PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XIV N°2, pp. 7-16, Lima - Perú, Agosto 2011

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO PARA UN PROBLEMA DE TRANSMISIÓN NO LINEAL CON AMORTIGUAMIENTO LOCALMENTE DISTRIBUIDO Y CON MEMORIA EN LA FRONTERA

Alfonso Perez[*], *Raúl Izaguirre*[**], *Victoriano Yauri*[***] & *Andrés Guardia*[****]

Resumen: Estudiaremos el Comportamiento asintótico para un problema de transmisión no lineal con amortiguamiento localmente distribuido y con memoria en la frontera dado por el sistema siguiente,

$$
(*)\left|\begin{array}{rll}
u_{tt}-\Delta u+\rho_1\left(x;a_1u_t\right)=0 & \text{en} & \Omega_1\times]0,T[\\
v_{tt}-\Delta v+\rho_2\left(x,a_2v_t\right)v=0 & \text{en} & \Omega_2\times]0,T[\\
u(x,t)+\displaystyle\int_0^t k\left(t-\tau\right)\frac{\partial u}{\partial\nu}d\tau=0 & \text{sobre} & \Gamma\times]0,T[\ \text{(condición de frontera)}\\
v(x,t)=0 & \text{sobre} & \Gamma_2\times]0,T[\ \text{(Condición de frontera)}\\
u=v;\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=\dfrac{\partial u}{\partial\nu} & \text{sobre} & \Gamma_1\ \text{(Condición de contacto)}\\
u(x,0)=u_0,u_t(x,0)=u_1 & \text{en} & \Omega_1\ \text{(Condición inicial)}\\
v(x,0)=v_0,v_t(x,0)=v_1 & \text{en} & \Omega_2\ \text{(Condición de inicial)}
\end{array}\right.
$$

Palabras clave: Decaimiento exponencial. Transmisión. Memoria en la Frontera. Amortiguamiento Local Interno.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR FOR A PROBLEM OF TRANSMISSION WITH NONLINEAR DAMPING LOCALLY DISTRIBUTED AND MEMORY IN THE BORDER

Abstract: We will study the asymptotic Behavior for a problem of transmission nonlinear with damping locally distributed and with memory at the chosen to boundary for the system following,

$$
(*)\left|\begin{array}{rll}
u_{tt}-\Delta u+\rho_1\left(x,a_1u_t\right)=0 & \text{in} & \Omega_1\times]0,T[\\
v_{tt}-\Delta v+\rho_2\left(x,a_2u_t\right)v=0 & \text{in} & \Omega_2\times]0,T[\\
u(x,t)+\displaystyle\int_0^t k\left(t-\tau\right)\frac{\partial u}{\partial\nu}d\tau=0 & \text{on} & \Gamma\times]0,T[\ \text{(Condition of boundary)}\\
v(x,t)=0 & \text{on} & \Gamma_2\times]0,+\infty[\ \text{(Condition of boundary)}\\
u=v;\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=\dfrac{\partial u}{\partial\nu} & \text{on} & \Gamma_1\ \text{(Condition of contact)}\\
u(x,0)=u_0,u_t(x,0)=u_1 & \text{in} & \Omega_1\ \text{(Initial condition)}\\
v(x,0)=v_0,v_t(x,0)=v_1 & \text{in} & \Omega_2\ \text{(Initial condition)}
\end{array}\right.
$$

Key words: Exponential depression. Transmission. Memory in the Boundary. Local Internal Damping.

[*] UNMSMS, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: apersal@hotmail.com
[**] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: raul_izaguirre2222@yahoo.es
[***] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: victoriano_yauri@hotmail.com
[****] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: agcbayo@yahoo.es

1. Introducción

El presente trabajo modela la oscilación de un sólido compuesto por dos materiales elásticos diferentes y suponemos que su frontera externa es interior al fluido viscoelástico, produciendo un mecanismo disipativo de tipo memoria mientras que su frontera interna es sujetado.

Los trabajos con amortiguamiento localmente distribuidos han sido estudiados por varios autores por ejemplo ver [?, ?, ?, ?, ?] de la bibliografía y trabajos con disipación en la frontera también han sido estudiados por muchos autores entre ellos podemos citar [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?]. Para información de carácter teórico sobre la estabilidad del sistema planteado y su disipación en la frontera podemos ver en [?, ?].

