

CURTOSIS

Edith Seier R.¹

RESUMEN.- *En este artículo se revisa la literatura sobre curtosis desde el trabajo de Pearson a principios del siglo XX hasta la fecha. Se estudia la evolución del concepto y se comparan las diferentes formas de cuantificarla incluyendo gráficos que ayudan a ilustrar las ideas. Se discute la curtosis en el contexto de la bimodalidad y las dócimas de normalidad. Se incluyen simulaciones y comentarios producto de nuestro trabajo en el tema.*

PALABRAS CLAVE: *curtosis, colas pesadas, apuntamiento, normalidad*

KURTOSIS

ABSTRACT.- *This work reviews the literature on kurtosis from Pearson's definition in the early 1900's to our days. The evolution of the concept of kurtosis is described and the different ways of quantifying it are compared; graphs that help to understand the ideas are included. Kurtosis is also discussed in the context of bimodality and tests for normality. Simulation results and comments based on our work on the topic are included.*

KEYWORDS : *kurtosis, heavy tails, peakedness, normality.*

1. INTRODUCCIÓN

A comienzos del siglo XX, Karl Pearson utilizó por primera vez la palabra curtosis en el contexto estadístico al referirse a la forma de una distribución de frecuencias. Anteriormente, el término curtosis había sido utilizado para denotar curvatura en los ambientes matemático y médico. Por muchos años en libros introductorios de estadística era común mencionar las estadísticas de posición, dispersión, asimetría y apuntamiento o curtosis, utilizando para este último caso la medida de curtosis β_2 definida por Pearson. En las décadas siguientes

¹ Profesora Cesante de la UNMSM, Profesora Asociada en East Tennessee State University.
E-mail: seier@etsu.edu

2 CURTOSIS

aparecieron algunos artículos como aquellos de Dyson [1], Kaplansky [2], Finucan [3], Darlington [4], señalando algunas imprecisiones que a su juicio estaban presentes en libros de estadística respecto al concepto o interpretación de la curtosis. En textos más recientes el tema de la curtosis es frecuentemente omitido. Sin embargo, el concepto de curtosis como algo relacionado a las colas y apuntamiento de una distribución ha seguido siendo discutido en la literatura especializada y nuevas medidas de curtosis han sido definidas. Mas aún, el mismo hecho de medir la curtosis y representarla con un número ha sido cuestionado.

La importancia de la curtosis está en gran parte relacionada al hecho que, en la misma forma que la asimetría afecta la inferencia respecto a la media, alta curtosis afecta la inferencia respecto a medidas de dispersión y de correlación. Otra motivación para el estudio de la curtosis la constituyen las distribuciones con colas pesadas que ocurren en el mundo real.

A los casi 100 años de la introducción de la palabra curtosis al léxico estadístico queremos hacer un recuento del desarrollo de este concepto y la forma de cuantificarlo. En la sección siguiente, veremos que la idea de curtosis ha ido volviéndose más flexible con el tiempo y que el trabajo en curtosis se ha bifurcado. Luego se describen los criterios de ordenamiento de distribuciones que no expresan la curtosis con un número, sino determinan cuando una de dos distribuciones de probabilidad tiene menos curtosis que la otra; estos criterios se limitan a las distribuciones teóricas y no tienen a la fecha una extensión a las muestras y distribuciones empíricas.

Las formas de medir la curtosis que aparecen en la literatura se pueden agrupar básicamente en tres tipos: esperanza de cierto tipo de funciones de la variable estandarizada, medidas basadas en estadísticas de orden y medidas basadas en cuantiles. Esas diferentes medidas se presentan y comparan en las secciones 4-8. En las secciones 9 y 10, se discute la curtosis en el contexto de dósimas de normalidad. Finalmente, se comenta el punto controversial de la curtosis en el contexto de la bimodalidad y se esbozan algunas conclusiones.

