MSEL
MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING

MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING
Volume 12 (1), 2019 DOI: /10.4995/msel.2019.10808.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universitat Politècnica de València

Euclides no vivió en Manhattan: Geometría urbana

Euclid did not live in Manhattan: Urban Geometry

Joan-Vicenç Gómez i Urgellés
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
joan.vicenc.gomez@upc.edu.

Abstract

Se presentan los diagramas de Voronoi y a su vez la taxi distancia como modelos para resolver una situación en la que hay que ubicar tres centros asistenciales. El proyecto está realizado con alumnos de ingeniería de la EPSEVG-UPC. A nivel cognitivo y formal se trabaja en el espacio métrico L_1 de Minkowski como elemento diferencial de la métrica euclídea con el fin de visualizar otras métricas y usar el Geogebra como herramienta para resolver problemas de la realidad, plasmando de este modo el aspecto epistemológico de las matemáticas.

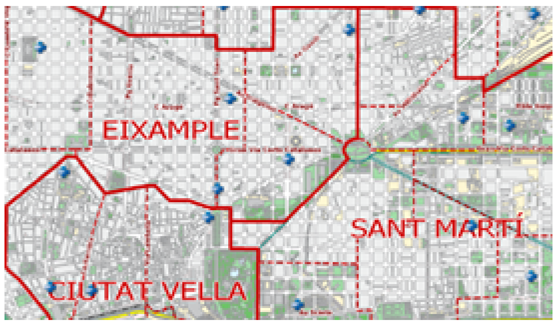
The Voronoi diagrams and the taxi distance are presented as models to solve a situation in which three assistance centers have to be located. The project was carried out by engineering students at the EPSEVG-UPC. At a cognitive and formal level, work is being done on Minkowski's L_1 metric space as a differential element with respect to the Euclidean metric in order to visualize other metrics and use Geogebra as a tool to solve problems from reality, thus showing in this way the epistemological aspect of mathematics.

Palabras clave: Voronoi, modelización, aprendizaje, métrica, distancia euclídea, taxi distancia.
Keywords: Voronoi, modeliling, learning, metrics, euclidean distance, taxi distance.

1. Introducción

1.1. Situación

Supongamos que en una ciudad, diseñada con las calles formando una cuadrícula cuadrada, hay tres centros asistenciales A, B y C y las instituciones precisan dividir la ciudad en tres zonas (una que ubique a A, otra a B y otra a C) para que los pacientes de cada zona asistan al centro más próximo y este centro esté ubicado en su zona.



1.2. Modelo

Para resolver el problema planteado es preciso construir el denominado diagrama de Voronoi en taxigeometria como modelo matemático que nos resuelve la situación planteada.

2. Experiencia

Esta situación se planteó en forma de proyecto grupal en primer curso de ingeniería informática durante enero del 2018, en la EPSEVG (UPC) de Vilanova i la Geltrú como proyecto para realizar en grupo de tres alumnos de manera que platearan una solución analítica y una solución en Geogebra. El proyecto se contextualiza con elementos urbanísticos, proporcionando una visión integradora de las matemáticas.

Conceptos matemáticos involucrados:

– Trabajar con la taxidistancia o distancia de Manhattan.

– Conocer el concepto de mediatriz y su construcción.

– Construir diagramas de Voronoi con la distancia euclídea y con la taxi distancia.

Objetivo: A nivel cognitivo, conocer la distancia usada en el espacio métrico L^1 de Minkowski como elemento diferencial de la métrica euclídea con el fin de visualizar otras métricas y usar el Geogebra como herramienta para resolver problemas de la realidad, plasmando de este modo el aspecto epistemológico de las matemáticas.

