PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XIII N°2, pp. 59-76, Lima - Perú. Diciembre 2010

ANÁLISIS MULTIRESOLUCIÓN

Luis Miguel Nuñez Ramirez[1], *Rodolto Galvez Perez* [1] & *Humberto Emiliano Galvez Perez* [1]

Resumen: Antes de haberse formalizado el concepto del Análisis Multiresolución (AMR), la construcción de bases ortonormales de ondículas debió ser demasiado dificultoso. Por ello, el estudio del AMR adquiere importancia y por consiguiente la construcción de Ondículas se hace viable.

En la construcción de una ondicula Ψ, debemos determinar una función escala Φ, para luego construir su *Análisis Multiresolución* asociado; en seguida se pasa ha construir Ψ, con propiedades deseadas para las aplicaciones.

Palabras clave: Análisis Multiresolución, Función escala, Base Ortonormal de Ondículas, Base de Riesz.

ANALYSIS MULTIRESOLUTION

Abstract: Before the concept has been formalized Analysis Multiresolution AMR, base construction orthonormal wavelet should be too difficult. For Therefore, the study of AMR becomes important and therefore construction of Wavelets is viable.

In the construction of a wavelet Ψ, we determine a scale function Φ, then build your Analysis Associated multiresolution; soon passed has built Ψ with desired properties for applications.

Key words: Multiresolution Analysis, Function scale Orthonormal wavelet basis, Riesz base.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas

1. Introducción

El argumento esencial de la teoría (en $\mathbb{R}$) es comenzar con una función, llamada Ondícula, generadora o Madre, la cual es sometida a encogimientos y alargamientos, asi como traslaciones por toda la recta, dando lugar al surgimiento de una familia de Ondícula, las que constituirán una base ortonormal del espacio en que se trabaja (en este caso $L^2(\mathbb{R})$).

Tal Ondícula, es concentrada en un cierto intervalo pero es movediza por toda la recta. Un ejemplo básico, pero importante son las Ondícula de A. Haar, aunque no son regulares. Sin embargo, es importante resaltar que antes de formalizarse el AMR, ya se habían construido ejemplos de bases ortonormales de Ondículas regulares.

2. Análisis Multiresolución

El concepto de Análisis Multiresolución (AMR) de un espacio de Hilbert de funciones fue formulada por S. Mallat y Y. Meyer en 1986, lo que constituye un ejemplo de la armonía entre la matemática pura y la aplicada pués Mallat trabajaba en el análisis de la imagen, en donde es frecuente trabajar en forma simultánea en diferentes escalas, la cual motivo interpretar la bases ortonormales de Ondícula (construidas por Meyer) como instrumentos para escribir sistemá ticamente el incremento o disminución de información, lo cual permite obtener una buena ó mejor aproximación a altas escalas.

Definición 2.1. *Un AMR para $L^2(\mathbb{R})$ es una familia de subespacios cerrados $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tales que:*

i) $\ldots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \ldots$.

ii) $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ *es denso en* $L^2(\mathbb{R})$.

iii) $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}$.

iv) $V_{n+1} = D_2 V_n = \{f(2^{-n}x) : f(x) \in V_n\}$.

v) *Existe* $\phi \in V_0$ *tal que* $\{T_n\phi\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es una base ortonormal (b.o.n) para* V_0.

Observación 2.1. *Apartir de* iv) *y* v) *se sigue que:*

a) $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^{-m}x) \in V_m$.

b) V_0 es invariante por traslaciones, esto es,

$$T_k V_0 = \{f(x-k) : f(x) \in V_0\} = V_0,\ k = 0, \pm 1, \pm 2 \pm \cdots$$

c) $V_m = D_{2^m} V_0 = D_{2^m} T_k V_0 = \{f(2^{-m}x - k) : f(x) \in V_0\}$.

d) Para cada m fijo, $\left\{\phi_{m,n}(x) = 2^{-m/2}\phi(2^{-m}x - n)\right\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal para V_m.

Ejemplo 2.1. *Sea* $V_0 = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f\, es\ constante\ en\, [m, m+1)\,, m \in \mathbb{Z}\}$

$\phi(x) = \chi_{[0,1)}$, $\{V_m = D_{2^m} V_0\}$ es un AMR.

Nota:

a) La definición de Mallat's de un AMR es diferente pero equivalente al anterior. Su definición no estipula la existencia de la función ϕ y por lo tanto no incluye la condición v, pero establece dos condiciones más sobre los subespacios $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$:

i) Si $f(x) \in V_n$, entonces $f(x - 2^{-n}k) \in V_n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

ii) Existe un isomorfismo de V_0 sobre $\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{c : \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty\right\}$. Estas dos condiciones garantiza la existencia de ϕ y la validez de v).

b) La función ϕ es llamada la función escala de un AMR.

Ahora, surge la pregunta natural ¿Cómo un AMR genera una base ortonormal de ondículas para $L^2(\mathbb{R})$?. Veamos, como $V_n \subset V_{n-1}$, definamos W_n tal que

$$V_{n-1} = V_n \bigoplus W_n, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Por inducción, se tiene que

$$V_n = V_{n+k} \bigoplus_{i=1}^{k} W_{n+i} = V_{n+k} \bigoplus_{i=1}^{k} W_{n+i}\ ,$$

donde todos los subespacios son ortogonales y

$$\bigoplus_{i=1}^{n} W_i = W_1 \bigoplus W_2 \bigoplus \cdots \bigoplus W_n.$$

Debido a que $V_{n-1} = V_n \bigoplus W_n$, las condiciones *ii*) y *iii*) de la Definición 2.1, se tiene que

