PESQUIMAT Revista de la Fac.CC.MM.de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol.III, $N^{\circ}2$, Noviembre 2000, pag.44-50. Lima-Perú

# EXISTENCIA GLOBAL Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO PARA UNA ECUACIÓN DE KIRCHOFF CON TÉRMINO DISIPATIVO DE COEFICIENTE VARIABLE

**Cabanillas Lapa, Eugenio**[1]

**ABSTRACT.** *Consideramos una ecuación de onda no lineal, con un término disipativo del tipo $a(x)u'$ (el coeficiente $a$ depende de la variable espacial).*

*Usando el método de* FAEDO-GALERKIN, *y definiendo funcionales, de energía adecuados, encontraremos existencia global de la solución para datos pequeños. Una vez hecho esto usamos desigualdades integrales para mostrar que la energía del sistema decae a cero de manera exponencial.*

## 1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo estudiamos la existencia global de la solución, así como el comportamiento asintótico de la energía del sistema.

$$(*)\left|\begin{array}{lll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + g(x,t,u') = 0 & \text{en} & Q = \Omega\times]0,T[ \\ u = 0 & \text{en} & \Sigma = \Gamma\times]0,T[ \\ u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \text{en} & \Omega \end{array}\right.$$

donde $\Omega$ es un abierto de $\mathbf{R}^m$, con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ bien regular, $T > 0, M \in C'([0,+\infty[), g$ es una función de valor real satisfaciendo condiciones apropiadas. Diversos autores: HASOYA-YAMADA [1], PATCHEU [4], HERD [2],etc., han estudiado la solubilidad global de $(*)$ para los casos: $g(x,t,u') = \delta, g(u'), C(t)u'$. A nuestro conocimiento aún no se

[1]Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias Matemáticas - UNMSM
e-mail: d230101@unmsm.edu.pe

ha abordado el estudio del importante caso $g(x,t,u') = a(x)u'$, por lo que emprendimos la investigación de este problema.

## 2. PRELIMINARES

Con $(.,.), |.|$ denotamos el producto interno y la norma de $L^2(\Omega)$, respectivamente $H^m(\Omega)$ es el espacio de Sobolev usual.
Denotamos con $C_\Omega$ y $C_\Omega^*$ las constantes de inmersión que realizan las desigualdades:

$$|u| \leq C_\Omega |\nabla u|, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

$$|\nabla u| \leq C_\Omega^* |\Delta u|, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

## 3. EL RESULTADO PRINCIPAL

**Teorema 2.1.-** Sea $M : [0,+\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que:

**(2.1)** $M \in C'([0,+\infty[), M(s) \geq m_0 > 0, \forall s \geq 0$

**(2.2)** $\tilde{M}(s) = \int_0^s M(z)dz \leq sM(s)$

Sea $a \in L^\infty(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ tal que:

**(2.3)** $a(x) \geq a_0 > 0, \forall x \in \Omega; |\Delta a(x)| \leq C_0 a(x); |\nabla a(x)|^2 \leq C_1 a(x)$
donde $C_0$ y $C_1$, son constantes positivas.

Si $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), u_1 \in H_0^1(\Omega)$, entonces existe un número positivo $\varepsilon_0$ tal que si:

$$2\, C_0\, k_1 \left[ |\nabla u_1|^2 + M(|\nabla u_0|^2)|\Delta u_0|^2 \right] < \varepsilon_0$$

con $k_1 = \text{máx}\left\{ \frac{3}{2\, C_0}, C_\Omega + C_\Omega^* \right\}$,
entonces existe una función $u : \Omega x ]0,T[ \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que:

**(2.4)** $u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$

**(2.5)** $u' \in L^\infty(0,T; h_0^1(\Omega))$

**(2.6)** $u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

**(2.7)** $\frac{d}{dt}(u'(t),w) + M(|\nabla u(t)|^2)(-\Delta u(t),w) + (a(x)u'(t),w) = 0$

$\forall w \in H_0^1(\Omega)$, en el sentido de $D'(0,T)$.

**(2.8)** $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$

**Demostración:**
Usaremos el método de FAEDO-GALERKIN.
Sea $\{w_1, w_2 \dots , w_j, \dots\}$ base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ formada por los vectores propios de $-\Delta$, esto es:

$$-\Delta w_j = \lambda_j w_j;\ w_j\Big|_\Gamma = 0$$

Consideremos $V_m = [w_1, w_2, \dots , w_m]$ el subespacio de $H_0^1(\Omega)$ generado por $[w_1, w_2, \dots , w_m]$. Buscamos una solución $u_m(t)$ de la forma:

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j$$

donde $g_{jm}$ están determinados por el sistema:

**(2.9)** $(u_m''(t),w) - M(|\nabla u_m(t)|^2)(\Delta u_m(t),w) + (a(x)\,u_m'(t),w) = 0,$

$\forall w \in V_m$

**(2.10)** $u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ en } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$

**(2.11)** $u_m'(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1 \text{ en } H_0^1(\Omega)$

Por el Teorema de Caratheodory existe una solución local $u_m(t)$ en $[0,T_m[$. Las estimativas *a priori* permiten la solució al intervalo $[0,T]$ independiente de $m$.