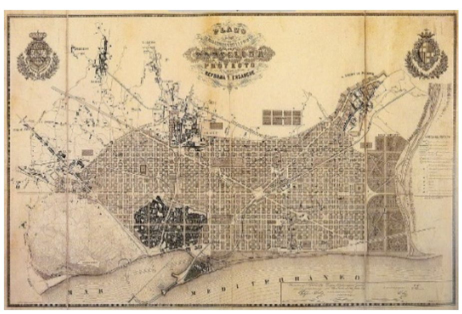
2.1. Calles con encanto

En diversos lugares del mundo se organizan ciudades diseñando sus calles en ángulo recto, creando manzanas rectangulares, este hecho se conoce en urbanismo como plan hipodámico en honor al arquitecto griego Hipodamo de Mileto (498-408 a. C.), considerado el padre del urbanismo ya que la organización de las ciudades se caracterizaban por un diseño de calles rectilíneas que se cruzaban en ángulo recto (planos ortogonales). Como ejemplo actual destaca

Manhattan. Su famoso diseño cuadriculado proviene del denominado *Plan de los Comisarios de 1811*, que consistía en enfatizar la ortogonalidad de sus las calles. Las calles discurren de este a oeste, y las avenidas de norte a sur. En Nueva York, si alguien te dice que vayas a la 45 con la 4ta avenida, sabes exactamente a qué esquina se refiere. ¡Planificación urbana!

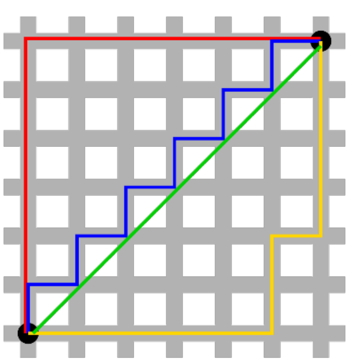
Es de justicia mencionar el denominado *Eixample* (ensanche) de Barcelona como ejemplo de ciudad ortogonal. El *Eixample* es uno de los ejemplos más impresionantes de planificación urbana, diseñado por Ildefonso Cerdá (1815-1876), destaca por su patrón de cuadrícula y sus diagonales, pero sus manzanas no forman un cuadrado perfecto sino un octágono (con las esquinas cortadas en chaflán).

Se muestra el plano del proyecto y una vista de la configuración actual.



Si nos fijamos se aprecia que comparten un mismo patrón, un mismo modelo matemático, una estructura en forma de cuadrícula de manera que en ella es posible definir una distancia y construir una geometría distinta a la euclídea tal que para desplazarnos de un lugar a otro no traspasemos edificios!!!!!

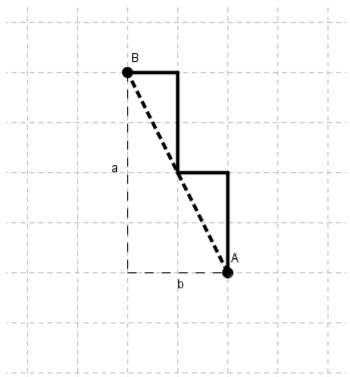
3. La Taxi Geometría: un modelo de geometría urbana



En la imagen, se observa una cuadrícula en la que tenemos dos puntos unidos con una línea recta, que corresponde con la distancia habitual (la euclídea), y varias maneras de unir ambos puntos con un camino mínimo siguiendo las calles de la cuadrícula (denominada la distancia Manhattan entre ambos puntos). Este es un claro ejemplo de una nueva geometría cuyas distancias no son las de Euclides, se conoce como geometría taxicab. En el ejemplo la distancia Manhatan (también conocida como Taxi-distancia) sería de 12 unidades.

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Recordemos que la distancia usual (distancia euclídea), en el plano equivale al teorema de Pitágoras, establece que la distancia entre dos puntos P y Q de coordenadas $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ es $d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. En contrapartida, la distancia mínima que nos mide el desplazamiento real efectuado en una ciudad en forma de cuadrícula está definida como: $d_T(P,Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. La $d_T(P,Q)$ se conoce con el nombre de la distancia de Manhattan o de Minkowski o del taxi. La geometría "del taxi" es un tipo de geometría que no utiliza la distancia usual (euclídea) y fue ideada por Hermann Minkowski (1864-1909). La $d_T(P,Q)$ nos mide la cantidad de unidades andando o en taxi, moviéndonos en sentido vertical o horizontal realizados para desplazarnos de P a Q.



