PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XIII N°1, pp. 07-19, Lima - Perú. Julio 2010

EXISTENCIA Y DECAIMIENTO UNIFORME PARA UNA ECUACIÓN VISCOELÁSTICO CASILINEAL

Alfonso Perez Salvatierra[1], ***Raúl Izaguirre Maguiña***[2],
Victoriano Yauri Luque [3] & ***Andrés Guardia Cayo***[4]

Resumen: Se estudiará la existencia de la solución débil y el comportamiento asintótico de la energía asociada al sistema:

$$\left|\begin{array}{l} |u_t|^p u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds + f(u) = 0, \ \text{ en } \Omega \times]0,+\infty[\ . \\ \qquad\qquad u(x,t) = 0, \quad \text{sobre } \Gamma \times]0,+\infty[\ . \\ \qquad\qquad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \ \text{ en } \Omega \ . \end{array}\right. \qquad (*)$$

Donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, con frontera $\Gamma = \partial\Omega$, p satisface, $0 < p < \dfrac{2}{(n-2)}$, si $n \geq 3 \ \vee \ p > 0$ si $n = 1,2$ y la función $g(t)$ es positiva; $u_0, u_1 \in H_0^1(\Omega)$.

El núcleo de la integral, $g(t-s)$ es una función memoria, que describe la dependencia entre la deformación y la tensión.

Palabras clave: Viscoelástico casilineal - Existencia - Decaimiento Uniforme.

EXISTENCE AND UNIFORM DECAY FOR VISCOELASTIC QUASILINEAR EQUATIONS

Abstract: Will studied the existence of the weak solution and the asymptotic behavior of the energy associated to the system:

$$\left|\begin{array}{l} |u_t|^p u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds + f(u) = 0, \ \text{ in } \Omega \times]0,+\infty[\ . \\ \qquad\qquad u(x,t) = 0, \quad \text{on } \Gamma \times]0,+\infty[\ . \\ \qquad\qquad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \ \text{ in } \Omega \ . \end{array}\right. \qquad (*)$$

Where Ω bounded domain in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, With boundary $\Gamma = \partial\Omega$, p satisfies, $0 < p < \dfrac{2}{(n-2)}$, if $n \geq 3 \ \vee \ p > 0$ if $n = 1,2$ and the function $g(t)$ is positive; $u_0, u_1 \in H_0^1(\Omega)$.

The integral kernel, $g(t-s)$ a function memory, that he describes the dependence between deformation and the tension.

Key words: Viscoelastic linear - Existence - Uniform decay.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: apersal@hotmail.com
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: raul_izaguirre2222@yahoo.es
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: victoriano_yauri@hotmail.com
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: agcdibayo@yahoo.es

1. Introducción:

En M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J. Soriano [10], se estudia la ecuación con amortiguamiento localizado siguiente,

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds + a(x)\,u_t + |u|^\gamma u = 0, \text{ en } \Omega \times]0,+\infty[\ . \\ u(x,t) = 0 \ , \ \text{sobre } \Gamma \times]0,+\infty[\ . \\ u(x,0) = u_0(x) \ , \ u_t(x,0) = u_1(x) \ , \ \text{en } \Omega\,. \end{aligned}$$

Donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, con frontera $\Gamma = \partial\Omega$, regular $\gamma > 0$; $a(x)$ es una función no creciente positiva en una vecindad de la frontera, la función $g(t)$ es positiva; tal que

$$-\xi_1 g(t) \leq g'(t) \leq \xi_2 g(t), \quad t \geq 0$$

Los autores estudian su comportamiento asintótico del sistema.

En M.M. Cavalcanti, V.N.D. Cavalcanti, J. Ferreira [4], se estudia la existencia global de la solución en $L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega))$ para $\gamma \geq 0$ y un comportamiento asintótico para $\gamma > 0$. Esto es, en el caso de la presencia de un amortiguamiento fuerte Δu_t actuando en Ω, el sistema es dado por,

$$\begin{aligned} |u_t|^p u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds - \gamma \Delta u_t = 0\ , \text{ en } \Omega \times]0,+\infty[\ . \\ u(x,t) = 0 \ , \ \text{sobre } \Gamma \times]0,+\infty[\ . \\ u(x,0) = u_0(x) \ , \ u_t(x,0) = u_1(x) \ , \ \text{en } \Omega\,. \end{aligned}$$

Donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, con frontera $\Gamma = \partial\Omega$, regular $\gamma > 0$; p satisface, $0 < p \leq \dfrac{2}{(n-2)}$, si $n \geq 3 \vee p > 0$ si $n = 1,2$ y la función $g(t)$ es positiva.