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j.$$

La familia de $\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ presenta propiedades análogas como los V_n 's. De este modo, debido a que $W_{n+1} \subset W_n$; $V_{n+1} = \{f(2^{-1}x) : f(x) \in V_n\}$ y $V_{n-1} = V_n \bigoplus W_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$f(x) \in W_{n+1} \Leftrightarrow f\left(2^{n+1}x\right) \in V_{-1} - V_0 = W_0$$

ó

$$f(x) \in W_0 \Leftrightarrow f\left(2^{-n}x\right) \in W_n.$$

Lema 2.1. *Sea* $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. *Entonces*

$$\{\phi(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ es una b.o.n para } L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\phi}(\omega+n)\right|^2 = 1, \text{ en } c.t.p$$

Prueba. Sea $\phi_{0,n}(x) = \phi(x-n)$, entonces $\widehat{\phi}_{0,n}(\omega) \doteq e^{2\pi i\omega n}\widehat{\phi}(\omega)$. Consideremos $n = m - \ell$, entonces tomando $\ell = 0$,

$$\begin{aligned}
\delta_{0,n} &= \left\langle \widehat{\phi}_{0,0}, \widehat{\phi}_{0,n} \right\rangle = \left\langle \widehat{\phi}, \widehat{\phi}_{0,n} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\omega)\, \overline{\widehat{\phi}}_{0,n}(\omega)\, d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\omega)\, e^{-2\pi i\omega n}\overline{\widehat{\phi}}(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega n} \left|\widehat{\phi}(\omega)\right|^2 d\omega \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{k}^{k+1} e^{-2\pi i\omega n} \left|\widehat{\phi}(\omega)\right|^2 d\omega = \int_{0}^{1} e^{-2\pi i\omega n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\phi}(\omega+k)\right|^2 d\omega,
\end{aligned}$$

esto es,

$$\delta_{0,n} = \langle \phi_{0,0}, \phi_{0,n} \rangle \Leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\omega + k) \right|^2 = 1, \text{ en c.t.p.}$$

Objetivo: Construir una base ortonormal de ondículas para $L^2(\mathbb{R})$. Esto es, existe $\Psi \in W_0$ tal que

$$\left\{ \Psi_{m,n} = 2^{-\frac{m}{2}} \Psi\left(2^{-m}x - n\right) \right\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$$

es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$. Para ello es suficiente mostrar que $\{\Psi_{0,n}\}$ es una base ortonormal para W_0. ■

Lema 2.2. *La función escala ϕ de un AMR satisface:*

i) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\omega + k) \right|^2 = 1$, *en c.t.p.*

ii) $\widehat{\phi}(\omega) = M\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$, donde $M(\omega)$ es una función periódica con periodo 1, $M \in L^2([0,1])$. Además:

$$|M(\omega)|^2 + \left| M\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1, \text{ en c.t.p.}$$

Prueba.

i) Inmediato. Debido a la condición *v)* de la Definición del AMR y el Lema 2.2.

ii) Veamos, como $\phi \in V_0 \subset V_{-1}$ y $\left\{ \phi_{-1,n}(x) = 2^{1/2}\phi(2x - n) \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una *b.o.n.*

para V_{-1}, entonces

$$\phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{1/2} \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle \phi(2x - n)$$

donde

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 < \infty, \quad \alpha_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle$$

Tomando transformada de Fourier, tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(\omega) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-1/2} \alpha_n e^{2\pi i\omega n} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = M\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \\
M(\omega) &= 2^{-1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{2\pi i\omega n}
\end{aligned}$$

Afirmación: $M(\omega + 1) = M(\omega)$; $M(\omega) \in L^2([0,1])$.
En efecto,

$$\begin{aligned}
M(\omega + 1) &= \sum_n 2^{-1/2} \alpha_n e^{2\pi i(\omega+1)n} = \sum_n 2^{-1/2} \alpha_n e^{2\pi i\omega n} e^{2\pi i n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-1/2} \alpha_n e^{2\pi i\omega n} = M(\omega).
\end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}\langle M(\omega), M(\omega)\rangle &= \left\langle \sum_n 2^{-1/2}\alpha_n e^{2\pi i\omega n}, \sum_k 2^{-1/2}\alpha_k e^{2\pi i\omega k}\right\rangle \\ &= \sum_n\sum_m 2^{-1}\alpha_n\overline{\alpha}_k \left\langle e^{2\pi i\omega n}, e^{2\pi i\omega k}\right\rangle \\ &= 2^{-1}\sum_n \alpha_n\overline{\alpha}_n = 2^{-1}\sum_n |\alpha_n|^2 < \infty\end{aligned}$$

Por tanto $M(\omega) \in L^2([0,1])$.

Finalmente,

$$\begin{aligned}1 &= \sum_k \left|\widehat{\phi}(\omega+k)\right|^2 = \sum_k \left|M\left(\frac{\omega+k}{2}\right)\right|^2 \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega+k}{2}\right)\right|^2 \\ 1 &= \sum_{k=2m}\left|M\left(\frac{\omega}{2}+m\right)\right|^2\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+m\right)\right|^2 \\ &+ \sum_{k=2m+1}\left|M\left(\frac{\omega}{2}+m+\frac{1}{2}\right)\right|^2\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+m+\frac{1}{2}\right)\right|^2,\end{aligned}$$

pero, debido a que $M(\omega)$ es una función periódica, tenemos que

$$M\left(\frac{\omega}{2}+m\right) = M\left(\frac{\omega}{2}\right), M\left(\frac{\omega}{2}+m+\frac{1}{2}\right) = M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right),$$

entonces

$$\begin{aligned}1 &= \left|M\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2\sum_{k=2m}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+m\right)\right|^2 + \sum_{k=2m+1}\left|M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}+m\right)\right|^2\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}+m\right)\right|^2 \\ 1 &= \left|M\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2\sum_{k=2m}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+m\right)\right|^2 + \left|M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)\right|^2\sum_{k=2m+1}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}+m\right)\right|^2\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left|M\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 + \left|M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1, \text{ en c.t.p.},$$

debido a que

$$\sum_{k=2m}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+m\right)\right|^2 = 1, \sum_{k=2m+1}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}+m\right)\right|^2 = 1.$$

