PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. II - N°1 Pgs. 69-75 Lima – Perú Ag. 1999

CONVERGENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS EN ESPACIOS DE HILBERT $L_2(\Omega,A,P)$

Wilfredo Domínguez C. *

RESUMEN

Una variable aleatoria X es una función medible real valorada, cuyo dominio es el espacio muestral Ω y cuyo rango es un conjunto no vacío de números reales, es decir X es variable aleatoria si $\forall$ x $\in$ R, el suceso $\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \leq x\} \in A$.

En el presente trabajo se extienden algunos resultados del caso univariado a la teoría de variables aleatorias complejas y su relación con los espacios de Hilbert.

Introducción

Formalmente una v.a. X es una función

$$X: \Omega \rightarrow R_X \subset R \quad ; \quad R_X \neq \phi$$

con la condición

$$[X \leq x] \in A \tag{1}$$

donde A es un sigma álgebra tal que $A \subset P(\Omega)$. Ahora si $A = P(\Omega)$, la condición (1) se cumple inmediatamente, pues el suceso $[X \leq x]$ es un subconjunto de Ω, el cual siempre es un suceso. Si $A \subset P(\Omega)$ puede ocurrir que la condición (1) no se cumpla, para algún valor de x, como consecuencia, la función X no sería variable aleatoria.

Una v.a. X se considera definida por completo, si se conoce ω, el resultado del experimento. Así pues, la v.a. X en el espacio probabilístico (Ω, A, P), que describe el experimento aleatorio dado, es una función $X(\omega)$ de un suceso aleatorio. Una condición equivalente a (1) es

$$\{\omega;\ X(\omega) \in \Delta\} \in A$$

donde Δ es un boreliano de R. Es decir X es una función medible.

* Universidad Nacional Mayor de San Marcos

El ejemplo más simple de una v.a. X es la función indicadora, es decir

$$I_A(\omega) = 1 \quad \text{si } \omega \in \mathcal{A}$$

$$I_A(\omega) = 0 \quad \text{si } \omega \notin \mathcal{A}$$

Teorema 1. Para que la función X sea P-medible es necesario y suficiente que para todo c $\in$ R, el conjunto

$$B = \{\omega;\ X(\omega) < c\}$$

sea P-medible; es decir $B \in \mathcal{A}$.

Demostración. La condición necesaria es directa, pues el intervalo $<-\infty\ ,\ c>$ es un conjunto boreliano. Para probar la suficiencia hay que tener en cuenta que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[X < c + \frac{1}{2^n}\right] \;=\; [X \le c] \qquad \forall\, c \in \mathbf{R}$$

Teorema 2. El límite de una sucesión convergente $\{X_n\};\ n \geq 1$, de variables aleatorias es una función P-medible.

Demostración.- Sea $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$

entonces
$$\{\omega;\ X_m(\omega) < c\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m>n} \{\omega;\ X_m(\omega) < c - 1/k\} \tag{2}$$

Esto es cierto evidentemente, ahora si $X(\omega) < c$, entonces $\exists$ k $\in$ R tal que:

Además para este k se puede escoger un n lo suficientemente grande para que m≥n y se cumpla la desigualdad

$$X_m < c - \frac{1}{k}$$

lo cual significa que ω figura en el lado derecho de la igualdad de (2).

Por el contrario, si ω pertenece al lado derecho de (2), existe un k tal que para todos los m suficientemente grandes

$$X_m(\varpi) < c - \frac{1}{k}$$

Luego X(ω) < c, es decir, ω figura en el lado izquierdo de (2).

Si las funciones $X_n(\omega)$ son medibles, entonces los conjuntos:

$$\left\{\varpi \,;\, X_m(\varpi) < c - \frac{1}{k}\right\}$$

pertenecen a *A*, lo cual demuestra que X(ω) es medible.