En Salim A. Messaoudi, Nasser-eddine Tartar [11], se estudia el decaimiento exponencial y polinomial para el sistema,

$$\begin{aligned} |u_t|^p u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds - \gamma \Delta u_t = 0\ , \text{ en } \Omega \times]0,+\infty[\ . \\ u(x,t) = 0 \ , \ \text{sobre } \Gamma \times]0,+\infty[\ . \\ u(x,0) = u_0(x) \ , \ u_t(x,0) = u_1(x) \ , \ \text{en } \Omega\,. \end{aligned}$$

En el presente trabajo se hace el estudio del decaimiento exponencial y polinomial del sistema $(*)$ un mejoramiento al trabajo de [11] y para la existencia de la solución podemos encontrar en el trabajo de M.M. Cavalcanti, V.N.D. Cavalcanti, J. Ferreira [4], Las hipótesis del trabajo son:

Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, con frontera $\Gamma = \partial\Omega$, p satisface, $0 < p < \dfrac{2}{(n-2)}$, si $n \geq 3 \vee p > 0$ si $n = 1,2$ y la función $g(t)$ es positiva; $u_0, u_1 \in H_0^1(\Omega)$.

$g(t)$ es llamada función de relajación. El núcleo de la integral, $g(t-s)$ es una función memoria, que describe la dependencia entre la deformación y la tensión.

La integral de la ecuación en $(*)$, llamada " integral hereditaria", fue primeramente presentada por Volterra.

Para la función relajación " g" asumimos:

(G1) $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una función de clase C^1 no creciente (o acotada) satisfaciendo

$$g(0) > 0,\ 1 - \int_0^\infty g(s)\,ds := \ell > 0$$

(G2) Existe una constante positiva ξ tal que

$$g'(t) \leq -\xi g^p(t), \; t \geq 0, \; 1 \leq p < \frac{3}{2}$$

Nota: La condición $p < \dfrac{3}{2}$ es impuesto para asegurar que

$$\int_0^\infty g^{2-p}(s)\, ds < \infty$$

F(1) La función $f \in C^1(\mathbb{R})$ es tal que

$$f(s)\, s \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}$$

F(2) La función f es lipschitziana con $f(0) = 0$

2. Deducción formal de la energía

Multiplicando a la ecuación $(*)$ por u_t :

$$(|u_t|^p u_{tt}, u_t) + (-\Delta u, u_t) + (-\Delta u_{tt}, u_t) + \left(\int_0^t g(t-s)\, \Delta u(s)\, ds, u_t\right) + (f(u), u_t) = 0 \quad (1)$$

observemos que:

$$(|u_t|^p u_{tt}, u_t) = \int_\Omega |u_t|^p u_{tt} u_t dx = \frac{1}{p+2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u_t|^{p+2} dx \quad (2)$$

Por la fórmula de Green y para $u \in H^2(\Omega), u_t \in H^1(\Omega)$:

$$(-\Delta u, u_t) = (\nabla u, \nabla u_t) - \langle \gamma_0 u_t, \gamma_1 u \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u|^2 \quad (3)$$

Análogamente por Green para $u_{tt} \in H^2(\Omega), u_t \in H^1(\Omega)$,

$$(-\Delta u_{tt}, u_t) = (\nabla u_{tt}, \nabla u_t) - \langle \gamma_0 u_t, \gamma_1 u_{tt} \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u_t|^2 \quad (4)$$

Definamos $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)\, dt$, el cual está bien definida por (F2), se tiene por el teorema fundamental del cálculo

$$F'(s) = f(s)$$

luego,

$$(f(u), u_t) = \int_\Omega f(u)\, u_t dx = \frac{d}{dt} \int_\Omega F(u)\, dx \quad (5)$$

De (2) a (5) en (1):

$$\frac{1}{p+2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u_t|^{p+2} dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u_t|^2 + \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\, \Delta u(s)\, u_t(t)\, ds dx + \frac{d}{dt} \int_\Omega F(u)\, dx = 0$$

Ordenando los términos

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{p+2} \int_\Omega |u_t|^{p+2} dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \right. \quad (6)$$

$$\left. + \int_\Omega F(u)\, dx\right] = -\int_\Omega \int_0^t g(t-s)\, \Delta u(s)\, u_t(t)\, ds dx$$

Se define la energía asociada al sistema

$$E(t) := \frac{1}{p+2}\int_\Omega |u_t|^{p+2}\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + \int_\Omega F(u)\,dx$$

De (6) y definición de la energía se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= -\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,u_t(t)\,dsdx \qquad (7)\\ &= \int_\Omega \nabla u_t(t)\cdot\int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,dsdx\end{aligned}$$

Como el término de la integral en (7) es de un signo indefinido, modificaremos la energía $E(t)$ para así tener una nueva funcional positiva no creciente.
Definamos,

$$(g\circ v)(t) := \int_\Omega\int_0^t g(t-s)\,|v(t)-v(s)|^2\,dsdx \qquad (8)$$

de la definición de la energía y de $g\circ v$ obtendremos,

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx + \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^t g(\tau)\,d\tau\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\right\} \qquad (8a)$$

Se define la función positiva

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) := \frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t) + \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\\ +\frac{1}{p+2}\int_\Omega|u_t|^{p+2}\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_t|^2\,dx + \int_\Omega F(u)\,dx.\end{aligned}$$