2. QUE ES CURTOSIS?

En griego, 'kurtos' significa convexo y la palabra 'kurtosis' o 'cyrtosis' ha sido utilizada desde tiempos inmemoriales como vocablo médico para indicar curvatura anormal de extremidades u otras partes del cuerpo. El matemático Heron en el siglo I ya uso el vocablo 'kurtosis' en el sentido de curvatura. Pearson [5], comparando diferencias entre distribuciones de frecuencias y la distribución normal mencionó "dos distribuciones de frecuencia que tienen la misma desviación

estándar, pueden ser relativamente más o menos achatadas en la punta que la curva normal. Si son más achatadas, las llamó platicúrticas, si son menos achatadas leptocúrticas y si son igual de achatadas mesocúrticas". El artículo de Pearson apareció como respuesta a una revisión por parte de Ranke y Greiner de un trabajo anterior suyo, en el contexto de ajustar curvas a distribuciones de observaciones antropométricas y de características físicas de animales. Posteriormente, aparecieron varios artículos en la revista *Biometrika* escritos por Pearson y otros autores en que se calculaba la asimetría y curtosis de conjuntos de datos relativamente grandes como una forma de decidir si la curva normal proveía una buena representación de la distribución de la variable en cuestión. Dyson [1] y Finucan [3] encontraron una condición suficiente en términos de las funciones de densidad para que una distribución tuviera menor valor de la medida de curtosis de Pearson.

En 1964 W. Van Zwet [6] dió un vuelco al estudio de la curtosis definiendo un ordenamiento de las distribuciones con respecto a la curtosis en términos de la función de distribución y no de una medida. Mas aún, enfatizó que considera no conveniente resumir la curtosis de una distribución con un número. A partir de entonces, el trabajo en curtosis se ha desarrollado a lo largo de dos vertientes: la definición de criterios de ordenamiento de distribuciones basados en las funciones de distribución y la definición de medidas de curtosis para distribuciones, la mayoría de ellas con sus correspondientes estimadores basados en muestras. Obviamente, se espera que las medidas de curtosis que se definan respeten el ordenamiento de las distribuciones definido por los criterios basados en las funciones de distribución, en el sentido que si las funciones de distribución indican que F tiene más curtosis que G , una medida de curtosis para ser válida debe, además de ser invariante a cambios de escala, asignar un valor mayor de curtosis a F .

Balanda y MacGillivray [7] dan una definición bastante amplia de curtosis como el movimiento de masa, ajustada para la media y la dispersión, de los hombros de la distribución al centro y las colas y que se puede cuantificar de muchas maneras. Se ha discutido si la curtosis está asociada a la pesadez de las colas o el pico de la distribución. Ruppert [8] concluyó que debe ser una medida de ambas pues el apuntamiento y las colas están relacionadas, si se sustrae masa de los hombros de la distribución y no se quiere alterar la dispersión, esa masa va al pico o a las colas. Ya Finucan [3] advertía sobre el peligro de la sobre simplificación hecha en algunos libros de texto que reducían la curtosis a algo relacionado al pico de la distribución. Otra expresión utilizada para denotar pico prominente y colas pesadas en una distribución es 'falta de hombros'.

4 CURTOSIS

3. ORDENAMIENTOS DE DISTRIBUCIONES CON RESPECTO A LA CURTOSIS

Van Zwet [6] definió que dadas dos distribuciones de probabilidad simétricas con funciones de distribución F y G , F tiene menor curtosis que G si y sólo si $G^{-1}(F(x))$ es convexa para $x > mF$ donde mF es el punto de simetría común de ambas distribuciones. De acuerdo al criterio de Van Zwet; únicamente las distribuciones simétricas son comparables y sólo algunas pueden ordenarse. En la figura 1, la primera curva es convexa ilustrando que la distribución Normal tiene menos curtosis que la distribución Laplace. Por el contrario, las distribuciones t-student(6) y Laplace no son comparables en cuanto a curtosis porque la línea no es convexa en toda su extensión. El lector puede producir este tipo de curvas para comparar dos distribuciones teóricas utilizando cualquier programa estadístico que tenga incorporadas las respectivas función de distribución y función de distribución inversa.

