PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. VIII N° 1, pp. 19 - 34, LIMA - PERÚ. Julio 2005

DIFUSIÓN DE UN CONTAMINANTE CON CONDICIONES DE FRONTERA NO HOMOGÉNEAS

Yolanda Santiago Ayala[1], Luis Enrique Carrillo Díaz[1] & Santiago Rojas Romero[1]

RESUMEN.- *El objetivo de este artículo es probar la existencia de solución de un modelo matemático de difusión de un contaminante usando la Teoría de Semigrupos no lineales, vía operadores afines. Se estudia también un modelo realístico, por defecto de saturación.*

PALABRAS CLAVE.- *Semigrupos no lineal, difusión de un contaminante, existencia de solución.*

DIFFUSION OF A CONTAMINANT WITH INHOMOGENEOUS BOUNDARY CONDITIONS

ABSTRACT.- *We prove the existence of solution for a mathematic model of diffusion of a contaminant using the Nonlinear Semigroups Theory, by means of afin operators. We also study a realistic model by means of saturation effects.*

KEYWORDS.- *Existence of solution, diffusion of a contaminant, nonlinear semigroups.*

1. Introducción

Estudiamos la existencia de solución del siguiente modelo matemático de contaminación

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) - \sigma u(x,t)\,,\;\; (x,t) \in (-b,b) \times \mathbb{R}^+, \tag{1.1}$$

con condiciones de frontera

$$ku_x(-b,t) = -v_1 \quad,\;\; t > 0, \tag{1.2}$$

$$ku_x(b,t) = -v_2 \quad,\;\; t > 0 \tag{1.3}$$

y condición inicial

$$u(x,0) = u_0(x)\,,\;\; x \in (-b,b), \tag{1.4}$$

[1] *Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: ysantiagoa@unmsm.edu.pe, srojasr@unmsm.edu.pe, lcarrillod@unmsm.edu.pe, lcarrillo@latinmail.com*

donde $u(x,t)$ es la densidad numérica en x y en el tiempo t de una especie dada de partículas contaminantes que se difunde en un medio homogéneo en la región $R=\{x, -b \leq x \leq b\}$, donde $b>0$ es una constante positiva.

Las constantes k, σ, v_1 y v_2 son positivas, $-\sigma u$ representa el fenómeno captura en el medio huésped y u_0 es la densidad inicial, no negativa.

Abordamos el problema usando la Teoría de Semigrupos no lineales, vía operadores afines.

Es posible, en las mismas ideas, estudiar un modelo realístico, por efectos de saturación:

$$y_t = ky_{xx} - \sigma y, \quad x \in (-b,b)\,, t>0 \tag{1.5}$$

$$v_t =- \sigma_b v + \frac{h}{\delta}\left[y(b,.) - v\right], t>0 \tag{1.6}$$

$$k\left[y_x\right]_{x=-b} = - v_1,\ k\left[y_x\right]_{x=b} =- h\left[y(b,.) - v\right], t>0 \tag{1.7}$$

$$y(0) = y_0\ ,\ x \in (-b,b)\ ,\ \ v(0) = v_0, \tag{1.8}$$

donde $v(t)$ es la densidad numérica de la partícula contaminante en el plano objetivo en el tiempo t. Las constantes σ_b, h y δ son todas positivas. La ecuación (1.6) es una ecuación de balance para la partícula contaminante en el plano objetivo, $-\sigma_b\delta_v$ representa el fenómeno de decaimiento, y $h\left[y(b,t) - v(t)\right]$ proporciona el número de partículas contaminantes que alcanza el plano objetivo por unidad de tiempo. Citamos en este enfoque a Fang W. [3].

Con respecto a la Teoría de Semigrupos lineales y no lineales podemos citar a Kato [4], Barbu [1] y Brezis [2].

2. Notaciones y Preliminares

En esta sección enunciamos algunos resultados que usaremos en lo que sigue del artículo.

Definición 2.1 *Sean X un espacio de Banach y $D_0 \subset X$ un subespacio de X, $D_1 \subseteq X$ será un subconjunto afín asociado con D_0 si satisface:*

a) $\forall f_1, f_2 \in D_1$ *vale* $f_1 - f_2 \in D_0$

b) $\forall f \in D_1,\ g \in D_0$ *vale* $f + g \in D_1$

Definición 2.2 *Sean $L\colon D(L) \subset X \to X$ un operador lineal y $A\colon D(A) \subset X \to X$ un operador (usualmente no lineal), A es un operador afín asociado a L si satisface:*

a) $D(A)$ *es un subconjunto afín asociado a* $D(L)$

b) $\forall f \in D(A)$ *y* $g \in D(L)$ *vale* $A(f+g) = Af + Lg$.

Definición 2.3 *Sea X un $\mathbb{R}$–espacio de Banach. Dado un operador $A\colon D(A) \subset X \to X$ (en general no lineal). El problema de Cauchy Abstracto (P.C.A.) para A sobre $\left[0, t_0\right]$ es*

$$\begin{cases} u_t(t) = A[u(t)], & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases} \tag{2.1}$$

Usamos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^+ &\to D(A) \subset X \\ t &\mapsto u(t) := u(.,t) \end{aligned}$$

y u_t es la derivada fuerte, con $\exists\ u_t(0^+)$, $u_t(t_0^+)$.