De la relación dado en (G1) obtendremos;

$$\ell E(t) \le \varepsilon(t),\quad \forall t\ge 0. \qquad (9)$$

Diferenciando en $\varepsilon(t)$ y relaciones anteriores:

$$\begin{aligned}\varepsilon'(t) &= \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx \qquad (10)\\ &= -\frac{\xi}{2}(g^p\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\end{aligned}$$

$\therefore \varepsilon'(t) < 0, \forall t\ge 0.$

3. Teorema central

Asumamos (G1), (G2) y suposición sobre p dados. Entonces, para cada $t_0 > 0$ fijo, existen constantes positivas K y k tal que las soluciones de $(*)$ satisface, para todo $t\ge t_0$.

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &\le Ke^{-kt},\ p=1\\ \varepsilon(t) &\le K(1+t)^{-1/(p-1)},\ p>1.\end{aligned}$$

Demostración

Trabajamos con una funcional adecuada, definamos

$$\mathcal{L}(t) := M\varepsilon(t) + \epsilon\psi(t) + \chi(t)$$

y probaremos que $\mathcal{L}(t)$ es equivalente a la función $\varepsilon(t)$, para un M y ϵ elegidos apropiadamente mas adelante. Se definen los operadores ψ y χ por,

$$\psi(t) := \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u_t|^p u_t u dx + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u_t dx$$
$$\chi(t) := \int_\Omega \left(\Delta u_t - \frac{|u_t|^p u_t}{p+1}\right)\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(s))\,d\tau dx + \int_\Omega F(u)\,dx$$

Podemos deducir:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(|u_t|^p uu_t\right) &= p|u_t|^{p-1}\frac{d}{dt}|u_t|\,uu_t + |u_t|^p\frac{d}{dt}(uu_t)\\ &= (p+1)|u_t|^p uu_{tt} + |u_t|^{p+2}\end{aligned} \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}(\nabla u\cdot\nabla u_t) = \nabla u_t\cdot\nabla u_t + \nabla u\cdot\nabla u_{tt} \tag{12}$$

Derivando el operador $\psi(t)$, de (11) y (12):

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \frac{1}{p+1}\int_\Omega \frac{d}{dt}\left(|u_t|^p uu_t\right)dx + \int_\Omega \frac{d}{dt}(\nabla u\cdot\nabla u_t)\,dx\\ &= \int_\Omega |u_t|^p uu_{tt}dx + \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u_t|^{p+2}dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u_{tt}dx\end{aligned} \tag{13}$$

multiplicando a la ecuación $(*)$ por u y la fórmula de Green

$$\int_\Omega |u_t|^p uu_{tt}dx + \int_\Omega \nabla u_{tt}\cdot\nabla u dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \nabla u(t)\cdot\int_0^t g(t-\tau)\nabla u(\tau)\,d\tau dx - \int_\Omega f(u)\,u dx. \tag{14}$$

De (14) en (13) :

$$\psi'(t) = \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u_t|^{p+2}dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \nabla u(t)\cdot\int_0^t g(t-\tau)\nabla u(\tau)\,d\tau dx \tag{15}$$
$$-\int_\Omega f(u)\,u dx.$$

Estimamos el cuarto término del lado derecho:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\int_0^t g(t-\tau)\nabla u(\tau)\,d\tau dx &\le \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla u(\tau)|\,d\tau\right)^2 dx\\ &\le \frac{1}{2}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(|\nabla u(t)-\nabla u(\tau)| + |\nabla u(t)|\right)d\tau\right)^2 dx\\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx\end{aligned} \tag{16}$$

Por la desigualdad de Yong's obtenemos para $\eta > 0$ (trabajando con segundo término de (16))

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\left(|\nabla u(t) - \nabla u(\tau)| + |\nabla u(t)| \right) d\tau \right)^2 dx \leq \tag{17}$$

$$\leq \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\left(|\nabla u(t) - \nabla u(\tau)| \right) d\tau \right)^2 dx$$

$$+ \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\left(|\nabla u(t)| \right) d\tau \right)^2 dx$$

$$+2 \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(t) - \nabla u(\tau)| \, d\tau \right) Q$$

donde $Q = \left(\int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(\tau)| \, d\tau dx \right)$

Trabajando con el tercer término de (17) :

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(t) - \nabla u(\tau)| \, d\tau \right) \left(\int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(t)| \, d\tau dx \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\eta} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(t) - \nabla u(\tau)| \, d\tau \right)^2 dx$$

$$+ \eta \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(\tau)| \, d\tau \right)^2 dx \tag{18}$$

De (18) en (17)

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\left(|\nabla u(t) - \nabla u(\tau)| + |\nabla u(t)| \right) d\tau \right)^2 dx \leq (1+\eta) \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(t)| \, d\tau \right)^2 dx$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(t) - \nabla u(\tau)| \, d\tau \right)^2 dx \tag{19}$$

Haciendo cálculos probamos que:

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(t) - \nabla u(\tau)| \, d\tau \right)^2 dx \leq \tag{20}$$

$$\leq \int_0^t g^{2-p}(\tau) \, d\tau \int_\Omega \int_0^t g^p(t-\tau) |\nabla u(\tau) - \nabla u(t)|^2 \, d\tau dx$$

Así de (20) en (19) y desde que : $\int_0^t g(\tau) \, d\tau \leq \int_0^\infty g(\tau) \, d\tau = 1 - \ell$ (dado de G1):

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\left(|\nabla u(t) - \nabla u(s)| + |\nabla u(t)| \right) d\tau \right)^2 dx \leq \tag{21}$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{n} \right) \int_0^t g^{2-p}(\tau) \, d\tau \int_\Omega \int_0^t g^p(t-\tau) |\nabla u(\tau) - \nabla u(t)|^2 \, d\tau dx$$

$$+ (1+n) \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(t)| \, d\tau \right)^2 dx$$

$$\leq (1+n)(1-\ell)^2 \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \, dx + \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\int_0^t g^{2-p}(\tau) \, d\tau \right) (g^p \circ \nabla u)(t) .$$

De (21) en (16):

$$\int_{\Omega}\nabla u\left(t\right)\cdot\int_{0}^{t}g\left(t-\tau\right)\nabla u\left(\tau\right)d\tau dx\leq\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla u\left(t\right)\right|^{2}dx+\frac{\left(1+\eta\right)\left(1-\ell\right)^{2}}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla u\left(t\right)\right|^{2}dx \qquad (22)$$
$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)\left(\int_{0}^{t}g^{2-p}\left(\tau\right)d\tau\right)\left(g^{p}\circ\nabla u\right)\left(t\right).$$

De (22) en ψ' :

$$\psi'\left(t\right)=\frac{1}{p+1}\int_{\Omega}\left|u_{t}\right|^{p+2}dx+\int_{\Omega}\left|\nabla u_{t}\right|^{2}dx-\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^{2}dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla u\left(t\right)\right|^{2}dx+$$
$$+\left(1+\eta\right)\left(1-\ell\right)^{2}\int_{\Omega}\left|\nabla u\left(t\right)\right|^{2}dx+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)\left(\int_{0}^{t}g^{2-p}\left(\tau\right)d\tau\right)\left(g^{p}\circ\nabla u\right)\left(t\right)-\int_{\Omega}f\left(u\right)udx.$$

Para $\eta=\dfrac{\ell}{1-\ell}$, η cualquiera, se tiene: $\frac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\eta}\right)=\dfrac{\ell}{2}$, $\dfrac{\left(1+\eta\right)\left(1-\ell\right)^{2}}{2}+\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{\ell}{2}$.
Por tanto,

$$\psi'\left(t\right)\leq-\frac{\ell}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^{2}dx+\frac{1}{2\ell}\left(\int_{0}^{t}g^{2-p}(\tau)\,d\tau\right)\left(g^{p}\circ\nabla u\right)\left(t\right)+\int_{\Omega}\left|\nabla u_{t}\right|^{2}dx+\frac{1}{p+1}\int_{\Omega}\left|u_{t}\right|^{p+2}dx \qquad (23)$$

Observemos que:

$$\frac{d}{dt}\left(\Delta u_{t}-\frac{\left|u_{t}\right|^{p}u_{t}}{p+1}\right)=\Delta u_{tt}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\left|u_{t}\right|^{p}u_{t}}{p+1}\right)=\Delta u_{tt}-\left|u_{t}\right|^{p}u_{tt}. \qquad (24)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{0}^{t}g\left(t-\tau\right)\left(u\left(t\right)-u\left(\tau\right)\right)d\tau\right)=\int_{0}^{t}g'\left(t-\tau\right)\left(u\left(t\right)-u\left(\tau\right)\right)d\tau+\int_{0}^{t}g\left(t-\tau\right)u_{t}\left(t\right)d\tau \qquad (25)$$

Derivando $\chi'\left(t\right)$ y de observación:

$$\chi'\left(t\right)=\int_{\Omega}\left[\frac{d}{dt}\left(\Delta u_{t}-\frac{\left|u_{t}\right|^{p}u_{t}}{p+1}\right)\int_{0}^{t}g\left(t-\tau\right)\left(u\left(t\right)-u\left(\tau\right)\right)d\tau dx\right] \qquad (26)$$
$$+\int_{\Omega}\left[\left(\Delta u_{t}-\frac{\left|u_{t}\right|^{p}u_{t}}{p+1}\right)\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}g\left(t-\tau\right)\left(u\left(t\right)-u\left(\tau\right)\right)d\tau\right]dx$$
$$=\int_{\Omega}\Delta u_{tt}\int_{0}^{t}g\left(t-\tau\right)\left(u\left(t\right)-u\left(\tau\right)\right)d\tau dx$$
$$-\int_{\Omega}\left|u_{t}\right|^{P}u_{tt}\int_{0}^{t}g\left(t-\tau\right)\left(u\left(t\right)-u\left(\tau\right)\right)d\tau dx$$
$$+\int_{\Omega}\Delta u_{t}\int_{0}^{t}g'\left(t-\tau\right)\left(u\left(t\right)-u\left(\tau\right)\right)d\tau dx+\int_{\Omega}\Delta u_{t}\int_{0}^{t}g\left(t-\tau\right)u_{t}\left(t\right)d\tau dx$$
$$-\int_{\Omega}\frac{\left|u_{t}\right|^{2}}{p+1}u_{t}\int_{0}^{t}g'\left(t-\tau\right)\left(u\left(t\right)-u\left(\tau\right)\right)d\tau dx$$
$$-\int_{\Omega}\frac{\left|u_{t}\right|^{2}u_{t}}{p+1}\int_{0}^{t}g\left(t-\tau\right)u_{t}\left(t\right)d\tau dx+\int_{\Omega}f\left(u\right)u_{t}dx.$$

Multiplicando la ecuación $(*)$ por $\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(t) - \nabla u(\tau))\, d\tau$:

$$\int_\Omega |u_t|^p u_{tt} \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau dx -$$
$$- \int_\Omega \triangle u \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau dx - \int_\Omega \triangle u_{tt} \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau dx$$
$$+ \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau) \triangle u(\tau)\, d\tau \right) \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_\Omega f(u) \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) \right) d\tau dx = 0$$

de donde:

$$\int_\Omega \triangle u_{tt} \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau dx$$
$$- \int_\Omega |u_t|^p u_{tt} \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau dx$$
$$= - \int_\Omega \triangle u \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau dx$$
$$+ \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau) \triangle u(\tau)\, d\tau \right) \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau \right) dx$$
$$+ \int_\Omega f(u) \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau dx.$$

Esta identidad en $\chi'(t)$ y agrupando:

$$\chi'(t) = \int_\Omega \triangle u \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau dx$$
$$+ \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau) \triangle u(\tau)\, d\tau \right) \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau \right) dx$$
$$+ \int_\Omega f(u) \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau dx + \int_\Omega \triangle u_t \int_0^t g'(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau dx$$
$$+ \int_\Omega \triangle u_t \int_0^t g(t-\tau) u_t(t)\, d\tau dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |u_t|^p u_t \int_0^t g'(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau dx$$
$$- \frac{1}{p+1} \int_\Omega |u_t|^p u_t \int_0^t g(t-\tau) u_t(t)\, d\tau dx + \int_\Omega f(u) u_t dx.$$

Por tanto,

$$\chi'(t) = \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(t) - \nabla u(\tau))\, d\tau dx \tag{27}$$
$$+ \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau) \triangle u(\tau)\, d\tau \right) \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau \right) dx$$
$$- \left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau \right) \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - \int_\Omega \nabla u_t(t) \cdot \int_0^t g'(t-\tau)(\nabla u(t) - \nabla u(\tau))\, d\tau dx$$
$$- \frac{1}{p+1} \int_\Omega |u_t|^p u_t \int_0^t g'(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau dx - \frac{1}{p+1} \left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau \right) \int_\Omega |u_t|^{p+2} dx$$
$$+ \int_\Omega f(u) \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))\, d\tau dx + \int_\Omega f(u) u_t dx.$$

Del mismo modo como para $\psi(t)$, estimaremos cada término del segundo miembro de (27), separadamente. Por ello usaremos reiteradamente la desigualdad de Cauchy-Schwartz, desigualdad de Hölder, desigualdad de Young's , y la relación dado en (20).
El cuarto término de (27):

$$\int_\Omega \nabla u_t(t)\cdot\int_0^t g'(t-\tau)(\nabla u(t)-\nabla u(\tau))\,d\tau dx \le \delta\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{g(0)}{4\delta}(-g'\circ\nabla u)(t). \quad (28)$$

Similarmente el quinto término de (27):

$$\int_\Omega |u_t|^p u_t\int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau dx \le \delta\int_\Omega |u_t|^{2(p+1)} dx + \frac{g(0)}{4\delta}C_p(-g'\circ\nabla u)(t). \quad (29)$$

Para cualquier $\delta > 0$ y C_p constante de Poincaré's.
Por la inmersión de los espacios de Sobolev:

$$H_0^1(\Omega)\to L^{2(p+1)}(\Omega)\quad \text{para}\quad 0<p<\frac{2}{n-2}\ \text{si}\ n\ge 3\quad \text{y}\ p>0\ \text{si}\ n=1,2.$$

y el hecho de que

$$\varepsilon(t)\le\varepsilon(0),\ t\ge 0\ (\text{pues } \varepsilon'(t)<0,\ \text{es no creciente})$$

obtenemos,

$$\int_\Omega |u_t|^{2(p+1)} dx \le C_s(2\varepsilon(0))^p\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx \quad (30)$$

donde C_s es la constante de inmersión.
De (29) y (30) obtenemos:

$$\frac{1}{p+1}\int_\Omega |u_t|^p u_t\int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau dx \le \frac{\delta C_s 2^p(\varepsilon(0))^p}{p+1}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{g(0)C_p}{4\delta(p+1)}(-g'\circ\nabla u)(t).$$