**Estimativa a Priori I**

Haciendo $w = 2u_m'(t)$ en **(2.9)**:

$$(u_m''(t), 2u_m'(t)) + M(|\nabla u_m(t)|^2)(\nabla u_m(t), 2\nabla u_m'(t)) + a(x)u_m'(t), 2u_m'(t)) = 0$$

$$(2.12)\quad \frac{d}{dt}\left\{|u_m'(t)|^2 + \tilde{M}(|\nabla u_m(t)|^2)\right\} = -\int_\Omega 2a(x)[u_m'(t)]^2dx$$

De **(2.12)** y observando que $\tilde{M}(s) \geq m_0 s$ resulta

$$(2.13)\quad |u_m'(t)|^2 + m_0|\nabla u_m(t)|^2 \leq E_0(0) = |u_1|^2 + \tilde{M}(|\nabla u_0|^2)$$

**Estimativa a Priori II**

Haciendo $w = -2\triangle u_m'(t)$ en **(2.9)** resulta:

$$(2.14)\quad \frac{d}{dt}\left\{|\nabla u_m'(t)|^2 + M(|\nabla u_m(t)|^2)|\triangle u_m(t)|^2 = -2|a^{1/2}\nabla u_m'(t)|^2 + \right.$$

$$+\int_\Omega \triangle a(x)[u_m'(t)]^2dx + 2M'(|\nabla u_m(t)|^2)(\nabla u_m'(t), \nabla u_m(t))|\triangle u_m(t)|^2.$$

Tomando $w = -a(x)\triangle u_m(t)$ en **(2.9)** resulta:

$$(2.15)\quad \frac{d}{dt}\left\{(u_m'(t), -a\triangle u_m(t)) + \frac{1}{2}|a\nabla u_m(t)|^2\right\} = -|a^{1/2}\nabla u_m'(t)|^2 +$$

$$+(u_m'(t)\nabla a, \nabla u_m'(t)) - M(|\nabla u_m(t)|^2)|a^{1/2}\triangle u_m(t)|^2 - (u_m'(t)\nabla(a^2), \nabla u_m(t))$$

Definimos:

$$(2.16)\quad E_0(t) = |u_m'(t)|^2 + \tilde{M}(|\nabla u_m(t)|^2)$$

$$(2.17)\quad E_1(t) = |\nabla u_m'(t)|^2 + M(|\nabla u_m(t)|^2)|\triangle u_m(t)|^2$$

$$(2.18)\quad H(t) = (u_m'(t), -a\triangle u_m(t)) + \tfrac{1}{2}|a\nabla u_m(t)|^2$$

Se obtiene de **(2.12)**, **(2.14)**, **(2.15)**- **(2.18)**:

$$\frac{d}{dt}E_0(t) = -2|a^{1/2}u_m'(t)|^2$$

$$\frac{d}{dt}E_1(t) = -2|a^{1/2}\nabla u_m'(t)|^2 + C_0|a^{1/2}u_m'(t)|^2 +$$

$$2M'(|\nabla u_m(t)|^2)(\nabla u_m'(t), \nabla u_m(t))|\triangle u_m(t)|^2$$

$$\frac{d}{dt}H(t) \leq \alpha_0|a^{1/2}\nabla u_m'(t)|^2 - \frac{a_0}{2}M(|\nabla u_m(t)|^2)|\triangle u_m(t)|^2$$

donde: $\alpha_0 = 1 + \sqrt{\dfrac{C_1}{C_0}}C_\Omega + 2C_1\left(\dfrac{|a|_\infty\, C_\Omega\, C_\Omega^*}{a_0\, m_0}\right)^2$

Entonces:

$$(2.19)\quad \frac{d}{dt}\left\{E_0(t)+\frac{1}{C_0}E_1(t)+\varepsilon H(t)\right\} = -|a^{1/2}u_m'(t)|^2-\left(\frac{2}{C_0}-\varepsilon\alpha_0\right)|a^{1/2}\nabla u_m'(t)|^2$$

$$-\frac{\varepsilon\, a_0}{2}M(|\nabla u_m(t)|^2)|\Delta u_m(t)|^2+\frac{2}{C_0}M'(|\nabla u_m(t)|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u_m(t))|\Delta u_m(t)|^2$$