Teorema 2.1 *Sean $L \in G(1, 0, X)$ (i.e. L es el generador infinitesimal de un Semigrupo Lineal de clase $C_0 : \{z(t)\}_{t\geq 0}$ tal que $\|z(t)x\| \leq \|x\|, \forall x \in X$ y $t \geq 0$.) y A un operador afin asociado a L, entonces en cualquier intervalo $[0, t_0]$, el P.C.A. (2.1) tiene la única solución fuerte:*

$$u(t) = T(t)u_0 = u_0 + \int_0^t z(s) A u_o ds, \quad u_0 \in D(A)$$

donde $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo generado por A.

Corolario 2.1 *Sea $u : [0, +\infty) \to X$ tal que $u(t) = T(t)u_0 = u_0 + \int_0^t z(s)\, Au_0 ds$ entonces u es la única solución fuerte en cualquier intervalo $[0, t_0]$ del P.C.A. (2.1), siempre que $L \in G(1, \omega, X)$ (i.e. L es el generador infinitesimal de un Semigrupo Lineal de clase $C_0 : \{z(t)\}_{t\geq 0}$ tal que $\|z(t)x\| \leq e^{\omega t}\|x\|$, $\forall x \in X$ y $t \geq 0$.) y A sea un operador afin asociado a L.*

Teorema 2.2 (Inverso) *Sea $T : D(T) \subset X \to Y$ un operador lineal, cerrado, tal que $\exists\, T^{-1}$. Entonces T^{-1} es cerrado (obviamente lineal).*

Teorema 2.3 *Sean $T_i : D(T_i) \subset X \to Y$, $i = 1, 2$, operadores lineales con T_1 cerrado y T_2 acotado con $D(T_2) = X$. Entonces $T_1 + T_2 : D(T_1) \subset X \to Y$ es cerrado.*

3. Principales resultados

Denotemos por X al espacio $L^1(-b, b)$, y

$$\begin{aligned} L : D(L) \subset X &\to X \\ f &\mapsto Lf = kf'' - \sigma f \quad c.t.p.\ \ x \in (-b, b) \end{aligned}$$

donde el conjunto

$$D(L) = \{f \in X, \text{ tal que}, f, f' \text{ son absolutamente continuas(a.c.) en } [-b, b], \\ f'(-b) = f'(b) = 0\}$$

donde el conjunto

$$D(A) = \{f \in X, f, f' \text{ son a.c. en } [-b, b], kf'(-b) = v_1, kf'(b) = -v_2\}$$

no es subespacio de X y A es un operador afin asociado al operador lineal L.

En efecto, $\exists \lambda \in \mathbb{R} - \{1, 0\}$ tal que $k(\lambda f)'(-b) = k\lambda f'(-b) = -\lambda v_1 \neq -v_1$.

- Si f_1 y $f_2 \in D(A)$ entonces f_i, f_i' son a.c. en $[-b, b]$, con $kf_i'(-b) = v_1$ y $kf_i'(b) = -v_2$, $i = 1, 2$. Asi tenemos que $f_1 - f_2 \in X$, $f_1 - f_2$ y $(f_1 - f_2') = f_1' - f_2'$ son a.c. en $[-b, b]$. También

$$(f_1 - f_2)'(-b) = f_1'(-b) - f_2'(-b) = \frac{-v_1}{k} - \left(\frac{-v_1}{k}\right) = 0$$

$$(f_1 - f_2)'(b) = f_1'(b) - f_2'(b) = \frac{-v_2}{k} - \left(\frac{-v_2}{k}\right) = 0$$

$\therefore f_1 - f_2 \in D(L)$.

- Si $f \in D(A)$ y $g \in D(L)$ entonces $f + g \in X$, $f + g$, $(f + g)' = f' + g'$ son a.c. en $[-b, b]$, y

$$k(f + g)'(-b) = k\{f'(-b) + g'(-b)\} = k\frac{-v_1}{k} = v_1$$

$$k(f + g)'(b) = k\{f'(b) + g'(b)\} = k\frac{-v_2}{k} = v_2$$

$\therefore f + g \in D(A)$.

- Si $f \in D(A)$ y $g \in D(L)$ entonces
$A(f + g) := k(f + g)'' - \sigma(f + g) = kf'' + kg'' - \sigma f - \sigma g = Af + Lg$.

Usando el operador A, el problema (1.1) - (1.4) puede ser escrito como el siguiente P.C.A. afin en X:

$$\left| \begin{array}{l} u_t = Au, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \in D(A). \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Lema 3.1 *El Operador Lineal L es el generador infinitesimal de un Semigrupo de Clase* $C_0 : \{z(t)\}_{t \geq 0}$ *tal que*

$$\|z(t)f\|_1 \leq e^{-\sigma t}\|f\|_1, \quad \forall f \in X, \quad \forall t \geq 0.$$

Prueba: Se usa el Teorema de Hille Yosida (Pazy [5]). Dado $g \in X$ y $\lambda > -\sigma$ pretendemos encontrar $f \in D(L)$ tal que verifique:

$$(\lambda I - L) = g. \tag{3.2}$$

Como $(\lambda I - L)f = \lambda f - Lf = \lambda f - (kf'' - \sigma f) = (\lambda + \sigma)f - kf''$, c.t.p. $x \in (-b, b)$, entonces (3.2) es equivalente a resolver

$$f'' - \frac{(\lambda + \sigma)}{k} f = \frac{-g}{k} \; c.t.p. \; x \in (-b, b). \tag{3.3}$$

Así tenemos

$$f(x) = c_1 e^{rx} + c_2 e^{-rx} - \frac{1}{kr}\int_{-b}^{x} senh[r(x - x')]\, g(x')\, dx' \tag{3.4}$$

donde $r = \sqrt{\dfrac{\lambda + \sigma}{k}}$ y las constantes c_1, c_2 son constantes por determinar, usando el hecho que f debe pertenecer a $D(L)$.