La longitud de la línea discontinua nos indica el valor de la distancia euclídea, siendo la suma de las longitudes de los segmentos laterales el valor de la distancia "del taxi". Si el extremo inferior indica el origen de coordenadas, podemos asignar al punto A las coordenadas (2,1) y al punto B (destino) las coordenadas (0,5). En este caso, aplicando las fórmulas anteriores, la distancia euclídea será de 4,47 unidades y la taxidistancia será de 6 unidades.

Si Euclides hubiese habitado en Manhattan, con toda probabilidad hubiese dudado de que "*la distancia más corta es la línea recta*". La distancia de Manhattan es mayor que la distancia euclídea. Para diseñar distancias de mínimo recorrido en ciudades es lógico usar el taxi-distancia ya que con la euclídea atravesaríamos edificios. Como ejemplo realizaremos un viaje per el *Eixample*. Las porciones de plano mostradas a continuación son del *Eixample* de Barcelona y nos servirán para visualizar la taxi-distancia.

Imagine que se encuentra en una ciudad ubicado en un punto A de una cierta esquina y que tiene que desplazarse a otro punto B situado en otra esquina. ¿Cuál es la distancia entre el punto A y el punto B?

Para simplificar el problema consideraremos que cada "*manzana*" mide una unidad.

Si observa el dibujo verá que un cateto mide 4 unidades y el otro 2 unidades. Si aplicamos el teorema de Pitágoras obtenemos que la hipotenusa mide 4,47 unidades.

Si usted se desplaza volando o atravesando los edificios seguramente recorrerá la mencionada distancia, pero si viaja a pie o en taxi ¿sería la misma? Evidentemente no.

Le sugiero que piense que como mínimo tendrá que recorrer 6 unidades.

Si nos desplazamos en taxi se visualizan todas las trayectorias alternativas más rápidas (que serán de 6 unidades) para desplazarse de A a B sin necesidad de que se "atraviesen"los edificios, siempre combinando movimientos verticales y horizontales con la idea de acercarnos al destino; en nuestro caso los desplazamientos serán hacia arriba y hacia la izquierda. Fíjese que la distancia recorrida es en todos los trayectos de 6 unidades.

Los diferentes itinerarios que puede recorrer para ir de A a B se reducen a 15 posibilidades.

Si se utiliza la expresión que nos proporciona el número de caminos posibles limitados a "n" movimientos hacia arriba y "m"movimientos hacia un mismo lado (*permutaciones con repetición*) se establece:

$$PR^{n,m} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

En el ejemplo mostrado se tiene: $PR^{4,2} = \dfrac{(4+2)!}{4!2!} = 15$ caminos posibles.

Problema

La Gran Avenida: Supongamos que dos ciudades, con Ayuntamientos A y B se unifican y las instituciones desean construir una vía pública, que denominamos "la gran Avenida", con la condición de que cualquier vehículo que transite por dicha vía esté situado a la misma distancia de A que de B. ¿En qué lugar tendremos que ubicar dicha travesía? La pregunta se traduce como ¿Cuáles son los puntos del plano que equidistan de A y de B?

Si pensamos geométricamente llegamos a la conclusión de que la línea divisoria será la mediatriz entre A y B. Nótese que esta mediatriz nos proporciona dos regiones, la liderada por A y la liderada por B. Nótese que los puntos de la región liderada por A, estén en la posición que estén, están más cerca de A que de B; análogamente los puntos ubicados en la región liderada por B. Podemos pensar el problema para tres puntos.

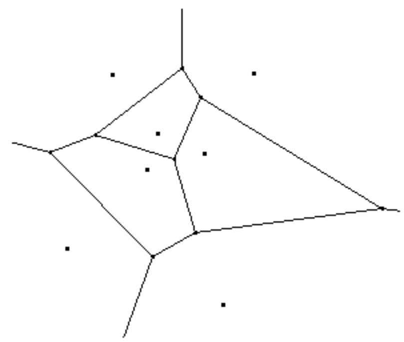
Los centros asistenciales: Supongamos que en una ciudad, diseñada con las calles formando una cuadrícula cuadrada, hay tres centros asistenciales A, B y C y las instituciones precisan dividir la ciudad en tres zonas lideradas por A, B y C respectivamente para que los pacientes asistan al centro más próximo.