PRELIMINARES

Definición 1. Sea H un espacio vectorial complejo, cuyos elementos son variables aleatorias complejas definidas en un espacio muestral Ω. Un producto interno en H es una aplicación < , > : HxH → C que asocia a cada par de variables aleatorias X_1, X_2 un escalar denotado por $<X_1,X_2>$, que cumple:

1) $< X_1, X_2 > \geq 0 \quad \forall\, X_1, X_2 \in H \quad y \quad < X_1, X_1 >= 0 \leftrightarrow X_1 = 0$
2) $< X_1 + X_2, X_3 > = < X_1, X_3 > + < X_2, X_3 >$
3) $< kX_1, X_2 > = k < X_1, X_2 > \quad \forall\, X_1, X_2 \in H \; y \; \forall\, k \in C$
4) $< X_1, X_2 > = < \overline{X_2}, \overline{X_1} >, \quad \forall\, X_1, X_2 \in H$

Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias con funciones de densidad de $f_{X1}(x)$ y $g_{X2}(x)$ respectivamente entonces:

$$< f_{X1}(x), g_{X2}(x) > = \int_a^b f_{X1}(x) \overline{g_{X2}(x)}\, dx \qquad (3)$$

$$X(\varpi) < c - \frac{1}{k}$$

es un producto interno de f y g. Se puede verificar inmediatamente que (3) cumple las condiciones exigidas de un producto interno.

Definición 2. Sea (H;< , >) un espacio producto interno con la norma

$$\| \ \| = [<X_1,X_2>]^{1/2}$$

entonces (H,< , >) se llama espacio de variables aleatorias de Hilbert; el cual será denotado por $\mathscr{L}_2(\Omega,\mathcal{A},P)$

Definición 3. Sean $X_1, X_2, X_3, \ldots$.. una sucesión de variables aleatorias discretas dadas por :

$$X_n = \frac{k}{n} \quad , \quad si \quad \frac{k}{n} \le X_n < \frac{k+1}{n} \quad , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Si $E(X_n) > \infty$ para cierto n, existirá para todos los n, y, además, existe el límite

$$\lim_{n \to \infty} E(X_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} P\left(\frac{k}{n} \le X \le \frac{k+1}{n} \right)$$

este límite se llama esperanza matemática de la v.a. X.

Definición 4. Si $F_X(x)$ es una función de Distribución Acumulada de la variable aleatoria X, entonces

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_X(x) \quad , cuando \int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dF_X(x) < \infty$$

Ambas integrales son de stieltjes y se calculan como los límites de las sumas integrales.
Si existe la función de densidad $f_X(x)$, entonces

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) \, dx \quad , cuando \int |x| \, f_X(x) \, dx < \infty$$

CONVERGENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS EN ESPACIOS DE HILBERT

Definición 5. Un conjunto Γ de variables aleatorias con valores complejos, definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{A},P)$, con segundo momento finito $E(|X|^2) < \infty$ forma un espacio lineal normado de Hilbert $\mathscr{L}_2(\Omega,\mathcal{A},P)$ con el producto escalar

$$< X_1, X_2 > = E\left(X_1 \overline{X_2}\right)$$

y la norma
$$\|X_1\| = \left[E|X_1|^2\right]^{1/2}$$

Con la norma se determina la distancia entre las variables aleatorias de $\mathscr{L}_2(\Omega;\mathcal{A},P)$

$$d(X_1,X_2)=\|X_1-X_2\|$$

Las variables aleatorias X_1, X_2 de $\mathscr{L}_2(\Omega,\mathcal{A},P)$ se denominan variables aleatorias en un espacio de Hilbert.

La sucesión de variables aleatorias X_n, n = 1, 2, 3, ... , converge hacia la variable aleatoria X con probabilidad 1, si para la sucesión seleccionada $X_n(\omega)$, n = 1, 2, 3, ...

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\varpi)=X(\varpi) \tag{4}$$

y para cualquier resultado elemental ω, excepto de algunos resultados ω que tienen en su conjunto la probabilidad 0.