De (3.4) conseguimos:

$$f'(x) = rc_1 e^{rx} - rc_2 e^{-rx} - \frac{1}{k}\int_{-b}^{x} cos\,h[r(b - x')] f(x')dx'$$

Las condiciones de frontera especificadas en la definición de $D(L)$ nos permiten establecer:

$$\begin{aligned} rc_1 e^{-rb} - rc_2 e^{rb} &= 0 \\ rc_1 e^{rb} - rc_2 e^{-rb} &= \frac{1}{k}\int_{-b}^{b} cos\,h[r(b - x')] g(x')dx' \end{aligned}$$

De aquí tenemos

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -re^{rb} \\ \frac{1}{k}\int_{-b}^{b} cos\,h[r(b - x')]\, g(x')dx' & -re^{-rb} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} re^{-rb} & 0 \\ re^{rb} & \frac{1}{k}\int_{-b}^{b} cos\,h[r(b - x')]\, g(x')dx' \end{vmatrix}}{\Delta}$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} re^{-rb} & re^{rb} \\ re^{rb} & -re^{-rb} \end{vmatrix} = r^2 \left\{ e^{2rb} - e - 2rb \right\} = 2r^2 \; senh(2rb).$$

Es decir

$$c_1 = \frac{e^{rb}}{2rk\, senh(2rb)} \int_{-b}^{b} cosh[r(b-x')]\, g(x')\, dx'$$

$$c_2 = \frac{e^{-rb}}{2rk\, senh(2rb)} \int_{-b}^{b} cosh[r(b-x')]\, g(x')\, dx'$$

Así (3.4) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \left[(\lambda I - L)^{-1} g\right](x) = f(x) &= \frac{e^{r(b+x)}}{2rk\, senh(2rb)} \int_{-b}^{b} cosh[r(b-x')]\, g(x')\, dx' \\ &+ \frac{e^{-r(b+x)}}{2rk\, senh(2rb)} \int_{-b}^{b} cosh[r(b-x')]\, g(x')\, dx' \\ &- \frac{1}{kr} \int_{-b}^{x} senh[r(x-x')]\, dx' \\ &= \frac{cosh[r(b+x)]}{rk\, senh(2rb)} \int_{-b}^{b} cosh[r(b-x')]\, g(x')\, dx' \\ &- \frac{1}{kr} \int_{-b}^{x} senh[r(x-x')]\, dx'. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Como $x \in (-b, b)$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{b} cosh[r(b-x')]\, g(x')\, dx' &= \int_{-b}^{b} cosh[r(b-x')]\, g(x')\, dx' \\ &+ \int_{x}^{b} cosh[r(b-x')]\, g(x')\, dx'. \end{aligned}$$

Usando esto en (3.5) tenemos

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{rk\, senh(2rb)} \Big\{ & cosh[r(b-x')]. \int_{-b}^{x} cosh[r(b-x')]\, g(x')\, dx' \\ & + cosh[r(b-x')] \int_{x}^{b} cosh[r(b-x')]\, g(x')\, dx' \\ & - senh(2rb) \int_{-b}^{x} senh[r(b-x')]\, g(x')\, dx' \Big\}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

pero

$$\begin{aligned} & cosh[r(b+x)] \,.\, cosh[r(b-x')] - senh(2rb) \,.\, senh[r(b-x')] \\ & = cosh[r(b-x)] \,.\, cosh[r(b+x')]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Usando (3.7) y la linealidad de la desigualdad de la integral en (3.6) tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{rk\,senh(2rb)} \Big\{ &cos h[r(b-x)]. \int_{-b}^{x} cos h[r(b+x')]\, g(x')\, dx' \\ &+ cos h[r(b+x)] \int_{x}^{b} cos h[r(b-x')]\, g(x')\, dx' \Big\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

$\forall g \in X$ y $r = \sqrt{\frac{\lambda+\sigma}{k}} > 0$, (i.e. $\lambda > -\sigma$).

De (3.8) vemos que para todo $\lambda > -\sigma$ existe $(\lambda I - L)^{-1} \in B(X) =$ {Operadores acotados de X en X} y que $(\lambda I - L)^{-1} : X_+ \to X_+$, donde $X_+ = \{g \in X, g > 0\}$.