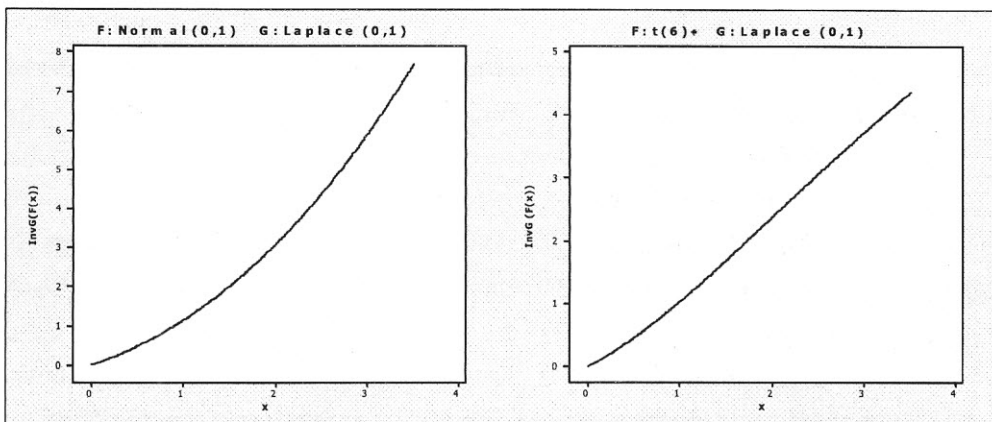


Figura 1. $G^{-1}(F(x), G: \text{Laplace}(0,1))$ a) $F: \text{Normal}(0,1)$ b) $F: \text{t-student}(6)$

Van Zwet [6] demostró que las siguientes distribuciones están ordenadas de acuerdo a curtosis ($<_s$ simboliza que la primera distribución tiene menos curtosis que la segunda) :

$$\text{Forma } -U <_s \text{ Uniforme } <_s \text{ Normal } <_s \text{ Logística } <_s \text{ Laplace.}$$

En adición a las 5 distribuciones anteriores, Groeneveld [9] proporciona una lista de familias de distribuciones simétricas que están ordenadas en curtosis dependiendo del valor del parámetro:

- Beta (α, α)
- Tukey (λ)

- $S_U(0, \delta)$ (Johnson no acotada)
- $f_k(x) = \frac{1}{2k\Gamma(k)} e^{-|x|^{1/k}}$ para $-\infty < x < \infty$ y $k > 0$. Las distribuciones normal y Laplace son casos especiales de esta familia.

Para las distribuciones Beta(α, α), Tukey(λ) ($\lambda > 2$) y la familia $f_k(x)$, $F(x) <_S G(x)$ si el parámetro de la distribución (α, λ o k según el caso) es menor para F que para G, i.e. a menor valor del parámetro menos curtosis. Para la distribución $S_U(0, \delta)$ y Tukey(λ) ($\lambda < 1$) sucede lo contrario, a menor valor del parámetro mayor es la curtosis.

Ordenamientos más débiles que el de Van Zwet han sido definidos por otros autores basados en otros criterios como la velocidad de cambio en la curva $G^{-1}(F(x))$ en lugar de imponer la condición de convexidad. Una descripción de los criterios de ordenamiento se puede encontrar en Oja [10] y Balanda y MacGillivray [7]. Balanda y MacGillivray [11] extendieron el criterio de Van Zwet a las distribuciones no necesariamente simétricas mediante la definición de la función dispersión y los gráficos de dispersión-dispersión. La función dispersión $S_H(\cdot)$ de una distribución H fue definida como,

$$S_H(u) = H^{-1}(0.5 + u) - H^{-1}(0.5 - u), \quad 0 < u < 1/2.$$

En la parte izquierda de la figura 2 aparece el gráfico de $S(u)$ para las distribuciones $\chi_{(2)}^2$ y Uniforme. Dadas dos funciones de distribución F y G, el gráfico dispersión-dispersión es $S_G S^{-1} F$. Según el criterio de Balanda y MacGillivray, dos distribuciones no necesariamente simétricas están ordenadas y $F <_S G$ si y sólo si $S_G S^{-1} F(s)$ es convexo para $s > 0$. El segundo gráfico de la figura 2 muestra que la distribución uniforme (simétrica) tiene menos curtosis que la distribución $\chi_{(2)}^2$ (asimétrica). Nótese que la función dispersión para la distribución uniforme es una línea recta que va de (0,0) a (0.5,1), por lo que la curva en el gráfico dispersión-dispersión es similar a la función de dispersión de la otra distribución.