Modelos con disipación memoria son física y matemáticamente mas interesantes; físicamente, porque nuestro modelo sigue las ecuaciones constitutivas para materiales con memoria y matemáticamente porque las estimativas necesarias para obtener el decaimiento exponencial son más delicados y dependen de la función relaxación, ver por ejemplo [?].

La disipación memoria es producido por la interacción de materiales con memoria, tales tipos de disipación son muy sutiles y sus análisis son bastante delicados que el amortiguamiento friccional, porque introduce otros tipos de dificultades técnicas, son muy pocos los trabajos en esta dirección, ver [?].

El trabajo planteado está básicamente sustentado en varios resultados obtenidos por ejemplo [?, ?, ?, ?]. El presente estudio se torna bastante interesante debido a que efectos de amortiguamiento en los cuerpos, se pueden reducir a tan sólo una vecindad de la frontera como lo es en este problema de transmisión, y más aún con una disipación de memoria dada en la frontera.

Precisaremos ahora datos sobre el sistema planteado:
En el presente artículo se hace el estudio del sistema $(*)$ donde el problema está bien puesto en el espacio vectorial $(u_0, v_0) \in V; (u_1, v_1) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ donde

$$V = \left\{(u,v) \in H^1(\Omega_1) \times W;\ u = v \text{ sobre } \Gamma_1\right\} \text{ y } W = \left\{w \in H^1(\Omega_2); w(x) = 0 \text{ sobre } \Gamma_2\right\}$$

son espacios vectoriales.

Las hipótesis para el sistema son:
El dominio de Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, con frontera regular $\partial\Omega = \Gamma$ de clase C^3 que contiene a Ω_i; para $i = 1,2$ se tiene;

$$\rho_i : \overline{\Omega}_i \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ funciones, } i = 1,2 \text{ tales que,}$$

1. $\rho_i(x,s)\, s \geq 0,\ s \in \mathbb{R}; x \in \Omega_i;\ i = 1,2$
2. ρ_i y $\dfrac{\partial \rho_i}{\partial s}$ son continuas en $\overline{\Omega}_i \times \mathbb{R};\ i = 1,2$
3. Existen constantes $k_1, k_2 > 0$ y $p \in \mathbb{R}, -1 < p \leq 2$ tal que
$$k_1 a_i(x)\,|s|^{p+1} \leq |\rho_i(x,s)| \leq k_2 a_i(x)\left[|s|^{p+1} + |s|\right], \forall s \in \mathbb{R}; \forall x \in \Omega_i$$
4. $\dfrac{\partial \rho_i}{\partial s}(x,s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}; \forall x \in \Omega_i$
5. $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)\,dt,\quad G(s) = \int_0^s g(t)\,dt$

   $a_i : \overline{\Omega}_i \to \mathbb{R}^+\ \ a_i(x) \geq a_{i,0} > 0,\ a_i \in L^\infty(\Omega_i);\ i = 1,2\ \ \Omega_i \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y regular.

El sistema $(*)$ tiene por energía

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\left[|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + 2F(u)\right]dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\left[|v_t|^2 + |\nabla v|^2 + 2G(v)\right]dx$$
$$-\frac{1}{2}\int_\Gamma a'\Box u\, d\Gamma + \frac{a(t)}{2}\int_\Gamma |u|^2\, d\Gamma$$

la cual tiene un decaimiento exponencial, es decir,

$$\exists\ C, \gamma > 0 \text{ tal que } E(t) \leq Ce^{-\gamma t}\ \forall t \in (0, \infty).$$

2. Preliminares

Trabajaremos el sistema $(*)$ para dos formas

- Para el caso cuando $\rho_1(x, a_1 u_t) = f(u)$ y $\rho_2(x, a_2 v_t) = g(v)$ con las condiciones dadas en (5) y otras hipótesis conocidas para estas funciones
- Para el caso $\rho_1(x, a_1 u_t)$ y $\rho_2(x, a_2 u_t)$ con las condiciones de (1)–(4)

A. Primeramente estudiamos para el caso:

$$\rho_1 = f(u),\ \rho_2 = g(v) \text{ donde } F(s) = \int_0^s f(t)\,dt,\ G(s) = \int_0^s g(t)\,dt$$

Definición 1. Diremos que el par (u, v) es una solución débil de $(*)$ si,

$$(u, v) \in L^\infty(0, T; V) \text{ y } (u_t, v_t) \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)\right)$$

y satisface la identidad;