La respuesta nos la proporcionan los diagramas de Voronoi.

4. Voronoi y las áreas geográficas

Gueorgui Feodósievich Voronói (1868-1908), matemático ruso, es conocido por las regiones denominadas "de Voronoi" en honor a sus trabajos. En algunos contextos dichas regiones, también se conocen como polígonos de Thiesen (meteorólogo contemporáneo de Voronoi). Son una construcción geométrica que permite configurar una partición del plano bajo ciertos objetivos, uno de ellos consiste en dados n puntos $p_1, p_2, p_3, \ldots$ construir n regiones (cada una de ellas encierra a uno de estos puntos) de manera que para cada punto interior a cada región i, el que está a **distancia mínima** es el correspondiente p_i de la región i. Pensemos que en función de la métrica usada las regiones que proporcionan *distancia mínima* pueden cambiar!!!

Habitualmente se crean al unir los puntos entre sí, trazando las mediatrices de los segmentos de la unión. Las intersecciones de estas mediatrices determinan una serie de polígonos alrededor de dichos puntos, de manera que el perímetro de los polígonos generados sea equidistante a los puntos vecinos y designan su área de influencia.

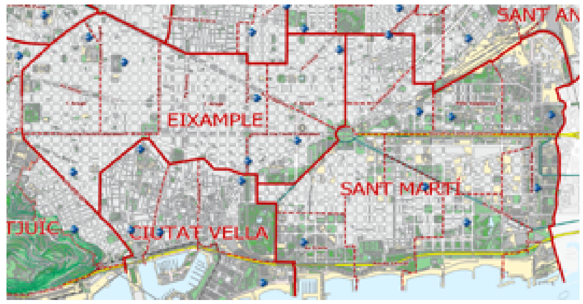


Los diagramas de Voronoi han tenido múltiples aplicaciones, debido sobre todo a su estrecha relación con el concepto de regiones de influencia o dominio de los puntos que los generan. La principal aplicación, que no trataremos por no ser objeto del presente texto, es en la denominada geometría computacional. A nivel más popular, Voronoi aporta desde la distribución de aeropuertos hasta la distribución de servicios y empresas en poblaciones.

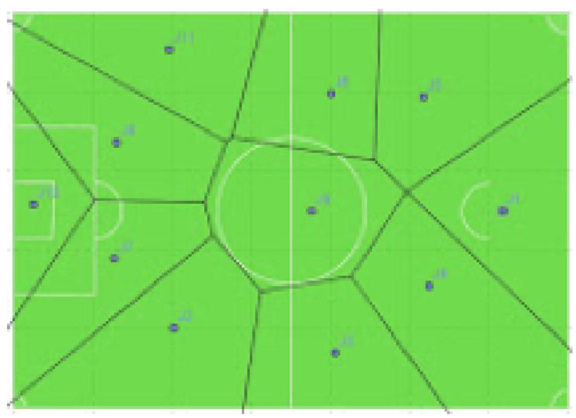
La situación más habitual, y susceptible de trabajar con la taxigometria, es el hecho de contar con un conjunto de establecimientos que se desean colocar sobre una cierta región geográfica de tal manera que las locaciones sean lo más próximas posible para los elementos interiores a la región. Por tanto, se debe hallar una configuración que permita que el número de clientes atraídos sea el más factible. La suposición lógica indica que los clientes irían al establecimiento más cercano a su domicilio y no a aquellos que sean muy lejanos. Con base en esto, los diagramas de Voronoi otorgan la configuración deseada por los establecimientos. El diagrama de Voronói induce una subdivisión del plano euclidiano (la región geográfica) en función de un conjunto de puntos (los establecimientos), donde a cada punto se le asocia una y solamente una subdivisión. Además, cada subdivisión engloba todos los puntos más cercanos al punto asociado a los puntos restantes.