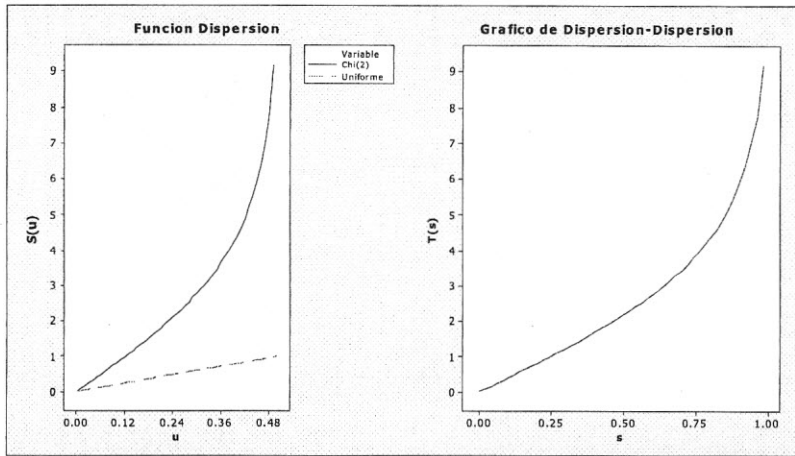


Figura 2. Función dispersión $S(u)$ para cada distribución y Gráfico de Dispersión-Dispersión. $T(s) = S_G S_F^{-1}(s)$, $G: \chi^2(2)$ y $F: \text{uniforme}$.

4. LA MEDIDA DE CURTOSIS β_2 DE PEARSON.

Pearson [5] introdujo los términos platicúrtica, mesocúrtica y leptocúrtica para referirse a curvas menos, igual o más achatadas que la curva normal curtosis, mencionando que el 'grado de achatamiento' es uno de los aspectos en que distribuciones de frecuencias tienden a diferir de la curva normal. Pearson [5] define $\beta_2 = \frac{E(x-u)^4}{[E(x-u)^2]^2}$, encuentra que $\beta_2 = 3$ para la distribución normal y denomina a $\beta_2 - 3$ 'grado de curtosis' (posteriormente llamado 'exceso' por otros autores) utilizándola como una medida de alejamiento con respecto a la distribución normal. También menciona que cuando la distribución de

x es normal el error muestral de $b_2 = \frac{\left[(1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 \right]}{\left[(1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^2}$ es $0.67449 \sqrt{24/n}$ y que si $b_2 - 3$ de una distribución de frecuencias difiere de 0 en más de 3 veces esa cantidad no se puede considerar que la distribución sea mesocúrtica y por lo tanto; se debería de usar otra curva diferente a la normal para representar la distribución.

En años subsiguientes aparecieron varios artículos y notas en Biometrika, escritos por Pearson u otros autores como Pearl, Tocher y Surface, calculando la

curtosis de grupos de datos relativamente grandes para decidir si la curva normal es apropiada para describir una distribución de frecuencias. Algunos ejemplos son: estatura de conscriptos ($n = 16203$) y reclutas ($n = 3810$) en Verona, Italia entre 1875 y 1879; dos indicadores de la severidad de ataques de viruela definidos como el número de días ya sea desde el comienzo de la enfermedad o la erupción hasta el primer baño del paciente ($n = 865$ y 826 respectivamente); largo y ancho de *Paramecium Chilomona* en condiciones favorable o no favorables, características antropométricas de internos de hospitales mentales en Escocia, fecundidad de cerdos evaluada por el tamaño de la camada, etc. En general los autores fueron estrictos al clasificar a una distribución como mesocúrtica y compararon la distancia entre la medida de curtosis con el margen de error dado por Pearson, el cual es generalmente pequeño debido a que las muestras son grandes.