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega_1} [u\varphi_{tt} + \nabla u \nabla \varphi + f(u)\varphi]\,dxdt + \int_0^T \int_{\Omega_2} [v\psi_{tt} + \nabla v \nabla \psi + g(v)\psi]\,dxdt \\
&\qquad = \int_{\Omega_1} u_1 \varphi(0)\,dx - \int_{\Omega_1} u_0 \varphi_t(0)\,dx + \int_{\Omega_2} v_1 \psi(0)\,dx - \int_{\Omega_2} v_0 \psi_t(0)\,dx \\
&\qquad\quad - \int_\Gamma \left[\frac{1}{K(0)} u_t + a(0)u + a' * u - a(t)u_0\right] \varphi d\Gamma;\quad \forall(\varphi, \psi) \in C^2(0, T, V)
\end{aligned} \tag{1}$$

tal que $\varphi(T) = \varphi_t(T) = \psi(T) = \psi_t(T) = 0$.
denotemos por $a(t)$ a la función que satisface,

$$K(0)a + K'^{*}a = \frac{-K'}{k(0)}$$

$$(K * g)(., t) = \int_0^t K(t - \tau)\, g(., t)\, d\tau \text{ (convolución de } K \text{ con } g)$$

$a(t)$ es llamado el núcleo resolvente de K.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{-1}{K(0)} u_t - a * u_t$$

Usando el resolvente de Volterra 's tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{-1}{K(0)} u_t - a * u_t$$

Efectuado una integración por partes obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{-1}{K(0)} u_t - a(0)u - a' * u + a(t)u_0 \tag{2}$$

Para abreviar las anotaciones definimos los operadores:

$$(\alpha \square f)(t) = \int_0^t \alpha(t - \tau)\, |f(t) - f(\tau)|^2\, d\tau$$

$$(\alpha \diamond f)(t) = \int_0^t \alpha(t - \tau)\, [f(t) - f(\tau)]\, d\tau$$

$$(\alpha * f)(t) = \left(\int_0^t \alpha(s)\,ds\right) f(t) - (\alpha \diamond f)(t)$$

Lema 1. $\forall \alpha \in C^1$ y $\forall \varphi \in W^{1,2}(0,T)$ se tiene:

$$\begin{aligned}(\alpha * \varphi)(t)\,\varphi_t &= \left(\int_0^t \alpha(t-\tau)\,\varphi(t)\,d\tau\right)\varphi_t \\ &= -\frac{1}{2}\alpha(t)\,|\varphi(t)|^2 + \frac{1}{2}\alpha'\Box\varphi - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\alpha\Box\varphi - \left(\int_0^t \alpha ds\right)|\varphi|^2\right\}.\end{aligned}$$

Mediante el Lema 1 y (5) de la hipótesis obtenemos la energía del sistema $(*)$:

$$\begin{aligned}E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_1}&\Big[|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + 2F(u)\Big]\,dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\Big[|v_t|^2 + |\nabla v|^2 + 2G(v)\Big]\,dx \\ &\qquad + \frac{\alpha(t)}{2}\int_\Gamma |u|^2\,d\Gamma - \frac{1}{2}\int_\Gamma \alpha'\Box u d\Gamma\end{aligned}$$

y

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\frac{1}{K(0)}\int_\Gamma |u_t|^2\,d\Gamma + \frac{\alpha'}{2}\int_\Gamma |u|^2\,d\Gamma - \frac{1}{2}\int_\Gamma a''\Box u d\Gamma.$$

Teniendo en cuenta que:

$$a(t) > 0,\ a'(t) < 0y\ a''(t) > 0,\ \text{entonces } \frac{dE(t)}{dt} < 0$$

obtenemos que la energía $E(t)$ es decreciente.