De hecho, si $g \in X_+$ y $\lambda > -\sigma$, la ecuación (3.3) tiene una única solución $f \in D(L) \cap X_+$ y además integrando (3.3) se tiene:

$$f'(b) - f'(-b) - \frac{(\lambda+\sigma)}{k} \int_{-b}^{b} f(s)\, ds = \frac{-1}{k} \int_{-b}^{b} g(s) ds.$$

Como $f \in D(L) \cap X_+$ entonces

$$-\frac{(\lambda+\sigma)}{k} \|f\|_1 = \frac{1}{k} \|g\|_1 .$$

Luego $\|f\|_1 = \frac{1}{\lambda+\sigma} \|g\|_1$, i.e.

$$\left\|(\lambda I - L)^{-1} g\right\|_1 = \frac{1}{\lambda+\sigma} \|g\|_1, \quad g \in X_+,\ \lambda > -\sigma.$$

Por otro lado, si $g \in X$ y $\lambda > -\sigma$, la ecuación (3.8) nos conduce a

$$|f(x)| = \left|((\lambda I - L)^{-1} g)\right| \le ((\lambda I - L)^{-1} |g|)(x), \quad \text{c.t.p. } x \in (-b, b),$$

usando esta desigualdad tenemos:

$$\left\|(\lambda I - L)^{-1} g\right\|_1 = \frac{1}{\lambda+\sigma} \|g\|_1 = \frac{1}{\lambda+\sigma} \|g\|_1 .$$

luego se obtiene $\|f\|_1 = \left\|(\lambda I - L)^{-1} g\right\|_1 \le \frac{1}{\lambda+\sigma} \|g\|_1$ siempre que $g \in X$ y $\lambda > -\sigma$. Así, para cada $\lambda > -\sigma, \exists (\lambda I - L)^{-1} \in B(X)$ con $\left\|(\lambda I - L)^{-1}\right\| \le \frac{1}{\lambda+\sigma}$. Tenemos entonces que el operador $(\lambda I - L)^{-1}$ es cerrado.

Ahora usando el Teorema (2.2) tenemos que $\lambda I - L$ es cerrado, i.e. $\lambda I - L \in C(X)$. Se puede expresar L como $L = (\lambda I - L) + \lambda I$; usando el Teorema (2.3) y que $-\lambda I + L$ es cerrado y λI es acotado, que L es cerrado.

Por otro lado, $D(L)$ es denso en X, pues $D(L) \supset C_0^\infty(-b, b)$.

Acabamos de probar que L es un operador cerrado con dominio $D(L)$ denso en X y que $\left\|(\lambda I - L)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda+\sigma}$, $\forall \lambda > -\sigma$, entonces aplicando el Teorema de Hille Yosida se tiene el resultado.

Observación 3.1 *Observe que el semigrupo* $\{z(t)\}_{t\geq 0}$ *tiene decaimiento exponencial.*

Observación 3.2 *Definiendo*

$$\varphi(x) = \frac{(x-b)^2}{4kb} v_1 - \frac{(x+b)^2}{4kb} v_2 \tag{3.10}$$

entonces $\varphi \in D(A)$ y $A\varphi = \frac{(v_1 - v_2)}{2b} - \sigma\varphi$.

Observación 3.3 *Definiendo*

$$w_0 := u_0 - \varphi \tag{3.11}$$

entonces $w_0 \in D(L)$ y $Lw_0 = Au_0 - A\varphi$.

Teorema 3.1 **(Solución fuerte)** *Si* $u_0 \in D(A)$ *y* φ *es dado por (3.10), entonces*

$$u(t) = \varphi + z(t)\left[u_0 - \varphi\right] + \int_0^t z(s)\left[\frac{1}{2b}(v_1 - v_2) - \sigma\varphi\right] ds, \quad t \geq 0$$

es la única solución fuerte del P. C. A. afín (3.1).

Prueba. Usando el Corolario 2.1 y Lema 3.1 podemos afirmar que la única solución fuerte de (3.1) es:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t z(t)\, Au_0 ds, \quad t \geq 0\,. \tag{3.12}$$

De la observación 3.2 se tiene $Au_0 = Lw_0 + A\varphi$, entonces (3.12) queda expresado:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + \int_0^t z(s)\{\, Lw_0 + A\varphi\}\, ds \\ &= u_0 + \int_0^t z(s) Lw_0 ds + \int_0^t z(s) A\varphi ds. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Por otro lado, desde que L es el generador infinitesimal del Semigrupo de Clase $C_0 : \{z(t)\}_{t\geq 0}$, tenemos que:

$$\int_0^t z(s)\,Lw_0 ds = z(t)w_0 - w_0. \tag{3.14}$$

Usando la observación (3.1) y (3.14) en (3.13) tenemos:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + z(t)w_0 - w_0 + \int_0^t z(s)\left[\frac{1}{2b}(v_1 - v_2) - \sigma\varphi\right] ds \\ &= \varphi + z(t)\left[u_0 - \varphi\right] + \int_0^t z(s)\left[\frac{1}{2b}(v_1 - v_2) - \sigma\varphi\right] ds. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Entonces (3.15) es una relación más explícita que (3.12), pues el efecto de la condición de frontera no homogénea es evidente a través de la φ.