Tomando en cuenta las estimativas (28, 29, 30) en (27)

$$\begin{aligned}\chi' \le{}& \delta\left(1+2(1-\ell)^2\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \left(2\delta+\frac{1}{2\delta}\right)\left[\int_0^t g^{2-p}(\tau)\,d\tau\right](g^p\circ\nabla u)(t)\\ &+\left[\delta-\left(\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right)+\frac{\delta}{p+1}C_s(2\varepsilon(0))^p\right]\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - \frac{1}{p+1}\left(\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right)\int_\Omega |u_t|^{p+2}dx\\ &+\frac{g_{(0)}}{4\delta}\left(1+\frac{Cp}{p+1}\right)(-g'\circ\nabla u)(t)+\int_\Omega f(u)\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau dx-\frac{1}{2}\int_\Omega F(u)\,dx\end{aligned}$$

Para $t\ge t_0>0$, se tiene que $\int_0^t g(\tau)\,d\tau \ge \int_0^{t_0} g(\tau)\,d\tau := g_0$, por tanto:

$$\begin{aligned}\chi'(t)\le{}& \delta\left(1+2(1-\ell)^2\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \left(2\delta+\frac{1}{2\delta}\right)\left[\int_0^t g^{2-p}(\tau)\,d\tau\right](g^p\circ\nabla u)(t) \quad (31)\\ &+\left(\delta+\frac{\delta C_s}{p+1}(2\varepsilon(0))^p-g_0\right)\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx-\frac{g_o}{p+1}\int_\Omega |u_t|^{p+2}dx\\ &+\frac{g_{(0)}}{4\delta}\left(1+\frac{C_p}{p+1}\right)(-g'\circ\nabla u)(t)+\int_\Omega f(u)\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau dx\\ &-\frac{1}{2}\int_\Omega F(u)\,dx,\forall t\ge t_0>0.\end{aligned}$$

De (10), (23) y (31) en la definición de $\mathcal{L}(t)$, derivando obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) &= M'(t) + \epsilon\psi'(t) + \chi'(t)\\
&\leq \frac{M}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{M}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\epsilon\ell}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\epsilon}{2\ell}\left(\int_0^t g^{2-p}(\tau)\,d\tau\right)(g^p \circ \nabla u)(t)\\
&+\epsilon\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{\varepsilon}{p+1}\int_\Omega |u_t|^{p+2} dx - \epsilon\int_\Omega f(u)\,u dx + \delta\left(1+2(1-\ell)^2\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\\
&+\left(2\delta + \frac{1}{2\delta}\right)\left[\int_0^t g^{2-p}(\tau)\,d\tau\right](g^p \circ \nabla u)(t) + \left(\delta + \delta\frac{C_s}{p+1}(2\varepsilon(0))^p - g_0\right)\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx\\
&-\frac{g_0}{p+1}\int_\Omega |u_t|^{p+2} dx + \frac{g_0}{4\delta}\left(1+\frac{C_p}{p+1}\right)(-g' \circ \nabla u)(t) + \int_\Omega f(u)\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau dx.
\end{aligned}$$

Así finalmente ordenando obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq &\left[\frac{M}{2} - \frac{g(0)}{4\delta}\left(1+\frac{C_p}{p+1}\right)\right](g' \circ \nabla u)(t) -\\
&-\frac{g_0-\epsilon}{p+1}\int_\Omega |u_t|^{p+2} dx - \left[\frac{\epsilon\ell}{2} - \left(1+2(1-\ell)^2\right)\delta\right]\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\\
&-\left[(g_0-\epsilon) - \delta\left(1+\frac{C_s}{p+1}\right)(2\varepsilon(0))^p\right]\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx +\\
&+\left(\frac{\epsilon}{2\ell} + 2\delta + \frac{1}{2\delta}\right)\left(\int_0^t g^{2-p}(\tau)\,d\tau\right)(g^p \circ \nabla u)(t) +\\
&+\int_\Omega f(u)\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau dx.
\end{aligned}$$

Para $f(0) = 0$ y f satisfaciendo una condición de Lipschitz.
Reduciendo términos obtenemos para $\mathcal{L}'(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq &-\left\{\xi\left(\frac{M}{2} - \frac{g(0)}{4\delta}\left(1+\frac{Cp}{p+1}\right)\right) - \frac{1}{4\delta} - \left(\frac{\epsilon}{2\ell} + \frac{1}{2\delta} + 2\delta\right)\left(\int_0^t g^{2-p}(\tau)\,d\tau\right)\right\}(g^p \circ \nabla u)\\
&-\left\{\frac{\epsilon\ell}{2} - \delta\left(1+2(1-\ell)^2\right)\right\}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{g_0-\epsilon}{p+1}\int_\Omega |u_t|^{p+2} dx -\\
&-\left\{(g_0-\epsilon) - \delta\left(1+\frac{C_s}{p+1}(2\varepsilon(0))^p\right)\right\}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega F(u)\,dx
\end{aligned} \tag{32}$$