Ahora bien, mediante el método de los multiplicadores y operadores de Liapunov e inmersiones de Sobolev obtenemos el decaimiento exponencial y polinomial, esto es, se tiene el operador,

$$\xi(t) := NE(t) + \Phi(t)$$

con

$$\Phi(t) = J_0(t) + \left(\frac{n-\delta}{2}\right)\left[\int_{\Omega_1} uu_t dx + \int_{\Omega_2} v_t v dx\right]$$

y

$$J_0(t) = \int_{\Omega_1} u_t q.\nabla u dx + \int_{\Omega_2} v_t q.\nabla v dx$$

deducimos:

$$\frac{d}{dt}\xi(t) \le -\frac{\delta_0}{2}E(t) \le -C\xi(t)$$

de donde se obtiene el resultado deseado:

$$E(t) \le CE(0)\exp(-\delta_1 t);\ \text{donde } Cy\delta_1 \text{ son constante positivas}$$

y también el decaimiento polinomial

$$E(t) \le \frac{C}{(1+t)^{p+1}}E(0).$$

B. Ahora estudiamos el caso:

$$\rho_1 = \rho_1(x, a_1 u_t) \text{ y } \rho_2 = \rho_2(x, a_2 v_t)$$

Ahora se tiene el sistema

$$(**)\quad\left|\begin{array}{rll} u_{tt} - \Delta u + \rho_1(x, a_1 u_t) = 0 & \text{en} & \Omega_1\times]0,T[\\ v_{tt} - \Delta v + \rho_2(x, a_2 v_t) = 0 & \text{en} & \Omega_2\times]0,T[\\ u(x,t) + \displaystyle\int_0^t k(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial\nu}d\tau = 0 & \text{sobre} & \Gamma\times]0,T[\\ v(x,t) = 0 & \text{sobre} & \Gamma_2\times]0,T[\\ u = v;\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu} = \dfrac{\partial v}{\partial\nu} & \text{sobre} & \Gamma_1 \\ u(x,0) = u_0(x),\, u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en} & \Omega_1 \\ v(x,0) = v_0(x),\, v_t(x,0) = v_1(x) & \text{en} & \Omega_2 \end{array}\right.$$

Definición 2. Diremos que el par (u,v) es una solución débil de $(**)$ si,

$$(u,v)\in L^{\infty}(0,T;V) \text{ y } (u_t,v_t)\in L^{\infty}\left(0,T;L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)\right)$$

y satisface la siguiente identidad

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\Omega_1}\left[u\varphi_{tt}+\nabla u\nabla\varphi+\rho_1(x,a_1u_t)\varphi\right]dxdt+\int_0^T\int_{\Omega_2}\left[v\psi_{tt}+\nabla u\nabla\psi\right]dxdt\\ +\int_0^T\int_{\Omega_2}\left[\rho_2(x,a_2u_t)\psi\right]dxdt=\int_{\Omega_1}u_t\varphi(0)\,dx-\int_{\Omega_1}u_0\varphi_t(0)\,dx\\ +\int_{\Omega_2}v_1\psi(0)\,dx-\int_{\Omega_2}v_0\psi_t(0)\,dx-\int_{\Gamma}\left[\frac{1}{K(0)}u_t\right]\\ +\int_{\Gamma}\left[a(0)\,u+a'*u-a(t)\,u_0\right]\varphi d\Gamma;\ \forall(\varphi,\psi)\in C^2(0,T;V)\end{aligned}\tag{3}$$

tal que

$$\varphi(T)=\varphi_t(T)=\psi(T)=\psi_t(T)=0$$

las hipótesis que usamos sobre $a(\cdot)$ son las siguientes:

$$\begin{aligned}a(t)>0,a'(t)<0,a''(t)>0;\ \forall t\geq 0\\ -C_0a'(t)\leq a''(t)\leq -C_1a';\ \forall t\geq 0\end{aligned}\tag{4}$$

donde las constantes son positivas.
El dominio Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, $1\leq n\leq 3$, con frontera regular (clase C^3), $(u_0,v_0)\in V$ y $(u_1,v_1)\in L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)$, $u_0=0$ en Γ.

Teorema 1. Consideremos los datos iniciales

$$(u_0,v_0)\in V \text{ y } (u_1,v_1)\in L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2),\ u_0=0 \text{ en } \Gamma.$$

Entonces, existe una solución (u,v) del sistema $(**)$, satisfaciendo la condición de compatibilidad

$$\frac{\partial u_0}{\partial\nu}=-\frac{1}{K(0)}u_t-au_0 \text{ sobre } \Gamma, u_0=v_0 \text{ y } \gamma_1\frac{\partial u}{\partial\nu}=\gamma_1\frac{\partial v}{\partial\nu}; \text{ sobre } \Gamma_1;$$

entonces

$$(u,v)\in C\left(0,T;H^2(\Omega_1)\times H^2(\Omega_2)\right)\cap C^1(0,T;V)\cap C^2\left(0,T;L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)\right)$$

Demostración: La prueba de la existencia de soluciones es usando el método de Galerkin.
Trataremos ahora que la energía asociada al sistema $(*)$ decae exponencialmente cuando el tiempo t va hacia el infinito.
Primero necesitamos algunos resultados preliminares.