En Balanda y McGillivray [7] se menciona la condición de Dyson-Finucan, también llamada de 'cruce de densidades' como una condición suficiente para que al comparar dos distribuciones se concluya que una tiene mayor o igual valor de β_2 que la otra. En el caso de dos distribuciones con media 0 y varianza común; la condición se traduce en que las funciones de densidad se cruzan dos veces a cada lado de $x = 0$. El resultado de Finucan [3] es para distribuciones simétricas con media cero y varianza común. Dyson [1] exige que la media de las dos distribuciones sea cero, que tengan la misma varianza y la misma asimetría (o simetría) pero no exige que los valores de x en las cuales las densidades se cruzan sean equidistantes de cero. Dyson [1], especifica que dadas dos funciones de densidad $f_1(x)$ y $f_2(x)$ correspondientes a distribuciones con media 0 y desviación estándar σ y 4 valores de x $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, si sucede que $f_1(x) \geq f_2(x)$ en los intervalos $(-\infty, a_1)$, (a_2, a_3) y (a_4, ∞) y además $f_1(x) \leq f_2(x)$ en los intervalos (a_1, a_2) y (a_3, a_4) entonces $\mu_{41} \geq \mu_{42}$ donde μ_4 es el cuarto momento con respecto a la media (el numerador en β_2).

Cuando queremos comparar dos distribuciones para ver si la condición de Dyson-Finucan se cumple, debemos recordar que la condición es suficiente pero no necesaria y que las distribuciones deben tener la misma varianza. También hay que recordar que los trabajos de Dyson [1] y Finucan [3] se publicaron antes del trabajo de Van Zwet [6] y por ello la idea de curtosis esta básicamente

8 CURTOSIS

restringida a β_2 ; no a la comparación de distribuciones en el sentido de Van Zwet. Hay que tener presente que β_2 es una cantidad que esta definida siempre que el cuarto y el segundo momento existan para la distribución aunque las distribuciones no estén ordenadas en el sentido de Van Zwet. Como ejemplo de que la condición es suficiente pero no necesaria, Dyson [1] proporciona una función de densidad que recuerda a la normal pero con términos adicionales en el exponente y cuyo gráfico cruza 4 veces a cada lado de x a la función de densidad normal. En la figura 3, se consideran 3 pares de distribuciones con media 0 y varianza común en cada par. La idea es comparar las distribuciones no sólo de acuerdo al criterio de Dyson-Finucan, sino también de acuerdo al criterio de Van Zwet descrito en la sección anterior.

El primer gráfico corresponde a distribuciones $N(0,2)$ y $Laplace(0,1)$ (ambas con media 0 y varianza 2); las funciones de densidad, satisfacen la condición Dyson-Finucan, en efecto $\beta_2 = 6$ para Laplace y $\beta_2 = 3$ para la Normal. Recordemos también que el criterio de Van Zwet establece que la distribución Normal tiene menos curtosis que la distribución Laplace.