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

En la imagen se muestran diversos centros de servicios ubicados equitativamente en la ciudad de Barcelona siguiendo los criterios mencionados.



Incluso en el fútbol, si pensamos en los jugadores sobre el terreno de juego como puntos sobre un plano, podemos asignarle a cada uno de ellos su región de Voronoi que estará formada por los puntos del terreno de juego que están más cerca de cada jugador que del resto. Evidentemente, como los jugadores no están quietos, en general, este diagrama irá modificándose con el tiempo pero nos puede indicar, en cada instante, la mejor posición.

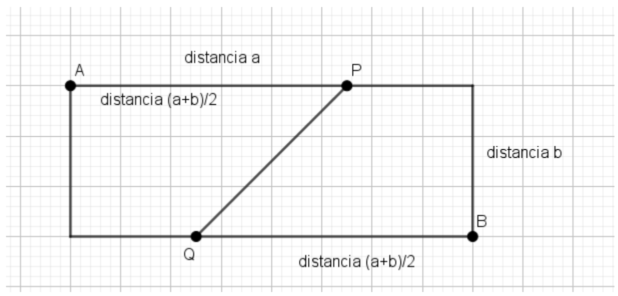


Una excelente web para construir regiones de Voronoi proporcionando los puntos el usuario es `http://alexbeutel.com/webgl/voronoi.html`. Dicha web construye el diagrama de Voronoi con la distancia euclídea usual. En una ciudad no podemos construir diagramas de Voronoi con la métrica euclídea y la mediatriz euclídea, nos hará falta construir mediatrices con la taxi distancia. Dichos diagramas pueden generarse además de la distancia euclídea, también en la taxidistancia. En Geogebra es posible construir diagramas de Voronoi en la métrica euclídea (`http://dom.cat/1i12`) y en la de Minkowski (`https://www.geogebra.org/m/Tke97SmU`).

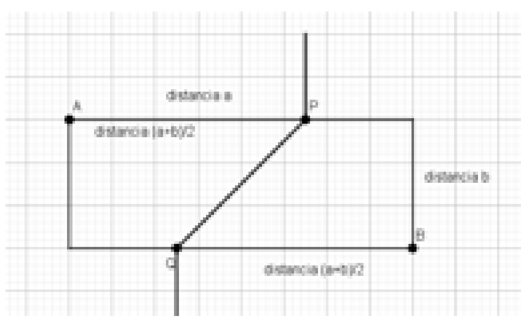
4.1. Mediatrices en la Taxi distancia

Si tenemos dos puntos sobre el plano, A y B, los puntos que están a la mitad de camino entre A y B, a la misma distancia de ambos, definen una recta que conocemos, como mediatriz. Para ello construimos el rectángulo definido por A y B, con longitudes a y b. Se observa que la taxi distancia entre A y B es $a + b$.

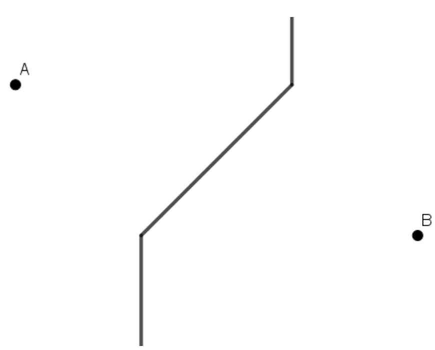
Para construir la mediatriz tenemos que construir el lugar geométrico de los puntos que están a distancia $(a+b)/2$ de los puntos A y B. Para ello consideramos los puntos P y Q que se encuentran a distancia $(a+b)/2$ según la imagen.