Problemas por efectos de saturación.- Como queremos escribir la versión abstracta del problema (1.5) - (1.8), introducimos el espacio de Banach $\chi = X \times \mathbb{R}$ donde la norma que usaremos es:

$$\|f\| = \|f_1\|_1 + \delta|f_2|, \; f = (f_1, f_2) \in \chi$$

δ es usado en $\|f\|$ de modo que $\|f_1\|_1$ y $\delta|f_2|$ representan el número total de partículas. Definamos el operador $\mathfrak{L}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}: D(\mathfrak{L}) \subset \chi &\to \chi \\ f &\mapsto \mathfrak{L}f = (|\mathfrak{L}f|_1, |\mathfrak{L}f|_2) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} [\mathfrak{L}f]_1 &= kf_1'' - \sigma f_1 \quad \text{en c.t.p. } x \in (-b, b) \\ [\mathfrak{L}f]_2 &= \frac{h}{\delta} f_1(b) - (\sigma_b + \frac{h}{\delta})\, f_2 \end{aligned}$$

y el conjunto

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{L}) = \{ f = (f_1, f_2) \in \chi : f_1 \text{ y } f_1' \text{ son a.c. en } [-b, b],\; f'(-b) = 0\,; \\ kf'(b) = -h[f_1(b) - f_2]\}. \end{aligned}$$

es un subespacio de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{L}$ es un operador lineal. También, definimos el operador $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} &\to \mathcal{X} \\ f &\mapsto \mathcal{A}f = \left([\mathcal{A}f]_1, [\mathcal{A}f]_2\right) \end{aligned}$$

donde

$$[\mathcal{A}f]_1 = kf_1'' - \sigma f_1 \quad \text{en c.t.p. } x \in (-b, b)$$
$$[\mathcal{A}f]_2 = \frac{h}{\delta} f_1(b) - (\sigma_b + \frac{h}{\delta})\, f_2$$

y el conjunto

$$D(\mathcal{A}) = \{ f = (f_1, f_2) \in \mathcal{X}: f_1 \text{ y } f_1' \text{ son a.c. en } [-b, b],\ kf_1'(-b) = v_1,$$
$$kf_1'(b) = -h[f_1(b) - f_2]\}$$

no es un subespacio de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{A}$ es un operador afín asociado al operador lineal $\mathcal{L}$.

De hecho, para $f = (f_1, f_2) \in D(\mathcal{A})$ tenemos que existen $\lambda \in \mathbb{R} - \{1, 0\}$ tales que $k(\lambda f_1)'(-b) = k\lambda f_1'(-b) = \lambda v_1 \neq -v_1$.

- Si $f = (f_1, f_2)$ y $g = (g_1, g_2)$ son elementos de $D(\mathcal{A})$ entonces f_1, f_1', g_1 y g_1' son a.c. en $[-b, b]$, con

$$kf_1'(-b) = -v_1$$
$$kf_1'(b) = -h[f_1(b) - f_2]$$
$$kg_1'(-b) = -v_1$$
$$kf_1'(b) = -h[g_1(b) - g_2]$$

Así tenemos que $f - g \in X$, $f_1 - g_1$ y $(f_1 - g_1)' = f_1' - g_1'$ son a.c. en $[-b, b]$.
También

$$(f_1 - g_1)'(-b) = f_1'(-b) - g_1'(-b) = -\frac{v_1}{k} - \left(-\frac{v_1}{k}\right) = 0$$
$$k(f_1 - g_1)'(b) = k\{f_1'(b) - g_1'(b)\} = kf_1'(b) - kg_1'(b)$$
$$= -h[f_1(b) - f_2] + h[g_1(b) - g_2]$$
$$= -h[(f_1 - g_1)(b) - (f_2 - g_2)]$$

$\therefore\ f - g \in D(\mathcal{L})$.

- Si $(f_1, f_2) = f \in D(\mathcal{A})$ y $(g_1, g_2) = g \in D(\mathcal{L})$ entonces $f + g = (f_1 + g_1, f_2 + g_2) \in \mathcal{X}$, $f_1 + g_1, (f_1 + g_1)' = f_1' + g_1'$ son a.c. en $[-b, b]$ y

$$k(f_1 + g_1)'(-b) = k\{f_1'(b) + g_1(b)\} = kf_1'(b) + kg_1'(b)$$
$$= -v_1$$

$$k(f_1 + g_1)'(-b) = k\{f_1'(b) + g_1'(b)\} = kf_1'(b) + kg_1'(b)$$
$$= -h[(f_1 + g_1)(b) - (f_2 + g_2)]$$

$\therefore\ \mathcal{A}(f + g) = \mathcal{A}(f) + \mathcal{L}(g)$.

Usando el operador $\mathcal{A}$, nuestro problema (1.5) - (1.8) puede ser escrito como el P.C.A. afin en $\mathcal{X}$.

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{U}_t = \mathcal{A}\mathcal{U}, \ t > 0 \\ \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A}) \end{array} \right. \tag{3.16}$$

donde $\mathcal{U}(t) = (y(t), v(t))$ y $\mathcal{U}_0 = (y_0, v_0)$.

Lema 3.2 *El operador lineal $\mathcal{L}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase $C_0 : \{Z(t)\}_{t\geq 0}$ tal que*

$$\|Z(t)f\| \leq e^{-t\sigma_0} \|f\|, \ \forall f \in \mathcal{X}, \ \ \forall t \geq 0,$$

donde $\sigma_0 = min\{\sigma, \sigma_b\}$.