Teorema 3. Sea la sucesión $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de variables aleatorias en un espacio de Hilbert, se dice que esta sucesión converge en su media cuadrática hacia la variable aleatoria X con probabilidad 1, si

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|X_n-X\|^2<\infty$$

Demostración. Para cualquier $\varepsilon > 0$ en el suceso $A_n = \{\,|X_n(\omega)-X(\omega)| > \varepsilon\}$ y según la desigualdad de Chebishev se tiene que:

$$P(A_n)\leq\frac{\|X_n-X\|^2}{\varepsilon^2}$$

y en consecuencia

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\|X_n-X\|^2<\infty$$

Según el lema de Borel-Cantelli ocurre, con probabilidad 1, excepto solamente en un número finito de sucesos A_n, n = 1, 2, 3, ..., lo cual significa que

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\varpi)=X(\varpi)$$

con probabilidad 1.

La distancia en media cuadrática entre dos variables aleatorias en un espacio de Hilbert se define como la norma de la diferencia entre ellas, es decir

$$\|X_1 - X_2\| = \sqrt{E|X_1 - X_2|^2} \tag{5}$$

el cual es la distancia entre dos elementos en un espacio de Hilbert.

Esta distancia cumple la desigualdad triangular: para tres variables aleatorias X_1, X_2, X_3, $\in$ H, la distancia entre X_1 y X_2 no supera a la suma de las distancias entre X_1 y X_3, y X_2 y X_3, es decir

$$\|X_1 - X_2\| \leq \|X_1 - X_3\| + \|X_2 - X_3\| \tag{6}$$

El concepto de esperanza matemática se puede extender a variables aleatorias X que toman valores complejos:

$$X_j = X_{ja} + i\, X_{jb}$$

donde X_{ja} y X_{jb} son variables aleatorias reales. En este caso

$$E(X_j) = E(X_{ja}) + i\, E(X_{jb}) \tag{7}$$

Se puede demostrar que todas las propiedades de la esperanza matemática en R también se cumplen en el caso complejo.

En (7) se define el segundo momento como el valor de la media cuadrática.

La desigualdad de Cauchy-Bunjakovsky es dada por

$$E(|X_1 X_2|) \leq \sqrt{E(X_1^2)}\,\sqrt{E(X_2^2)}$$

para cualquier par de variables aleatorias complejas X_1, X_2 que tienen segundo momento finito.

Teorema 4. La sucesión de variables aleatorias complejas X_n, n = 1, 2, 3, ... en un espacio de Hilbert H converge en media cuadrática hacia la v.a. X si y sólo si

$$\lim_{n,m\to\infty} \|X_n - X_m\| = 0 \tag{8}$$

Demostración. La necesidad del límite (8) se deduce de la desigualdad triangular: si la sucesión X_n, n = 1, 2, 3, ..., converge en media cuadrática hacia la variable aleatoria X, entonces:

$$\|X_n - X_m\| \leq \|X_n - X\| + \|X_m - X\| \to 0 \qquad para \quad n, m \to \infty$$

La prueba de que para la condición (8) existe la variable aleatoria $X \in H$ tal que $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ es una aplicación de la teoría de la medida.

Observemos que la sucesión X_n , n = 1, 2, 3, ... que converge en media cuadrática hacia la variable aleatoria X, estas variables aleatorias complejas tienen esperanzas finitas y se verifica

$$E|X_n| \leq \sqrt{E(X_n^2)} < \infty$$

verificamos que

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X)$$

En efecto, como ya se indicó, la v.a. $X \in H$ tiene una esperanza matemática finita E(X) y también

$$|E(X_n) - E(X)| \leq E|X_n - X| \leq \sqrt{E|X_n - X|^2} \to 0$$

REFERENCIAS

1. Chumpitaz M. "Análisis Funcional", U.N.I. 1984.
2. Chumpitaz M. "Medida e integración" U.N.I. 1989
3. Edwards R. E. "Theory of Random Measures on Locally Compact Spaces" Acta Math. Vol. 89, p. 160, 1963.
4. Parzen E. "Teoría moderna de Probabilidades y sus aplicaciones" Limusa 1979.
5. Rudin W. "Análisis Real y Complejo", Editorial Alhambra 1979.