Caso 1: Si $p = 1$
En virtud de la elección adecuada de ϵ, δ y M, estimando (32), para con $\alpha \geq 0$, se tiene:

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\alpha\varepsilon(t), \forall t \geq t_0. \tag{33}$$

Por otro lado, usando la relación (31) (y también una inecuación similar a (31), con el reemplazo de ∇u por ∇u_t), (33) y las siguientes estimativas:

$$\int_\Omega |u_t|^p u_t u dx \leq \delta_1 C_p \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{C_s}{4\delta_1}(2\varepsilon(0))^p \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx, \quad \delta_1 > 0$$

y

$$\int_\Omega |u_t|^p u_t \int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau dx \leq \delta_2 C_s (2\varepsilon(0))^p \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1-\ell}{4\delta_2}\tilde{C}_p (g \circ \nabla u)(t)$$

Con $\delta_2 > 0$, se deduce que existen β_1, β_2 positivos tal que,

$$\beta_1 \varepsilon(t) \leq \mathfrak{L}(t) \leq \beta_2 \varepsilon(t). \tag{34}$$

Combinando (33) y (34) obtenemos

$$\mathfrak{L}'(t) \leq -\frac{\alpha}{\beta_2}\mathfrak{L}(t), \forall t \geq t_0 \tag{35}$$

Integrando sobre el intervalo $\langle t_0, t\rangle$ se obtiene:

$$\mathfrak{L}(t) \leq \mathfrak{L}(t_0)\, e^{-\frac{\alpha}{\beta_2}(t-t_0)}, \forall t \geq t_0 \tag{36}$$

Nuevamente de (34) obtenemos

$$\beta_1 \varepsilon(t) \leq \mathfrak{L}(t) \leq \mathfrak{L}(0)\, e^{-\frac{\alpha}{\beta_2}(t-t_0)},$$

de donde

$$\epsilon(t) \leq \frac{\mathfrak{L}(0)}{\beta_1} e^{-\frac{\alpha}{\beta_2}(t-t_0)},$$

Considerando

$$k = \frac{\mathfrak{L}(t_0)}{\beta_1} e^{\dfrac{\alpha t_0}{B_2}} > 0, \quad k = \frac{\alpha}{\beta_2} > 0$$

se obtiene

$$\varepsilon(t) \leq K e^{-kt}, \quad K > 0\ , \ k > 0.$$

Caso 2: Si $p > 1$
De las hipótesis (G1), (G2) se deduce que:

$$\int_0^\infty g^{1-\theta}(\tau)\, d\tau < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2-p,$$

así del Lema 3.3 de [6] se obtiene, para una constante $C > 0$:

$$(g \circ \nabla u)(t) \leq C \left\{ \left(\int_0^\infty g^{1-\theta}(\tau)\, d\tau \right) E(0) \right\}^{\frac{(p-1)}{(p-1+\theta)}} \{(g^p \circ \nabla u)(t)\}^{\frac{\theta}{(p-1+\theta)}} \tag{37}$$

Por tanto obtenemos, para $r > 1$,

$$\begin{aligned} \varepsilon^r(t) &\leq C \left\{ \varepsilon^{r-1}(0) \left[\int_\Omega |u_t|^{p+2} dx + \|\nabla u_t\|_2^2 + \int_\Omega F(u)\, dx \right] + [(g \circ \nabla u)]^r \right\} \\ &\leq C\varepsilon^{r-1}(0) \left\{ \int_\Omega |u_t|^{p+2} dx + \|\nabla u_t\|_2^2 + \|\nabla u_t\|_2^2 + \int_\Omega F(u)\, dx \right\} \\ &\quad + C\left\{ \left(\int_0^\infty g^{1-\theta}(\tau)\, d\tau \right) \varepsilon(0) \right\}^{r(p-1)/(p-1+\theta)} \{(g^p \circ \nabla u)(t)\}^{r\theta/(p-1+\theta)} \end{aligned} \tag{38}$$

Eligiendo $\theta = \frac{1}{2}$ y $r = 2p-1$ (por tanto, $\dfrac{r\theta}{(p-1+\theta)} = 1$), la estimativa (38) nos da,

$$\varepsilon^r(t) \leq C \left\{ \int_\Omega |u_t|^{p+2} dx + \|\nabla u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + (g^p \circ \nabla u)(t) + \int_\Omega F(u)\, dx \right\} \tag{39}$$

Combinando (32), (34) y (38) obtenemos

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\frac{\alpha}{C}\varepsilon^r(t) \leq -\frac{\alpha}{C}\beta_2^{-r}\mathcal{L}^r(t), \forall t \geq t_0. \tag{40}$$