Es fácil observar que todos los puntos que están en el segmento PQ equidistan de A y B una distancia de $(a+b)/2$. De la misma forma se observa que si añadimos las semirrectas verticales por P y Q, los puntos de dichas semirrectas también verifican que la distancia a A y B es de $(a+b)/2$. Con la argumentación realizada se puede afirmar que la mediatriz es la poligonal que divide el plano en dos regiones de Voronoi, tal como se aprecia en la siguiente ilustración:



En síntesis, el diagrama de Voronoi determinado por A y B es:



Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

La Avenida menos conflictiva: Una Avenida de consenso

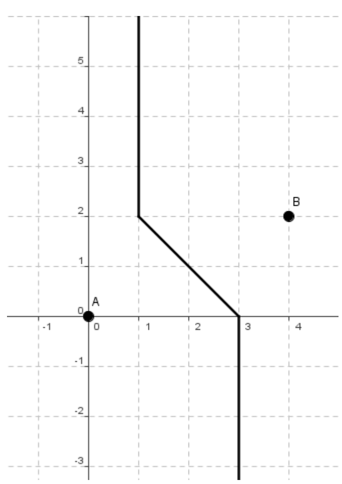
Supongamos que dos ciudades, con Ayuntamientos A y B se unifican y las instituciones desean construir una vía pública, que denominamos "la gran Avenida", con la condición de que cualquier vehículo que transite por dicha vía esté situado a la misma distancia de A que de B. ¿En qué lugar tendremos que ubicar dicha travesía?

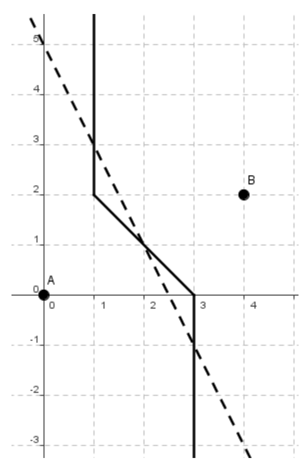
La pregunta se traduce como ¿Cuáles son los puntos del plano que equidistan de A y de B? En geometría euclídea, este modelo equivale a construir la denominada *mediatriz* entre A y B (la perpendicular al segmento que une A y B y pasa por el punto medio de ambos). Es decir: Calcular los puntos P que verifican $d(P, A) = d(P, B)$.

Quizás este modelo no es válido en geometría urbana, quizás tengamos que derribar muchas viviendas, quizás,... La solución óptima nos la proporciona la taxi-distancia, con la propuesta que nos ofrece la taxi-distancia evitaremos derrumbes innecesarios. Nos permitirá construir la Avenida menos conflictiva.

Para esclarecer la situación lo ilustraremos con un ejemplo.

Supongamos que A está situado en el punto $(0, 0)$ y que B está situado en el punto $(4, 2)$. El problema se reduce a calcular los puntos P que verifican $d_T(P, A) = d_T(P, B)$. Observe en la imagen de su izquierda que magnífica travesía verifica la condición. Si en ella considera un punto, fíjese que la distancia entre el punto escogido y A coincide con la distancia entre este punto y B. Note también que en esta propuesta no se sacrifica gran cantidad de núcleo urbano. En cambio, si observan en la imagen de la derecha, la solución planteada con la distancia usual será que la travesía cruzaría por en medio de numerosas "manzanas" (señalada con línea discontinua).



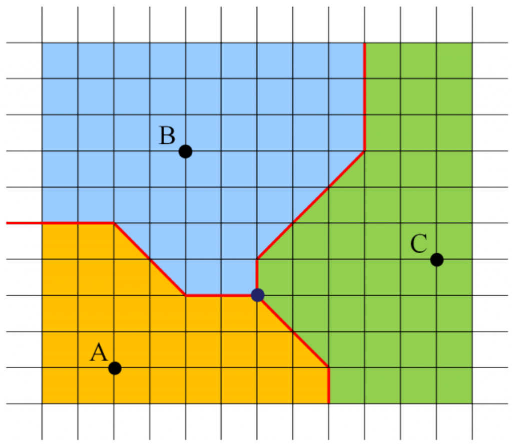


La taxi-distancia proporciona numerosas alternativas urbanísticas, siendo de gran importancia en la planificación de rutas y ubicación de destinos de interés (puntos turísticos, hospitales, escuelas y servicios en general).

Una vez más las matemáticas nos proporcionan alternativas en situaciones cotidianas y sociales, esperemos que los ejemplos mostrados le ayuden a visualizar el papel relevante de la matemática en la sociedad.