■

Lema 2.3. *Sea $f \in W_0$ entonces $\widehat{f}(\omega) = \lambda_f(\omega)\widehat{\Psi}(\omega)$,* donde λ_f *es una funció n periódica con periodo* 1 y Ψ es independiente de $\widehat{f}$. *Además, $\lambda_f \in L^2([0,1])$ y*

$$\|f\|_{L^2} = \|\lambda_f\|_{L^2(I)}, \text{ donde } I = [0,1].$$

Prueba. Sea $f \in W_0 = V_{-1} - V_0$. Por consiguiente, $f \in V_{-1}$ y $f \perp V_0$, entonces

$$f(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\phi(2x-n)$$

donde $f_n = \langle f, \phi_{-1,n} \rangle$ y $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2 < \infty$.

Asimismo, repitiendo los argumentos usados para obtener el lema 2.3 *ii*), se tiene

$$\widehat{f}(\omega) = M_f\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \tag{2.4.1}$$

donde $M_f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n f_n e^{2\pi i\omega n}$ y M_f es una función periódica de periódo 1,

$M_f \in L^2([0,1])$. Como $f \perp V_0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f, \phi_{0,n} \rangle = \left\langle \widehat{f}, \widehat{\phi}_{0,n} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\,\overline{\widehat{\phi}}_{0,n}(\omega)\,d\omega = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\,\overline{e^{2\pi i\omega n}\widehat{\phi}(\omega)}d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\,\overline{\widehat{\phi}}(\omega)\,e^{-2\pi i\omega n}d\omega = \int_0^1 e^{-2\pi i\omega n}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(\omega+k)\,\overline{\widehat{\phi}}(\omega+k)\right)d\omega, \end{aligned}$$

esto es,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(\omega+k)\,\overline{\widehat{\phi}}(\omega+k) = 0, \text{ en c.t.p.} \tag{2.4.2}$$

donde las series convergen absolutamente y en $L^1([0,1])$ debido a que $\widehat{f}, \widehat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$.

Usando $\widehat{\phi}(\omega) = M\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ y (2.4.1) en (2.4.2), obtenemos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} M_f\left(\frac{\omega+k}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega+k}{2}\right)\left[\overline{M\left(\frac{\omega+k}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega+k}{2}\right)}\right] = 0, \text{ en c.t.p.,}$$

descomponiendo la serie en $k = 2n$ y $k = 2n+1$, y usando

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\phi}(\omega+k)\right|^2 = 1, \text{ en c.t.p.,}$$

obtenemos

$$M_f(\omega)\,\overline{M(\omega)} + M_f\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\overline{M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)} = 0, \text{ en c.t.p.} \tag{2.4.3}$$

Asimismo como

$$|M(\omega)|^2 + \left|M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1, \text{ en c.t.p.,}$$

esto significa que $M(\omega)$ y $M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)$ no pueden anularse simultanéamente sobre un conjunto de medida positiva, entonces podemos decir

$$M_f(\omega) = \frac{-M_f\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}{\overline{M(\omega)}}.\overline{M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow M_f(\omega) = K_f(\omega)\cdot\overline{M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}, \text{ en c.t.p.,}$$

donde $K_f(\omega) = \dfrac{-M_f\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}{\overline{M(\omega)}}$, entonces

$$\begin{aligned}
K_f(\omega)+K_f\left(\omega+\frac{1}{2}\right) &= \frac{-M_f\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}{\overline{M(\omega)}}+\frac{-M_f(\omega+1)}{\overline{M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}} \\
&= -\left(\frac{M_f\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\overline{M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}+M_f(\omega+1)\overline{M(\omega)}}{\overline{M(\omega)}\,\overline{M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}}\right) \\
&= 0, \text{ en c.t.p.}
\end{aligned}$$

(debido a que

$$M_f(\omega)\overline{M(\omega)}+M_f\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\overline{M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}=0, \text{ en c.t.p.})$$

Por lo tanto, podemos asumir que $K_f(\omega)=e^{2\pi i\omega}\lambda_f(2\omega)$, donde $\lambda_f(2\omega)$ es pe-riódica de periodo 1, esto es, $\lambda_f(2\omega+1)=\lambda_f(2\omega)$. De este modo,

$$M_f(\omega)=K_f(\omega)\overline{M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}=e^{2\pi i\omega}\lambda_f(2\omega)\overline{M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)} \tag{2.4.4}$$

Pero, por (2.4.1) tenemos

$$\widehat{f}(\omega)=e^{\pi i\omega}\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\lambda_f(\omega)$$

Por consiguiente

$$\widehat{f}(\omega)=\widehat{\Psi}(\omega)\lambda_f(\omega) \tag{2.4.5}$$

donde

$$\widehat{\Psi}(\omega)=e^{\pi i\omega}M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{2.4.6}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|M_f\|^2_{L^2(I)} &= \int_0^1|M_f(\omega)|^2\,d\omega=\int_0^1\left|e^{2\pi i\omega}\right|^2|\lambda_f(2\omega)|^2\left|\overline{M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}\right|^2 d\omega \\
\|M_f\|^2_{L^2(I)} &= \int_0^1|\lambda_f(2\omega)|^2\left|\overline{M_f\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}\right|^2 d\omega=\int_0^{1/2}|\lambda_f(2\omega)|^2\left|\overline{M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}\right|^2 d\omega \\
&\quad+\int_{1/2}^1|\lambda_f(2\omega)|^2\left|\overline{M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}\right|^2 d\omega,
\end{aligned}$$