De (40) mediante una simple integración,

$$\mathcal{L}(t) \leq C(1+t)^{-1/(r-1)}, \ \forall t \geq t_0. \tag{41}$$

De una consecuencia de (10), obtenemos:

$$\int_0^\infty G(t)\,dt + \sup_{t\geq 0} tG(t) < \infty$$

por consiguiente, por el Lema 3.3 de [6], tenemos

$$\begin{aligned}(g\circ\nabla u)(t) &\leq C_2\left[\int_0^t \|u(\tau)\|_{H^1(\Omega)}\,d\tau + t\,\|u(t)\|_{H^1(\Omega)}\right]^{(p-1)/p}(g^p\circ\nabla u)^{1/p}\\ &\leq C_2\left[\int_0^t G(\tau)\,d\tau + tG(t)\right]^{(p-1)/p}(g^p\circ\nabla u)^{1/p}\\ &\leq C_3\,(g^p\circ\nabla u)^{1/p}\end{aligned}$$

de donde

$$-(g^p\circ\nabla u) \leq -C_4\,(g\circ\nabla u)^p \tag{42}$$

Consecuentemente, una combinación de (32) y (42) obtenemos:

$$\mathcal{L}'(t) \leq -C_5\left[\int_\Omega |u_t|^{p+2}\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + (g\circ\nabla u)^p(t)\right] + \left[\int_\Omega F(u)\,dx\right], \ \forall t \geq t_0 \tag{43}$$

Por otro lado, tenemos similarmente a (39):

$$\varepsilon^p(t) \leq C_6\left[\int_\Omega |u_t|^{p+2}\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + (g^p\circ\nabla u)(t) + \int_\Omega F(u)\,dx\right], \ \forall t \geq t_0 \tag{44}$$

Combinando (40), (43) y (34):

$$\mathcal{L}'(t) \leq -C_7\varepsilon^p(t) \leq -C_8\mathcal{L}^p(t), \ \ \forall t \geq t_0 \tag{45}$$

Por una simple integración de (45) sobre el intervalo $\langle t_0, t\rangle$ nos da,

$$\mathcal{L}(t) \leq K(1+t)^{-1/(p-1)}, \ \ \forall t \geq t_0$$

por tanto, el decaimiento polinomial de $\varepsilon(t)$, planteado en el teorema se sigue de (34).

4. Conclusiones

El presente trabajo es un mejoramiento al presentado por Nasser-Eddine Tatar [11], obteniéndose el decaimiento de la energía exponencial y polinomial. Se podría hacer un estudio del mismo sistema para ecuaciones viscoelástico no lineal, con condiciones de Dirichlet - Newmann. Problemas que podrían abordarse con mucha satisfacción.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ANDRADE, N. *S A new approach to the strong stabilization of distributed systems, Differential Integral Equations,* 11(1998), pp. 369-376.

[2] S. BIRRIMI, S.A. MESSAOUDI, *Exponential decay of solutions to a viscoelastic equation with nonlinear localized damping, Electron. J. Differential Equations* 2004(88)1-10.

[3] M.M. CAVALCANTI, V.N.D. CAVALCANTI, J.S. PRATES FILHO, J.A. SORIANO, *Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping, Differential equations* 14(1)(2001) 85-116.

[4] M.M. CAVALCANTI, V.N.D. CAVALCANTI, J. FERREIRA, *Existence and uniform decay for nonliear viscoelastic equation with strong damping,* Math. Methods Appl. Sci. 24(2001)1043-1053.

[5] M.M. CAVALCANTI, V.N.D. CAVALCANTI, AND SORIANO, J. A, *Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping Electron. J. Differential Equations.* 2002(44) (2002), 1-14.

[6] M.M. CAVALCANTI, H.P. OQUENDO, *Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation SIAM J. Control Optim,* 42(4)(2003), 1310-1324.

[7] J. FERREIRA, D.C. PEREIRA, *On a hiperbolic degenerate evolution equation with strong dissipation, Int. J. Math. Math , Sci.* 15 (1992)543-552.

[8] J. FERREIRA, M. ROJAS, *On global weak solutions of a nonliear evolution equation in noncylindrical domain, in: Proceedings of the 9th International Colloquium on Differential Equations Ed. VSP,* 1999, pp. 155-162.

[9] M.M. CAVALCANTI, V.N. DOMINGOS CAVALCANTI, T.F. MA. AND J.A. SORIANO, *Global Existence and asymptotic stability for viscoelastic problemas. Differential Integral Equations,* Vol. 15. 2002, pp.731-748.

[10] M. AASSILA, M. M. CAVALCANTI, AND SORIANO, J. A, *Asymtotic Stability and energy Decay Rates For Solutions of the Wave Equation With Memory in a Star - Shaped Domain. SIAM J. Control Optim,* Vol 38, No 5, pp 1581-1602.

[11] SALIN A. MESSAOUDI, NASSER-EDDINE TATAR, *Exponential and polynomial decay for a quasilinear viscoelastic equation (a aparecer).*