Lema 2. Bajo las notaciones anteriores tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t)=-\frac{1}{K(0)}\int_{\Gamma}|u_t|^2\,d\Gamma+\frac{a'(t)}{2}\int_{\Gamma}|u|^2\,d\Gamma-\frac{1}{2}\int_{\Gamma}a''\Box ud\Gamma\\ -\int_{\Omega_1}\rho_1(x,a_1u_t)\,u_tdx-\int_{\Omega_2}\rho_2(x,a_2v_t)\,dx\end{aligned}\tag{5}$$

donde

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\left[|u_t|^2+|\nabla u|^2\right]dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\left[|v_t|^2+|\nabla v|^2\right]dx-\frac{1}{2}\int_{\Gamma}a'\Box ud\Gamma+\frac{a(t)}{2}\int_{\Gamma}|u|^2\,d\Gamma$$

Demostración: Multiplicando por $u_t\,(**)_1$ y por $v_t\,(**)_2$ luego sumando se obtiene el Lema 2. Podemos observar de las hipótesis (1 - 5) que los términos del segundo miembro (8) son todos negativos en consecuencia la energía es decreciente.

Denotemos el operador J_0 por

$$J_0\,(t) = \int_{\Omega_1} u_t q.\nabla u dx + \int_{\Omega_2} v_t q.\nabla v dx$$

donde $q_k : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es un campo escalar, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Lema 3. Sea $q\,(x) = x - x_0 \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, entonces cualquier solución fuerte de $(**)$ satisface

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(J_0\,(t)\right) \leq & -\int_{\Omega_1} \rho_1\,(x, a_1 u_t)\, q.\nabla u dx - \int_{\Omega_2} \rho_2\,(x, a_2 v_t)\, q.\nabla v dx \\ & + \frac{\eta}{2}\int_{\Omega_1}\left[|\nabla u|^2 - |u_t|^2\right] - \int_{\Omega_1}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma}\left[|u_t|^2 - |\nabla u|^2\right] q.\nu d\Gamma \\ & + \frac{\eta}{2}\int_{\Omega_2}\left[|\nabla v|^2 - |v_t|^2\right] - \int_{\Omega_2}|\nabla v|^2\end{aligned}$$

Demostración:
Multiplicando por $q.\nabla u\left(q_k\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right)$ en $(**)_1$ se obtiene

$$\begin{aligned}-\int_{\Omega_1}\varphi_1\,(x, a_1 u_t)\, q.\nabla u dx = & \frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_1} u_t q\cdot\nabla u dx\right) + \frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\operatorname{div}(q)\,|u_t|^2\,dx \\ & - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}|u_t|^2\, q\cdot\nu + \int_{\Omega_1}\sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k}\nabla u\cdot\nabla q_k \\ & - \frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\operatorname{div}(q)\,|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} q.\nu\,|\nabla u|^2.\end{aligned} \tag{6}$$

Análogamente multiplicamos por $q\cdot\nabla v\left(q_k\dfrac{\partial v}{\partial x_k}\right)$ en $(**)_2$ se obtiene

$$\begin{aligned}-\int_{\Omega_1}\varphi_2\,(x, a_2 v_t)\, q\nabla v dx = & \frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_2} v_t q\cdot\nabla v dx\right) + \frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\operatorname{div}(q)\,|v_t|^2\,dx + \\ & + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} q\cdot v\,|\nabla v|^2\end{aligned} \tag{7}$$

sumando (6), (7), ordenando y de la definición de J_0 se obtiene el Lema 3.

Lema 4. Para $u\,(x,t)$ solución débil de $(**)$; se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\Omega_1} u_t u dx + \int_{\Omega_2} v_t v dx\right) = & \int_{\Omega_1}\left[|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right] dx - \int_{\Gamma_1} u\frac{\partial u}{\partial\nu} d\Gamma + \int_{\Omega_2}\left[|v_t|^2 + |\nabla v|^2\right] \\ & - \int_{\Omega_1}\varphi_1\,(x, a_1 u_t)\, u - \int_{\Omega_2}\varphi_2\,(x, a_2 v_t)\, v.\end{aligned}$$

Definimos la funcional

$$\Phi\,(t) = J_0\,(t) + \left(\frac{n-\delta}{2}\right)\left[\int_{\Omega_1} u u_t dx + \int_{\Omega_2} v v_t dx\right].$$

Considerando $q\,(x) = x - x_0$, se tiene el siguiente lema.