pero, debido a que λ_f , $M(\omega)$ son funciones periódicas de periodo 1, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{1/2}^{1} |\lambda_f(2\omega)|^2 \left|\overline{M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}\right|^2 d\omega &= \int_0^{1/2} \left|\lambda_f\left[2\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\right]\right|^2 \left|\overline{M\left(\omega+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}\right|^2 d\omega \\
&= \int_0^{1/2} |\lambda_f(2\omega+1)|^2 |M(\omega+1)|^2 d\omega \\
&= \int_0^{1/2} |\lambda_f(2\omega)|^2 \left|\overline{M(\omega)}\right|^2 d\omega
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\|M_f\|^2_{L^2(I)} = \int_0^{1/2} |\lambda_f(2\omega)|^2 \left[|M(\omega)|^2 + \left|M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\right|^2\right] d\omega$$

Luego, debido a que $|M(\omega)|^2 + \left|M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1$, en c.t.p y haciendo $2\omega = \mu$, obtenemos

$$\|M_f\|^2_{L^2(I)} = \frac{1}{2}\int_0^1 |\lambda_f(2\mu)|^2 d\mu,$$

es decir,

$$\|M_f\|^2_{L^2(I)} = \frac{1}{2}\int_0^1 |\lambda_f(\omega)|^2 d\omega.$$

y debido a que $M_f \in L^2(I)$, se tiene que $\lambda_f \in L^2(I)$.

Asimismo

$$\begin{aligned}
\|M_f\|^2_{L^2(I)} &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_m f_m e^{2\pi i m\omega}, \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n f_n e^{2\pi i n\omega} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_m\sum_n f_m f_n \left\langle e^{2\pi i m\omega}, e^{2\pi i n\omega}\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_n |f_n|^2 = \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2},
\end{aligned}$$

donde $f_n = \langle f, \phi_{-1,n}\rangle$. Por consiguiente

$$|f|_{L^2(I)} = |\lambda_f|_{L^2(I)}$$

■

Teorema 2.1. *Dado un AMR para $L^2(\mathbb{R})$, existe una b.o.n de Ondículas,*

$$\left\{\Psi_{m,n}(x) = 2^{-m/2}\Psi\left(2^{-m}x-n\right)\right\}_{m,n\in\mathbb{Z}} \text{ para } L^2(\mathbb{R}).$$

Prueba. Es suficiente mostrar que existe $\Psi \in W_0$ tal que $\{\Psi(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una b.o.n para W_0. Consideremos Ψ como anteriormente, esto es,

$$\widehat{\Psi}(\omega) = e^{\pi i\omega}\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Sea $f \in W_0$, entonces es conocido que $\widehat{f}(\omega) = \lambda_f(\omega)\widehat{\Psi}(\omega)$, donde λ_f es una función periódica de periodo 1, $\lambda_f \in L^2(I)$, la cual puede escribirse como

$$\lambda_f(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\lambda}_f(n)\, e^{2\pi i n\omega},$$

con $\widehat{\lambda}_f(n) = \langle \lambda_f(\omega), e^{2\pi i n\omega}\rangle$, y $\|\lambda_f\|^2_{L^2(I)} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\lambda}_f(n)\right|^2 < \infty$.

Reemplazando $\lambda_f(\omega)$ en $\widehat{f}(\omega)$, se tiene

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\lambda}_f(n)\, e^{2\pi i n\omega}\widehat{\Psi}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\lambda}_f(n)\, [\Psi(x-n)]^{\widehat{}}(\omega),$$

donde $[\Psi(x-n)]^{\widehat{}}(\omega) = e^{2\pi i n\omega}\widehat{\Psi}(\omega)$ y tomando la anti-transformada de Fourier, obtenemos

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\lambda}_f(n)\, \Psi(x-n) \tag{2.5.1}$$

■

Para ver que $\{\Psi(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un *b.o.n.* para W_0, necesitamos verificar que:

i) $\Psi \in W_0$

ii) $\{\Psi(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal

iii) (2.5.1) converge en $L^2(\mathbb{R})$ y $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\lambda}_f(n)\right|^2$.

A continuación probemos las condiciones *i)*, *ii)* y *iii)*.

Prueba de iii). En efecto, debido a

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\lambda_f\|_{L^2(I)} = \left\|\widehat{\lambda}_f\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\lambda}_f(n)\right|^2 < \infty.$$

Prueba de ii). Como $\{\Psi(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es *b.o.n.*, entonces es equivalente a tener

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\Psi}(\omega+n)\right|^2 = 1, \text{ en c.t.p.}$$

En efecto, debido a que $M(\omega)$ es periódica de periodo 1 y $\sum\limits_k \left|\widehat{\phi}(\omega+k)\right|^2 = 1$, en c.t.p., se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_n \left|\widehat{\Psi}(\omega+n)\right|^2 &= \sum_n \left|e^{\pi i\omega}\right|^2 \left|M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\right|^2 \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{n}{2}\right)\right|^2 \\
\sum_n \left|\widehat{\Psi}(\omega+n)\right|^2 &= \sum_{n=2k} \left|M\left(\frac{\omega}{2}+k+\frac{1}{2}\right)\right|^2 \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+k\right)\right|^2 \\
&\quad + \sum_{n=2k+1} \left|M\left(\frac{\omega}{2}+k+1\right)\right|^2 \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+k+\frac{1}{2}\right)\right|^2 \\
&= \left|M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)\right|^2 \sum_k \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+k\right)\right|^2 \\
&\quad + \left|M\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 \sum_k \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+k+\frac{1}{2}\right)\right|^2 \\
&= \left|M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)\right|^2 + \left|M\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 = 1, \text{ en c.t.p.,}
\end{aligned}$$