Prueba: Se usa el Teorema de Hille Yosida (ver Pazy [5]). Para cada $g = (g_1, g_2) \in \mathcal{X}$ la ecuación

$$(\lambda I - \mathcal{L})f = g \tag{3.17}$$

nos conduce al sistema de ecuaciones:

$$f_1'' - \frac{\lambda + \sigma}{k} f_1 = -\frac{1}{k} g_1 \quad \text{en c.t.p. x} \in (-b, b) \tag{3.18}$$

$$-\frac{h}{\delta} f_1(b) + (\lambda + \sigma_b + \frac{h}{\delta}) f_2 = g_2. \tag{3.19}$$

Resolviendo la ecuación (3.18) tenemos

$$f_1(x) = c_1 e^{vx} + c_2 e^{-vx} - \frac{1}{kv} \int_{-b}^{x} \{senh[v(x - x')]\} g_1(x') dx', \tag{3.20}$$

donde $v = \sqrt{\frac{(\lambda+\sigma)}{k}}$ y las constantes c_1 y c_2 serán determinadas usando la condición de que $f = (f_1, f_2) \in D(\mathcal{L})$. (Asumiremos que $\lambda + \sigma > 0$).

De (3.20) tenemos:

$$f_1'(x) = vc_1 e^{vx} - vc_2 e^{-vx} - \frac{1}{k} \int_{-b}^{x} \{cosh[v(x - x')]\} g_1(x') dx'. \tag{3.21}$$

De (3.21) y $f = (f_1, f_2) \in D(\mathcal{L})$ tenemos que

$$vc_1 e^{-vb} - vc_2 e^{vb} = 0$$
$$vc_1 e^{vb} - vc_2 e^{-vb} - \frac{1}{k} \int_{-b}^{b} \{cosh[v(b - x')]\} g_1(x') dx'.$$

Por otro lado, la ecuación (3.19) nos da:

$$f_2 = \frac{1}{\lambda + \sigma_b + \frac{h}{\delta}} \, [g_2 + \frac{h}{\delta} f_1(b)], \tag{3.22}$$

donde también asumimos que $\lambda + \sigma_b > 0$ (de modo que $\lambda + \sigma_b + \frac{h}{\delta} > 0$). Así, para $\lambda > -\sigma_0$ donde $\sigma_0 = min\{\sigma, \sigma_b\}$, tenemos

$$\begin{aligned} &\nu c_1 e^{-\nu b} - \nu c_2 e^{\nu b} = 0 \\ &\nu c_1 e^{\nu b} - \nu c_2 e^{-\nu b} - \frac{1}{k} \int_{-b}^{b} \{cosh[\nu(b - x')]\} g_1(x') dx' \\ &= \frac{-\frac{h}{k}}{\lambda + \sigma_b + \frac{h}{\delta}} [(\lambda + \sigma_b) f_1(b) - g_2]. \end{aligned}$$

Usando (3.20) en $x = b$, obtenemos

$$\nu c_1 e^{-\nu b} - \nu c_2 e^{\nu b} = 0 \tag{3.23}$$

$$(\nu + c_1) c_1 e^{\nu b} + (-\nu + \nu_1) c_2 e^{-\nu b} = \alpha \tag{3.24}$$

donde

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{h}{k} \frac{\lambda + \sigma_b}{k\lambda + \sigma_b + \frac{h}{\delta}} \\ \alpha &= \frac{1}{k} \int_{-b}^{b} \{cosh[\nu(b - x')]\} \, g_1(x') dx' \\ &+ \frac{\nu_1}{k\nu} \int_{-b}^{b} \{senh[\nu(b - x')]\} \, g_1(x') dx' \\ &+ \frac{\nu_1 g_2}{\lambda + \sigma_b} \end{aligned}$$

La solución del sistema (3.23) - (3.24) es:

$$c_1 = \frac{1}{2} \frac{e^{\nu b}}{H(2\nu b)} \alpha,$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \frac{e^{-\nu b}}{H(2\nu b)} \alpha,$$

donde $H(\zeta) = \nu senh(\zeta) + \nu_1 \cosh(\zeta)$.

Con la sustitución de los valores de c_1 y c_2 en (3.20) obtenemos

$$f_1(x) = \frac{cosh[\nu(b + x)]}{H(2\nu b)} \alpha - \frac{1}{k\nu} \int_{-b}^{x} \{senh[\nu(x - x')]\} \, g_1(x') dx'.$$

También podemos escribir

$$f_1(x) = \frac{1}{H(2vb)}\left\{\frac{1}{kv}K(v(b-x))\int_{-b}^{x}\{cosh[v(b+x')]\}\, g_1(x')\,dx' \right.$$
$$+\frac{1}{kv}cosh[v(b+x)]\int_{x}^{b}K(v(b+x'))\,g_1(x')\,dx' \tag{3.25}$$
$$\left. +\frac{v_1}{\lambda+\sigma_b}\{cosh[v(b+x)]\}\, g_2\right\},$$

donde $K(\zeta) = v_1\, senh(\zeta) + v cosh(\zeta)$.

Se observa que si $h = 0$ entonces $v_1 = 0$ y (3.25) coincide con (3.8).

Las relaciones (3.25) y (3.22) (con $f_1(b)$ dado por (3.25) en $x = b$) nos dan la expresión explícita de $(\lambda I - \mathcal{L})^{-1} g$ para todo $g \in X$ y $\lambda > -\sigma_0 := -min\{\sigma, \sigma_b\}$.