Sea

$$S(t)=E_0(t)+\frac{1}{C_0}E_1(t)+\varepsilon H(t)$$

Tomando

$$0<\varepsilon<min\left\{\varepsilon_1,\frac{1}{2\,C_0\,\theta_0}\right\}$$

con $\varepsilon_1=\dfrac{4}{C_0(a_0+2\alpha_0)},\theta_0=\text{máx}\left\{\dfrac{C_\Omega|a|_\infty}{m_0^{1/2}},\dfrac{1}{4}\dfrac{C_\Omega|a|_\infty}{m_0^{1/2}},\dfrac{1}{2}\dfrac{|a|_\infty^2\,C_\Omega}{m_0}\right\}$

resulta

$$(2.20)\quad \frac{1}{2\,C_0}E_1(t)\le S(t)\le k_1E_1(t)$$

$$k_1=\text{máx}\left\{\frac{3}{2\,C_0},C_\Omega+C_\Omega^*\right\}$$

Obviamente: $\dfrac{1}{2\,C_0}<k_1$

De **(2.19)(2.20)**

$$\frac{d}{dt}S(t)\le-\frac{\delta}{k_1}S(t)+C_2\,E_1^{1/2}(t)S(t)$$

donde

$$\delta=\min\left\{\frac{2}{C_0}-\varepsilon\,\alpha_0,\frac{\varepsilon\,a_0}{2}\right\},C_2=\frac{4M_0\,E_0(0)}{m_0^2}$$

$$M_0=\max_{s\in\left[0,\frac{E_0(0)}{m_0}\right]}|M'(s)|$$

Luego:

**(2.21)** $\frac{d}{dt}S(t) + \left[\frac{\delta}{k_1} - C_2\, E_1^{1/2}(t)\right] S(t) \leq 0$

Afirmamos que

**(2.22)** $\frac{\delta}{k_1} - C_2\, E_1^{1/2}(t) > 0, \forall t \in [0, +\infty[$

Supongamos absurdamente que **(2.22)** no se verifica.
Por la hipótesis:

$$E_1(0) < 2C_0\, k_1\, E_1(0) < \varepsilon_0 = \left(\frac{\delta}{k_1\, C_2}\right)^2$$

Por la continuidad de $E_1(t)$, existe $\tau > 0$ tal que:

$$E_1(t) < \varepsilon_0, \quad \forall t \in [0, \tau[$$

$$E_1(\tau) = \varepsilon_0$$

De **(2.22)** resulta

**(2.23)** $\frac{d}{dt}S(t) \leq 0, \quad \forall t \in [0, \tau[$

Pero:

**(2.24)** $S(\tau) - S(0) = \int_0^T S'(\xi) d\xi.$

De **(2.20)**, **(2.23)** y **(2.24)**:

$E_1(\tau) \leq 2\, C_0\, S(\tau) \leq 2\, C_0\, S(0) \leq C_0\, k_1\, E_1(0) < \varepsilon_0$

lo que es una contradicción. Así hemos mostrado que **(2.22)** se verifica, de donde resulta:

$$|\nabla u'_m(t)| \leq \text{Constante}$$

$$|\triangle u_m(t)| \leq \text{Constante}$$

**Estimativa a Priori III**

Haciendo $w = u_m''(t)$ en **(2.9)**, usando las estimativas I y II, y la Inmersión de Sobolev, obtenemos de manera standard:

$$|u_m''(t)| \leq \text{Constante}$$

Las estimativas I. II y III permiten el pasaje al límite.

**Teorema 2.2.-** Sea $u$ la solución obtenida en el teorema 2.1. Entonces existen constantes positivas $\mu$ y $\omega$ tales que:

$$E_0(t) \leq \mu e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0$$

**Demostración.-** Esta basada en una desigualdad integral, que aparece en KOMORNIK [3].

## 3. BIBLIOGRAFIA

[1] Hasoya, M Yameda, Y., *On some nonlinear wave equations II-global existence and energy decay of solutions J. of the Fac. Of Sci.*, Univ. of Tokyo, Vol.38 $N°$ 2, pp. 239-250(1991).

[2] Heard, M.L., *A Quasilinear Hyperbolic Integrodifferential equation related to a nonlinear string.* Trans. Amer.Math Soc. Vol.285 $N°$2 Oct. pp.805-823, (1984).

[3] Komornik, V., *Decay estimates for the wave equation with internal camping Proceedings of the conference on Control Theory. Varau 1993.* Birkhause Verlag. Basel, International Series Num. Analysis. 118 pp. 253-266 (1994).

[4] Patcheu, S.K.,*Global Existence and Exponential Decay Estimates for a Damped quasilinear Equation* Comm. Part. Diff. Eq. 22 (11 and 12), pp.2007-2024. (1997).