Asimismo,

$$\langle \Psi_{0,0}\Psi_{0,n}\rangle = \langle \Psi, \Psi_{0,n}\rangle = \int_0^1 e^{-2\pi i\omega n} d\omega = \delta_{0,n}$$

En efecto, debido a que $[g(x-n)]^{\widehat{}}(\omega) = e^{2\pi i\omega n}\widehat{g}(\omega)$, se tiene

$$\begin{aligned}\langle \Psi, \Psi_{0,n}\rangle &= \left\langle \widehat{\Psi}, \widehat{\Psi}_{0,n}\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Psi}(\omega)\,\overline{[\Psi(x-n)]^{\widehat{}}(\omega)}\, d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Psi}(\omega)\, e^{-2\pi i\omega n}\overline{\widehat{\Psi}}(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\Psi}(\omega)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega.\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left|\widehat{\Psi}(\omega)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega &= \int_{1-1}^{2-1} \left|\widehat{\Psi}(\omega+1)\right|^2 e^{-2\pi i(\omega+1)n} d\omega = \int_0^1 \left|\widehat{\Psi}(\omega+1)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega \\
\int_2^3 \left|\widehat{\Psi}(\omega)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega &= \int_{2-2}^{3-2} \left|\widehat{\Psi}(\omega+2)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega = \int_0^1 \left|\widehat{\Psi}(\omega+2)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega \\
&\ \ \vdots \\
\int_{-1}^0 \left|\widehat{\Psi}(\omega)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega &= \int_{-1+1}^{0+1} \left|\widehat{\Psi}(\omega-1)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega = \int_0^1 \left|\widehat{\Psi}(\omega-1)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega \\
\int_{-2}^{-1} \left|\widehat{\Psi}(\omega)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega &= \int_{-2+2}^{-1+1} \left|\widehat{\Psi}(\omega-2)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega = \int_0^1 \left|\widehat{\Psi}(\omega-2)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\Psi}(\omega)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega = \cdots + \int_{-2}^{-1} \left|\widehat{\Psi}(\omega)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega + \int_{-1}^{0} \left|\widehat{\Psi}(\omega)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega$$

$$+ \int_0^1 \left|\widehat{\Psi}(\omega)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega + \int_1^2 \left|\widehat{\Psi}(\omega)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega + \int_2^3 \left|\widehat{\Psi}(\omega)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega + \cdots,$$

es decir

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\Psi}(\omega)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega &= \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\Psi}(\omega+k)\right|^2 e^{-2\pi i\omega n} d\omega \\ &= \int_0^1 e^{-2\pi i\omega n} d\omega = \delta_{0,n}\end{aligned}$$

(debido a que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\Psi}(\omega+k)\right|^2 = 1$ en c.t.p.)

Prueba de i). Basta probar lo siguiente:

a) $\Psi \in V_{-1}$

b) $\Psi \perp V_0$

a) En efecto, como $\widehat{\Psi}(\omega) = e^{\pi i\omega}\overline{M\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right)}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ entonces $\widehat{\Psi}$ podemos escribirla en la forma

$$\widehat{\Psi}(\omega) = G(\omega)\,\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

donde $G(\omega) = e^{\pi i\omega}\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)}$ es una función periódica en $L^2([0,2])$con periódo 2 $(G(\omega+2) = G(\omega))$.

Por consiguiente podemos escribir

$$G(\omega) = 2^{-\frac{1}{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widetilde{g}_n e^{\pi i n\omega}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

con $\|G\|_{L^2} = \sum_n |\widetilde{g}_n|^2 < \infty$, reemplazando $G(\omega)$ en $\widehat{\Psi}(\omega)$ obtenemos

$$\widehat{\Psi}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-\frac{1}{2}}\widetilde{g}_n e^{\pi i n\omega}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

y tomando anti-tranformada de Fourier, se obtiene

$$\left[\widehat{\Psi}(\omega)\right]^{\vee}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widetilde{g}_n\left(2^{-\frac{1}{2}}e^{\pi i n\omega}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^{\vee} = 2^{\frac{1}{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widetilde{g}_n\phi(2x-n).$$

Luego

$$\Psi(x) = 2^{\frac{1}{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widetilde{g}_n\phi(2x-n),\ \{\phi(2x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ es } b.o.n. \text{ para } V_{-1}.$$

Por lo tanto $\Psi \in V_{-1}$.

b) Es suficiente probar que $\langle\Psi, \phi_{0,n}\rangle = 0\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$, donde $\phi_{0,n}(x) = \phi(x-n)$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle\Psi, \phi_{0,n}\rangle &= \left\langle\widehat{\Psi}, \widehat{\phi}_{0,n}\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\Psi}(\omega)\,\overline{\widehat{\phi}}_{0,n}(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\Psi}(\omega)\,\overline{e^{2\pi i n\omega}\widehat{\phi}(\omega)}d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\Psi}(\omega)\,e^{-2\pi i n\omega}\overline{\widehat{\phi}}(\omega)\,d\omega \\
&= \int_0^1 e^{-2\pi i n\omega}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\Psi}(\omega+k)\,\overline{\widehat{\phi}(\omega+k)}\right)d\omega
\end{aligned}$$

Pero,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\Psi}(\omega+k)\,\overline{\widehat{\phi}(\omega+k)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(\omega+k)}\overline{M\left(\frac{\omega+k}{2}+\frac{1}{2}\right)}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega+k}{2}\right)\overline{M\left(\frac{\omega+k}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega+k}{2}\right)}$$

(Debido a que $\widehat{\Psi}(\omega) = e^{\pi i\omega}\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ y $\widehat{\phi}(\omega) = M\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$.)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{\pi i\omega}\cdot e^{\pi ik}\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)}\,\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k}{2}\right)}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k}{2}\right)\right|^2\\
&= \sum_{k=2m} e^{\pi i\omega}\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+m+\frac{1}{2}\right)}\,\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+m\right)}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+m\right)\right|^2\\
&\quad - \sum_{k=2m+1} e^{\pi i\omega}\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+m+1\right)}\,\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+m+\frac{1}{2}\right)}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+m+\frac{1}{2}\right)\right|^2\\
&= e^{\pi i\omega}\overline{M\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)}\left(\sum_m\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+m\right)\right|^2-\sum_m\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+m+\frac{1}{2}\right)\right|^2\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

(Hemos usado que $\sum_k\left|\widehat{\phi}(\omega+k)\right|^2=1$, en c.t.p. y que $M(\omega)$ es una función periódica de periodo 1.)