Esto nos permitirá mostrar que $(\lambda I - \mathcal{L})^{-1} \in B(\mathcal{X})$ y que mapea $\mathcal{X}_+ = \mathcal{X}_+ \times \mathbb{R}_+$ en $D(\mathcal{L}) \cap \mathcal{X}_+$. Sea $g = (g_1, g_2)$ cualquier elemento dado de $\mathcal{X}_+$, entonces
$f = (f_1, f_2) = (\lambda I - \mathcal{L})^{-1} g \in D(\mathcal{L}) \cap \mathcal{X}_+$ y las ecuaciones (3.18) - (3.19) dan

$$kf_1'(b) - kf_1'(-b) - (\lambda+\sigma)\int_{-b}^{b} f_1(x)dx = -\int_{-b}^{b} g_1(x)dx$$
$$-h[f_1(b) - f_2] + (\lambda + \sigma_b)\delta f_2 = \delta f_2,$$

i.e.

$$h[f_1(b) - f_2] + (\lambda+\sigma)\|f_1\|_1 = \|g_1\|_1, \tag{3.26}$$
$$-h[f_1(b) - f_2] + (\lambda+\sigma_b)\delta f_2 = \delta g_2 \tag{3.27}$$

Sumando las ecuaciones (3.26) y (3.27) tenemos

$$(\lambda+\sigma)\|f_1\|_1 + (\lambda+\sigma_b)\,\delta f_2 = \|g_1\|_1 + \delta g_2.$$

Así vale

$$(\lambda+\sigma_0)\left[\|f_1\|_1 + \delta f_2\right] \le \|g_1\|_1 + \delta g_2. \tag{3.28}$$

Usando la desigualdad (3.28) concluimos

$$\|(\lambda I - \mathcal{L})^{-1} g\| = \|f_1\|_1 + \delta f_2 \le \frac{1}{\lambda+\sigma_0}\left[\|g_1\|_1 + \delta g_2\right] = \frac{1}{\delta+\sigma_0}\|g\| \tag{3.29}$$

$\forall g \in \mathcal{X}_+$ y $\lambda > -\sigma_0$.

Ahora consideremos $g = (g_1, g_2) \in \mathcal{X}$. De las igualdades (3.25) y (3.22) tenemos, respectivamente:

$$|f_1(x)| \le \frac{1}{H(2\nu b)} \left\{ \frac{1}{k\nu} K(\nu(b-x)) \int_{-b}^{x} \{cosh[\nu(b+x')]\} |g_1(x')|\, dx' \right.$$
$$+ \frac{1}{k\nu}\{cosh[\nu(b+x)]\} \int_{-b}^{x} K(\nu(b-x')) |g_1(x')|\, dx'$$
$$\left. + \frac{\nu_1}{\lambda + \sigma_b}\{cosh[\nu(b+x)]\} |g_2| \right\}$$
$$|f_2| \le \frac{\nu_1}{\lambda + \sigma_b + \frac{h}{\delta}} \left[|g_2| + \frac{h}{\delta} |f_1(b)| \right]$$

i.e.

$$|f_1(x)| \le \left[(\lambda I - \mathcal{L})^{-1} G\right]_1 (x), \tag{3.30}$$

$$|f_2| \le \left[(\lambda I - \mathcal{L})^{-1} G\right]_2, \tag{3.31}$$

donde $\left(|g_1|, |g_2|\right) = G \in \mathcal{X}_+$ y $\left(\left[(\lambda I - \mathcal{L})^{-1} G\right]_1, \left[(\lambda I - \mathcal{L})^{-1} G\right]_2\right) = (\lambda I - \mathcal{L})^{-1} G \in \mathcal{X}_+$.
Usando las desigualdades (3.30), (3.31) y (3.29) tenemos

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \|f_1\|_1 + \delta |f_2| \\
&= \| |f_1| \|_1 + \delta |f_2| \\
&\le \left\| \left[(\lambda I - \mathcal{L})^{-1} G\right]_1 \right\|_1 + \delta \left| \left[(\lambda I - \mathcal{L})^{-1} G\right]_2 \right| \\
&= \left\| (\lambda I - \mathcal{L})^{-1} G \right\| \\
&\le \frac{1}{\lambda + \sigma_0} \|G\| \\
&= \frac{1}{\lambda + \sigma_0} \left[\| |g_1| \|_1 + \delta |g_2| \right] \\
&= \frac{1}{\lambda + \sigma_0} \left[\| g_1 \|_1 + \delta |g_2| \right] \\
&= \frac{1}{\lambda + \sigma_0} \|g\|
\end{aligned}$$

i.e.

$$\left\| (\lambda I - \mathcal{L})^{-1} g \right\| = \|f\| \le \frac{1}{\lambda + \sigma_0} \|g\| \tag{3.32}$$

para $g \in \mathcal{X}$ y $\lambda > -\sigma_0$.

Además, como $(\lambda I - \mathcal{L})^{-1} \in B(\mathcal{X}) \subset C(\mathcal{X})$ para $\lambda > -\sigma_0$, tenemos que $\mathcal{L} \in C(\mathcal{X})$. En efecto, usando el Teoerma (2.2) tenemos que $\lambda I - \mathcal{L} \in C(\mathcal{X})$. Desde que $\mathcal{L} = -(\lambda I - \mathcal{L}) + \lambda I$ y usando el

Teorema (2.3) con $-\lambda I + \mathcal{L}$ cerrado y λI acotado, concluimos que $\mathcal{L}$ es cerrado. Por otro lado, definiendo el conjunto Ω,

$$\Omega = \left\{ f = (f_1, f_2) \in \mathcal{X},\ f_1 \in C^2([-b, b]),\ f_1'(-b) = 0;\ kf_1'(b) = -h[f_1(b) - f_2] \right\},$$

entonces $\Omega \subset D(\mathcal{L})$.