Lema 5. Con la hipótesis del Lema 2 y 3 se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d}(\Phi(t)) \leq & -\left(\frac{n-\delta+2}{2}\right)\int_{\Omega_1}\varphi_1(x,a_1u_1)[u+q\cdot\nabla u]\,dx \\ & -\left(\frac{n-\delta+2}{2}\right)\int_{\Omega_1}\varphi_2(x,a_1v_1)[v+q\cdot\nabla u]\,dx \\ & -\delta_oE_0+\frac{n}{2}\int_{\Gamma}\left[|u_t|^2-|\nabla u|^2\right]q\cdot\nu d\Gamma.\end{aligned}$$

donde

$$E_0=\frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\left[|u_t|^2+|\nabla u|^2\right]dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\left[|v_t|^2+|\nabla v|^2\right]dx.$$

Demostración: De los Lemas 2 y 3 y la definición de $\Phi(t)$ obtenemos el Lema 5.

Lema 6. Con las hipótesis $(1)-(4)$ respecto a las funciones

$$\varphi_i, a_i \text{ para } i=1,2$$

se tiene,

$$I_1=\int_{\Omega_1}\varphi_1(x,a_1u_t)[u+q.\nabla u]\,dx\leq CE(t)$$
$$I_2=\int_{\Omega_2}\varphi_2(x,a_2v_t)[v+q.\nabla v]\,dx\leq KE(t)$$

Demostración: Ver [?].

3. Teorema Central

Teorema 2. Con la hipótesis (1) - (5) se tiene que para $u(x,t)$ solución débil de $(**)$, la energía asociada al sistema $E(t)$ decae exponencialmente cuando t tiende al infinito, es decir, $\exists\ c,\delta_1$ constantes positivos tal que

$$E(t)\leq cE(0)\exp(-\delta_1 t)$$

Demostración:

En Γ, $|\nabla u|=\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|$. De la condición de memoria en la frontera $(**)_3$ y la relación

$$(\alpha*f)(t)=\left(\int_0^t\alpha(s)\,ds\right)f(t)-(\alpha\diamond f)(t)$$

se obtiene,

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}=-\frac{1}{k(0)}u_t-a(t)u-a'\diamond u$$

De donde se sigue,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\leq 2\left\{-\frac{1}{k^2(0)}|u_t|^2-a^2(t)|u|^2-|a'\diamond u|^2\right\}$$

y desde que,

$$|a'\diamond u|^2=\left|\int_0^t a'(t-s)\{u(s)-u(t)\}\,ds\right|^2\leq\left(\int_0^t a'(t-s)\,ds\right)|a'|\,\Box u.$$

y como $a(t)>0, a'(t)<0, a''(t)>0$ se tiene,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|\leq K_0\left\{|u_t|^2+a(t)|u|+a'\Box u\right\}. \tag{8}$$

Desde que

$$\int_\Gamma |u|^2 \, d\Gamma \leq c \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \right] dx$$

Tenemos que

$$\xi = NE(t) + \Phi(t)$$

satisface

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\xi(t) \leq & -\frac{N}{K_0} \int_\Gamma |u_t|^2 \, d\Gamma + \frac{Na'(t)}{2} \int_\Gamma |u|^2 \, d\Gamma - \frac{N}{2} \int_\Gamma a'' \Box u d\Gamma + c \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma \\ & - \frac{\delta_0}{2} E_0(t) + \int_\Gamma q.v \, |u_t|^2 \, d\Gamma \end{aligned} \tag{9}$$

De (8) en (9) concluimos que

$$\frac{d}{dt}\xi \leq -\left(\frac{N}{K(0)} - c_2 \right) \int_\Gamma |u_t|^2 \, d\Gamma - \left(\frac{N}{2} - c_2 \right) \int_\Gamma a'' \Box u d\Gamma - \frac{\delta_0}{2} E(t)$$

Entonces obtenemos,

$$\frac{d}{d}\xi(t) \leq -\frac{\delta_0}{2} E(t) \leq -c\xi(t)$$

de donde nuestra conclusión se sigue.