Asi, hemos probado que

Corolario 3.

$$\langle\Psi,\phi_{0,n}\rangle=0,\forall n.$$

La ondícula madre Ψ puede ser explicitada vía

$$\Psi(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{1-n}\alpha_{1-n}\phi_{-1,n}(x),$$

donde los coeficientes α_n estan dados por

$$\phi(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n\phi_{-1,n}(x),$$

con $\alpha_n=\langle\phi,\phi_{-1,n}\rangle$ y $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\alpha_n|^2<\infty$.

Prueba. En efecto, como

$$M(\omega)=2^{-1/2}\sum_n\alpha_n e^{2\pi in\omega}\text{ y }\widehat{\Psi}(\omega)=e^{\pi i\omega}\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{\Psi}(\omega) &= e^{\pi i\omega}\left(\overline{2^{-1/2}\sum_n\alpha_n e^{2\pi in\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)}}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\\
&= e^{\pi i\omega}\left(2^{-1/2}\sum_n\alpha_n e^{-\pi i\omega n}e^{-\pi in}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\\
&= 2^{-1/2}\sum_n\alpha_n e^{\pi i\omega(1-n)}\cdot(-1)^n\,\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\\
&= 2^{-1/2}\left(\sum_m\alpha_{m-1}\cdot e^{\pi i\omega m}(-1)^{1-m}\,\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\\
\widehat{\Psi}(\omega) &= \sum_m\alpha_{1-m}\cdot e^{\pi i\omega m}(-1)^{1-m}\,2^{-1/2}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right),
\end{aligned}$$

tomando anti-transformada de Fourier, se obtiene

$$\left[\widehat{\Psi}(\omega)\right]^{\vee}(x)=\sum_m \alpha_{1-m}(-1)^{1-m}2^{1/2}\phi(2x-m),$$

esto es,

$$\Psi(x)=2^{1/2}\sum_m(-1)^{1-m}\alpha_{1-m}\phi_{-1,m}.$$

■

4. Conclusiones

3.1 La "ondícula madre" Ψ asociada con un AMR dado no es única por ejemplo, podemos tomar

$$K_f(\omega)=e^{2\pi i\omega}e^{2\pi ip(\omega)}\lambda_f(2\omega),$$

donde $p(\omega)$ es una función real-valorada con $p\left(\omega+\frac{1}{2}\right)=p(\omega)$. Entonces

$$\begin{aligned}
M_f(\omega) &= K_f(\omega)\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)}=e^{2\pi i\omega}e^{2\pi ip(\omega)}\lambda_f(2\omega)\overline{M\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}\\
\widehat{f}(\omega) &= M_f\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)=e^{2\pi i\frac{\omega}{2}}e^{2\pi ip\left(\frac{\omega}{2}\right)}\lambda_f\left(2\cdot\frac{\omega}{2}\right)\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\\
\widehat{f}(\omega) &= \left(e^{\pi i\omega}\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)e^{2\pi ip\left(\frac{\omega}{2}\right)}\lambda_f(\omega)\\
\widehat{f}(\omega) &= e^{2\pi ip\left(\frac{\omega}{2}\right)}\widehat{\Psi}(\omega)\lambda_f(\omega),
\end{aligned}$$

donde

$$\widehat{\Psi}(\omega)=e^{\pi i\omega}\overline{M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

por lo tanto, esto nos da una nueva ondícula madre $\widetilde{\Psi}$ que satisface

$$\widehat{\widetilde{\Psi}}(\omega)=e^{2\pi ip\left(\frac{\omega}{2}\right)}\widehat{\Psi}(\omega).$$

3.2 En particular si $p(\omega)=\frac{p}{2}$, donde p es un entero impar, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\widehat{\widetilde{\Psi}}(\omega) &= e^{2\pi ip\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sum_n\alpha_{1-n}(-1)^{1-n}2^{-1/2}e^{\pi i\omega n}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\\
\widehat{\widetilde{\Psi}}(\omega) &= e^{\pi ip}\sum_n\alpha_{1-n}(-1)\cdot(-1)^{-n}\cdot 2^{-1/2}e^{\pi i\omega n}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\\
\widehat{\widetilde{\Psi}}(\omega) &= \sum_n\alpha_{1-n}(-1)^{n}\cdot 2^{-1/2}e^{\pi i\omega n}\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right),
\end{aligned}$$

tomando la anti-transformada de Fourier, se obtiene

$$\begin{aligned}\left[\widehat{\widetilde{\Psi}}(\omega)\right]^{\vee}(x) &= \sum_{n}\alpha_{1-n}(-1)^{n}\phi_{-1,n}(x)\\ \widetilde{\Psi}(x) &= \sum_{n}\alpha_{1-n}(-1)^{n}\phi_{-1,n}(x).\end{aligned}$$

3.3 El recíproco del Teorema 2.5 no es verdadero, en el sentido que $\exists$ una *b.o.n.* de ondículas para $L^2(\mathbb{R})$ que no es generado a partir de algún AMR (debido a J.L Journe)

3.4 El corolario 2.6 nos da una fórmula para la reconstrucción de la "ondícula madre" Ψ; por consiguiente, construimos una *b.o.n.* de "ondículas" para $L^2(\mathbb{R})$. Complementando el procedimiento desarrollado en el corolario 2.6 resulta más facil si la series

$$\phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n\sqrt{2}\phi(2x-n) \text{ con } \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\alpha_n|^{20} < \infty \text{ y } \alpha_n = \langle\phi,\phi_{-1,n}\rangle,$$

tienen un número finito de términos no ceros.