Definimos para cada $f_2 \in \mathbb{R}$

$$\Omega_1 = \left\{ f_1 \in X = L^1(-b, b) : f_1 \in C^2([-b, b]),\ f_1'(-b) = 0;\ kf_1'(b) = -h[f_1(b) - f_2] \right\}$$

entonces Ω_1 es denso en X. De donde Ω es denso en $\mathcal{L}$, asi $D(\mathcal{L})$ es denso en $\mathcal{X}$.

Acabamos de probar entonces que $\mathcal{L}$ es un operador cerrado con dominio $D(\mathcal{L})$ denso en $\mathcal{X}$ y $\left\| (\lambda I - \mathcal{L})^{-1} \right\| \le \frac{1}{\lambda + \sigma}$, $\forall \lambda > -\sigma_0$. Aplicando el Teorema de Hille Yosida se tiene el resultado.

Observación 3.4 *Observe que el semigrupo* $\{Z(t)\}_{t \ge 0}$ *tiene decaimiento exponencial.*

Observación 3.5 *Defina* $\psi = (\varphi_1, \varphi_2)$ *donde*

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-b)^2}{4kb} v_1 + \frac{h}{k + bh} \frac{(x+b)^2}{4b} \varphi_2, \quad \varphi_2 \in \mathbb{R} \tag{3.33}$$

entonces $\psi \in D(\mathcal{A})$ y $\mathcal{A}\psi = ([\mathcal{A}\psi]_1, [\mathcal{A}\psi]_2)$, *donde:*

$$[\mathcal{A}\psi]_1 = \frac{1}{2kb} v_1 + \frac{1}{2b} \cdot \frac{h}{k + bh} \varphi_2 - \sigma \varphi_1$$

$$[\mathcal{A}\psi]_2 = -\left(\frac{h}{\delta} \cdot \frac{k}{k + bh} + \sigma_b\right) \varphi_2 .$$

Observación 3.6 *Si se define*

$$\mathcal{W}_0 = \mathcal{U}_0 - \psi \tag{3.34}$$

entonces $\mathcal{W}_0 \in D(\mathcal{L})$ y $\mathcal{L}\mathcal{W}_0 = \mathcal{A}\mathcal{U}_0 - \mathcal{A}\psi$

A continuación enunciamos un teorema, en forma análoga al teorema 3.1

Teorema 3.2 (Solución fuerte) *Si* $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A})$ *y* ψ *es dado por (3.33), entonces*

$$\mathcal{U}(t) = \psi + Z(t)\left[\mathcal{U}_0 - \psi\right] + \int_0^t Z(s) \mathcal{A}\psi \, ds$$

es la única solución fuerte en $[0, +\infty)$ *del P.C.A. afin (3.16), donde* $\mathcal{A}\psi$ *está calculado en la observación 3.5.*

Prueba: Usando el Corolario 2.1 y el Lema 3.1 podemos afirmar que la única solución fuerte de (3.16) es:

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_0 + \int_0^t Z(s)\mathcal{A}\mathcal{U}_0\, ds, \quad t \geq 0. \tag{3.35}$$

De la observación 3.6 se tiene $\mathcal{A}\mathcal{U}_0 = \mathcal{L}\mathcal{W}_0 + \mathcal{A}\psi$, entonces (3.35) queda expresado

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t) &= \mathcal{U}_0 + \int_0^t Z(s)\{\mathcal{L}\mathcal{W}_0 + \mathcal{A}\psi\} ds \\ &= \mathcal{U}_0 + \int_0^t Z(s)\mathcal{L}\mathcal{W}_0\, ds + \int_0^t Z(s)\mathcal{A}\psi\, ds. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Por otro lado, desde que $\mathcal{L}$ es el generador infinitesimal del semigrupo de clase $C_0 : \{Z(t)\}_{t\geq 0}$, tenemos que

$$\int_0^t Z(s)\ \mathcal{L}\mathcal{W}_0\, ds = Z(t)\mathcal{W}_0 - \mathcal{W}_0. \tag{3.37}$$

Usando la observación 3.5 y la igualdad (3.37) tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t) &= \mathcal{U}_0 + Z(t)\,\mathcal{W}_0 - \mathcal{W}_0 + \int_0^t Z(s)\mathcal{A}\psi\, ds \\ &= \psi + Z(t)\left[\mathcal{U}_0 - \psi\right] + \int_0^t Z(s)\mathcal{A}\psi\, ds. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Entonces (3.38) con $\mathcal{A}\psi$ como se indica en la observación 3.5, es una relación mas explícita que (3.35). En (3.38), por medio de la ψ, se nota el efecto de la condición de frontera.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BARBU V., *Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems.* Academic Press Inc. (1993).

[2] BREZIS H. and Thierry Cazenave, *Nonlinear Evolution Equations.* (1994).

[3] FANG W. et. al, A *mathematical model for outgassing and contamination.*, SIAM Journal Appl. Math. 51, 1327 - 1355, (1991).

[4] KATO T., *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer - Verlag (1976).

[5] PAZY A., *Semigroups of linear Operators and aplications to Partial Differential Equations.* Springer - Verlag, (1980).