4. Conclusiones

El método usado para obtener el decaimiento exponencial del sistema (**) que era nuestro objetivo, tiene bastante dificultad para estimar el término disipativo interno $\rho_1(x, a_1 u_1)$, $\rho_2(x, a_2 v_t)$ ver [?], en un caso particular puede ser considerado $a_1(x) u_t$ y $a_2(x) v_t$. Se han combinado muchas técnicas en este problema que tiene disipación interna y disipación de tipo memoria en la frontera. De esta manera asegura el decaimiento de la energía.

Sería materia de estudio analizar el comportamiento asintótico de la energía usando el Método de Continuación Única.

Bibliografía

[1] CAVALCANTI, M.; CAVALCANTI, V.; PRATES, J.; SORIENS, J. (1999). *Existente and uniform decay of solution of a degenerate equation with Non linear boundary damping and boundary memory surce term Nonlinear.* Vol. 38(1) 281 - 294.

[2] CONRAD, F. (1993). *Decat of solutions of the wave equation in star - shaped domain with non linear boundary feeback Asymptotic Analysis.* Vol 7(1) 159 - 177.

[3] GREENBERG J.M.; LITATSIEN (1984). *The effect of the boundary damping of the quasilinear wave equations Journal of Diferential Equations* Vol 52(1) pp 66-75.

[4] LASIECKA, I. (1992). *Global Uniform decay rates for the solution to the wave equation with nonlinear boundary conditiuons Aplicable.* Analysis Vol 47(1) 191-212.

[5] LIONS, J. L. (1969). *Quelques methods de désolution des próblemes aux limitesnon linéares.* Dunod Gauthier - Villars, Paris.

[6] LIONS, J. L. (1988). *Controlabilite exacte pereturbatios et stabilisatios . systems distributes.* Masson Paris. Tomo I y II.

[7] LIU, K.; LIU, Z. (1998). *Exponential decay of the energy of the Euler Bernoulli bean with locally distributed. Kelvin-Void.* SIAM Control and Optimizacion 36, pp 1086-1098.

[8] LIU, W.; WILLIAMS, G. (1998). *The exponential stability of the problem of transmission of the ware equation Bull Austral.* Math. Soc. Vol 57 (1) pp 305-327.

[9] MUÑOZ, J.; PORTILLO, H. (2000). *The Transmisión problem of viscoelastic waves.* Acta Aplicandel Mathematic Vol 650(1) 1-21.

[10] MUÑOZ, J.; PÉREZ, A. (2001). *Asymptotic Behaviour of the energy to partial viscoelastic materials.* Quarterly of Applied Mathematics. Vol. LIX Num 557-558.

[11] MUÑOZ, J.; FU, T. O. (2002). *Exponential stability of the transmission problem* To appear.

[12] ONO, K. (1994). *Astretchet string equation with a boundary dissipations Kyushu J. of Math.* Vol 28(2) 265 - 281.

[13] PAZOTO, A.; COELHO, L.; COIMBRA, R. (2004). *Uniform Stabilizacion of a plate Equation with nonlinear Localizad Dissipation.* Proyecciones Vol. 23, Nro 3, pp 205 - 234. December. Antofagasta Chile Univ. Católica del Norte.

[14] PÉREZ, A. (1997). *Decaimiento de solucoes de equacoes parcialmente viscoelasticas.* Tesis doctorado UFRJ. Brasil.

[15] TUCSNAK, M. (1993). *Boundary stabilization for thestretched string equation Differential and Integral Equatiuon.* Vol 6 (4) 925-935.

[16] WEIXI, S.; SONGMU, Z.; (1986). *Global smoth Solution to the system of one dimensional. Thermoelasticity with dissipation boundary condition chin.* Ann Of Math. Vol 78(3). pp 303-317.

[17] Wyler, A. (1994). *Stabilily of wave equation with dissipative boundary conditions in a bounded domanin Diferential and Integral Equation.* Vol 7(2) 345 - 366.

[18] Zhang, Q.; Huang, F. (2003). *BoundaryStabilization for a Hybrid system of viscolelaticity.* SIAM J. Control Optim. Vol 42 Nro5 pp 1943-1996.

[19] Zuazua, E. (1990). *Exponential Devay for the semilinear wave equation with locally distribuited damping.* Comunication in PDE Vol 15(1) 205-235.