El asumir que $\{\phi_{0,n}(x) = \phi(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una *b.o.n.* para V_0. Juega un rol vital en la construcción de una *b.o.n.* de "ondículas" para $L^2(\mathbb{R})$ en el Teorema 2.5. Si deseamos que $\{\phi_{0,n}(x) = \phi(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea sólo una base de Riesz para V_0 y no necesariamente una *b.o.n.*, podriamos construir una *b.o.n.* de "ondículas" para $L^2(\mathbb{R})$.

Definición 4.1. *$\{\phi_{0,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz para V_0 si y solo si*

i) $V_0 = \langle\{\phi_{0,n}\}\rangle$.

ii) $\forall\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $A\sum_{n}|c_n|^2 \leq \left\|\sum_{n}c_n\phi(\cdot-n)\right\|^2 \leq B\sum_{n}|c_n|^2$.

donde $A>0$, $0<B<\infty$ son independientes de los $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Sea $f\in V_0$ entonces $f(x) = \sum_{n}c_n\phi(x-n) \Rightarrow \widehat{f}(\omega) = \sum_{n}c_n e^{2\pi i\omega n}\widehat{\phi}(\omega)$.

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2}^2 &= \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(\omega)\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{n}c_n e^{2\pi i\omega n}\widehat{\phi}(\omega)\right|^2 d\omega\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\sum_{n}c_n e^{2\pi i\omega n}\right)\widehat{\phi}(\omega)\right|^2 d\omega\\ &= \cdots+\int_{-2}^{-1}+\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}+\int_{1}^{2}+\cdots\end{aligned}$$

pero,

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{-1}\left|\left(\sum_n c_n e^{2\pi i\omega n}\right)\widehat{\phi}(\omega)\right|^2 d\omega &= \int_{-2+2}^{-1+2}\left|\left(\sum_n c_n e^{2\pi i(\omega-2)n}\right)\widehat{\phi}(\omega-2)\right|^2 d\omega\\
&= \int_0^1\left|\left(\sum_n c_n e^{2\pi i\omega n}\right)\widehat{\phi}(\omega-2)\right|^2 d\omega\\
\int_{-1}^{0}\left|\left(\sum_n c_n e^{2\pi i\omega n}\right)\widehat{\phi}(\omega)\right|^2 d\omega &= \int_{-1+1}^{0+1}\left|\left(\sum_n c_n e^{2\pi i(\omega-1)n}\right)\widehat{\phi}(\omega-1)\right|^2 d\omega\\
&= \int_0^1\left|\left(\sum_n c_n e^{2\pi i\omega n}\right)\widehat{\phi}(\omega-1)\right|^2 d\omega\\
\int_{1}^{2}\left|\left(\sum_n c_n e^{2\pi i\omega n}\right)\widehat{\phi}(\omega)\right|^2 d\omega &= \int_{1-1}^{2-1}\left|\left(\sum_n c_n e^{2\pi i(\omega+1)n}\right)\widehat{\phi}(\omega+1)\right|^2 d\omega\\
&= \int_0^1\left|\left(\sum_n c_n e^{2\pi i\omega n}\right)\widehat{\phi}(\omega+1)\right|^2 d\omega,
\end{aligned}
$$

asi sucesivamente, esto es,

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^2}^2 &= \cdots+\int_0^1\left|\sum_n c_n e^{2\pi i\omega n}\right|^2\left|\widehat{\phi}(\omega-2)\right|^2 d\omega+\int_0^1\left|\sum_n c_n e^{2\pi i\omega n}\right|^2\left|\widehat{\phi}(\omega-1)\right| d\omega\\
&\quad+\int_0^1\left|\sum_n c_n e^{2\pi i\omega n}\right|^2\left|\widehat{\phi}(\omega)\right|^2 d\omega+\int_0^1\left|\sum_n c_n e^{2\pi i\omega n}\right|^2\left|\widehat{\phi}(\omega+1)\right|^2 d\omega+\cdots\\
\|f\|_{L^2}^2 &= \int_0^1\left|\left(\sum_n c_n e^{2\pi i\omega n}\right)\right|^2\left(\cdots+\left|\widehat{\phi}(\omega-2)\right|^2+\left|\widehat{\phi}(\omega-1)\right|^2+\left|\widehat{\phi}(\omega)\right|^2\right.\\
&\quad\left.+\left|\widehat{\phi}(\omega+1)\right|^2+\cdots\right)d\omega\\
\|f\|_{L^2}^2 &= \int_0^1\left|\left(\sum_n c_n e^{2\pi i\omega n}\right)\right|^2\left(\sum_m\left|\widehat{\phi}(\omega+m)\right|^2\right)d\omega,
\end{aligned}
$$