4.2. Un taxi en el barrio de Voronoi: Solución a la situación planteada

Una excelente situación real que requiere la métrica del taxi para su resolución es la planteada a continuación y que a su vez es la situación propuesta inicialmente. Supongamos que en una ciudad, diseñada con las calles formando una cuadrícula cuadrada, hay tres centros asistenciales A, B y C y las instituciones precisan dividir la ciudad en tres zonas para que los pacientes de cada zona asistan al centro más próximo y este centro esté ubicado en su zona. Para ello supondremos que se desplazan según el criterio de la distancia del taxi El problema lo resolveremos usando diagramas de Voronoi. Tal como se ha comentado anteriormente, construimos las respectivas mediatrices en Taxi Geometría y se obtiene el diagrama plasmado en la imagen.



Es fácil comprobar que cualquier persona de la zona donde se encuentra el punto A, está más cerca de A que de B o C. Análogamente para los otros puntos.

Si la imagen anterior se corresponde con la situación de los tres centros sanitarios de la hipotética ciudad se observa que la distancia del taxi entre el centro A y el B es 8, entre A y C es 12 y entre B y C es 10. En la imagen destacan las zonas que son el área de influencia de cada centro, es decir, los pacientes que viven en cada una de esas áreas asistirá al centro asistencial que está en la misma, ya que es el que les queda más cerca.

Además, destaca que si por ejemplo un restaurante desea abrir un local que esté a la misma distancia de los tres centros sanitarios, deberá construirlo en la intersección de las tres fronteras.

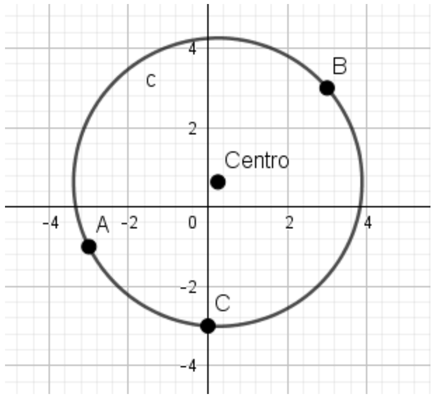
5. Un ejemplo complementario

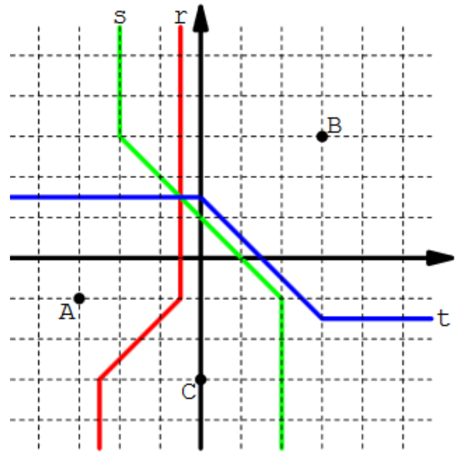
Consideramos un bonito ejemplo relacionado con el circuncentro. El circuncentro es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo, y corresponde con la intersección de las mediatrices de cada lado del triángulo. Por tanto, es el punto que equidista de dichos tres vértices.

Supongamos una familia formada por tres miembros en la que el padre trabaja en un punto $A = (-3, -1)$, la madre en el punto $B = (3, 3)$ y que el hijo va a la escuela en $C = (0, -3)$. La pregunta es:

¿Dónde tienen que vivir para que cada uno tuviese que caminar la misma distancia para desplazase a trabajo o a la escuela?

En geometría euclídea tendíamos que en este caso el punto sería el (0.25, 0.63) tal como muestra la imagen





En taxigeometría, la recta r representa la mediatriz del segmento AC, s la mediatriz del segmento AB y t la mediatriz de BC. El punto de intersección de dichas rectas sería el punto $(-0.5, 1.5)$. La ubicación del domicilio en dicho punto provocaría que los miembros de la familia recorran la misma distancia.

Referencias

Krause, E. F. (1987).
Taxicab Geometry.
New York: Dover Pub.

Geogebra.
https://www.geogebra.org/m/m27EbcuG#material/zpHMYpXr

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL