, T. T. (1973).
Random Diferential Equations in Science and Engineering.
Ed. Academic Press. New York.

Principle of Macroeconomics (2016).
Ed. Libraries Publishing. Creative Commons license (CC BY-NC-SA).
https://doi.org/10.24926/8668.1701