donde

$$
\Phi(\omega)=\sum_m\left|\widehat{\phi}(\omega+m)\right|^2.
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\left|\left(\sum_n c_n e^{2\pi i\omega n}\right)\right|^2 d\omega &= \left\langle\sum_n c_n e^{2\pi i\omega n},\sum_k c_k e^{2\pi i\omega k}\right\rangle_{L^2([0,1])}\\
&= \sum_n\sum_k c_n\overline{c_k}\left\langle e^{2\pi i\omega n},e^{2\pi i\omega k}\right\rangle_{L^2([0,1])}\\
&= \sum_n |c_n|^2,
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
A\sum_n |c_n|^2 &\le \left\|\sum_n c_n\phi(\cdot - n)\right\|^2 \le B\sum_n |c_n|^2 \Leftrightarrow \\
A\sum_n |c_n|^2 &\le \|f\|_{L^2}^2 = (\int_0^1 \left|\sum_n c_n e^{2\pi i\omega n}\right|^2 d\omega)(\sum_m \left|\widehat{\phi}(\omega+m)\right|^2) \\
&\le B\sum_n |c_n|^2 \\
&\Leftrightarrow\ 0 < A \le \Phi(\omega) = \sum_m \left|\widehat{\phi}(\omega+m)\right|^2 \le B < \infty, \text{ en c.t.p.}
\end{aligned}
$$

Definamos

$$\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega) = \frac{\widehat{\phi}(\omega)}{\sqrt{\Phi(\omega)}}$$

Afirmación: $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega+k)\right|^2 = 1$

En efecto, como $\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega) = \dfrac{\widehat{\phi}(\omega)}{\sqrt{\Phi(\omega)}}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left|\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega)\right|^2 &= \frac{\left|\widehat{\phi}(\omega)\right|^2}{\Phi(\omega)} \\
\sum_k \left|\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega+k)\right|^2 &= \frac{\sum_k \left|\widehat{\phi}(\omega+k)\right|^2}{\Phi(\omega)} = 1.
\end{aligned}
$$

Luego, de acuerdo al Lema 2.2, $\sum_k \left|\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega+k)\right|^2 = 1$, entonces $\left\{\widetilde{\phi}(x-n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal. Sea

$$\widetilde{V}_0 = \left\langle\left\{\widetilde{\phi}(x-n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}\right\rangle.$$

Por lo tanto, para todo $f \in \widetilde{V}_0$,

$$f(x) = \sum_n \widetilde{f}_n\widetilde{\phi}(x-n)\,,\ \text{con } \widetilde{f}_n = \left\langle f, \widetilde{\phi}_{0,n}\right\rangle \text{ y} \sum_n \left|\widetilde{f}_n\right|^2 < \infty,$$

esto es, $\widehat{f}(\omega) = \widetilde{v}(\omega)\,\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega)$, tal que $\widetilde{v}(\omega)$ es una función periódica con período 1 y $\widetilde{v} \in L^2([0,1])$. Asimismo como

$$\Phi(\omega) = \sum_m \left|\widehat{\phi}(\omega+m)\right|^2$$

es una función periódica con periodo 1, entonces

$$\widehat{f}(\omega) = \widetilde{v}(\omega)\,\frac{\widehat{\phi}(\omega)}{\sqrt{\Phi(\omega)}},$$

es decir,

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\widetilde{v}(\omega)}{\sqrt{\Phi(\omega)}} \cdot \widehat{\phi}(\omega) = v(\omega)\,\widehat{\phi}(\omega)$$

para alguna función periódica $v(\omega)$ con periodo 1 y $v \in L^2([0,1])$.
De este modo esto es equivalente a

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \phi(x-n),$$

con $f_n = \langle f, \phi_{0,n}\rangle$ y $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2 < \infty$; de este modo $f \in V_0 = \langle \{\phi(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \rangle$.
Desde que el argumento empleado nos permite regresar, se tiene que $\widetilde{V}_0 = V_0$ y por lo tanto $\widetilde{V}_j = V_j \; \forall\, j = 0, \pm 1, \pm 2 \pm \cdots$
La ondícula madre $\widetilde{\Psi}$ asociada con la función escala $\widetilde{\phi}$ viene dada, vía:

$$\widehat{\widetilde{\Psi}} = e^{\pi i\omega}\, \overline{\widetilde{M}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right)}\, \widehat{\widetilde{\phi}}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

donde $\widetilde{M}$ esta relacionada con $\widetilde{\phi}$ en la misma forma como M esta relacionada con ϕ.
Además, desde que

$$\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega) = \widetilde{M}\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\widetilde{\phi}}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{y} \quad \widehat{\phi}(\omega) = M\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega) &= \frac{\widehat{\phi}(\omega)}{\sqrt{\Phi(\omega)}} \Leftrightarrow \widetilde{M}\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\widetilde{\phi}}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{M\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\Phi(\omega)}} \\
&\Leftrightarrow \widetilde{M}\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)}} = \frac{M\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\Phi(\omega)}} \\
&\Leftrightarrow \widetilde{M}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\Phi(\omega)}} \cdot M\left(\frac{\omega}{2}\right);
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\widehat{\widetilde{\Psi}}(\omega) &= e^{\pi i\omega}\sqrt{\frac{\Phi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Phi(\omega+1)}} \cdot M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right) \cdot \widehat{\widetilde{\phi}}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
\widehat{\widetilde{\Psi}}(\omega) &= e^{\pi i\omega}\sqrt{\frac{\Phi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Phi(\omega+1)}} \cdot M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)}} \\
\widehat{\widetilde{\Psi}}(\omega) &= e^{\pi i\omega}\sqrt{\frac{\Phi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Phi(\omega+1)\,\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)}} \cdot M\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\right) \cdot \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] I. DAUBECHIES , *Orthonormal bases of compactly Supported Wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), 909-996.

[2] I. DAUBECHIES , *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM publ. Philadelphia (1992)

[3] S.G. MALLAT, ., *Multiresolution approximations and Wavelet ortonormal bases of* $L^2(\mathbb{R})$, Trans. Amer. Math. Soc. 315 (1989), 69-87.

[4] C. CHUI, *An Introduction to Wavelets*, Academic, Press, New York (1992).