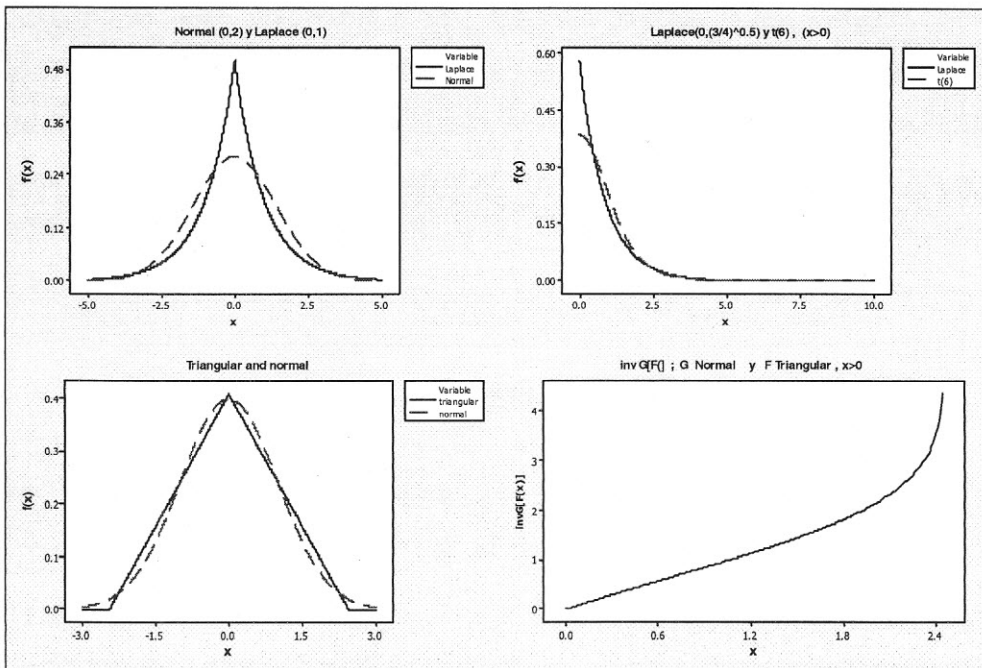


Figura 3. Gráficos para examinar la condición de Dyson - Finucan (Normal y Laplace, Laplace y $t(6)$ triangular y normal) y gráfico $G^{-1}F(x)$ para examinar la condición de Van Zwet (Triangular y Normal)

El gráfico superior derecho en la figura 3 corresponde a $f(x)$: Laplace $(0, \sqrt{3/4})$ y $g(x) : t_{(6)}$ ambas con varianza 1.5. Las funciones de densidad se cruzan más de dos veces a cada lado de $x = 0$; $f(x) > g(x)$ en los intervalos $(0, 0.46)$ y $(2.42, 7.29)$, $f(x) < g(x)$ en $(0.47, 2.41)$, y para $x \geq 7.30$. Por ello, no se podría asegurar nada acerca del valor de β_2 en base únicamente al gráfico de las funciones de densidad; sin embargo, para ambas distribuciones $\beta_2 = 6$. Es decir, β_2 asigna el mismo valor a las dos distribuciones pero estas distribuciones no son comparables en términos de curtosis de acuerdo al criterio de Van Zwet (ver Figura 1.b).

Los gráficos en la parte inferior de la figura 3 corresponden a la distribuciones Triangular y Normal. Estas distribuciones no están ordenadas en cuanto a curtosis de acuerdo al criterio de VanZwet, dado que $G^{-1}F(x)$ no es convexa para $0 < x < 0.65$. La condición de Dyson-Finucan no se cumple pues las funciones de densidad se cruzan 3 veces a cada lado de $x = 0$; por ello; no podríamos asegurar nada en cuanto a su relación en términos de β_2 basándonos únicamente en la comparación de sus funciones de densidad. Sin embargo, como el segundo y cuarto momento existen para esas distribuciones, β_2 se puede calcular y $\beta_2 = 2.4 < 3$ para la distribución Triangular.

Aún cuando β_2 fue inmediatamente aceptada por los usuarios e incorporada a los textos de estadística; al parecer se cometieron algunas imprecisiones y sobre simplificaciones en algunos de ellos. Kaplansky [2] señala que un error común es pensar que si $f(x)$ toma un valor mayor que $g(x)$ en una vecindad de $x = 0$ entonces f tiene un valor más alto de β_2 . Kaplansky proporcionó cuatro ejemplos de funciones de densidad con media 0 y varianza 1 para mostrar que el valor $f(0)$ puede ser menor o mayor que $1/\sqrt{2\pi} = 0.399$ el valor para la distribución normal; para distribuciones con β_2 menor o mayor que 3. Las cuatro funciones de densidad dadas por Kaplansky están graficadas en la figura 4, cada una superpuesta con la distribución normal. Para las 2 en la primera fila $\beta_2 < 3$ y para las dos en la segunda fila $\beta_2 > 3$; $P(0)$ y $Q(0)$ son mayores que $1/\sqrt{2\pi}$, $Q(0)$ y $S(0)$ son menores que $1/\sqrt{2\pi}$. Cuando Kaplansky en 1945 desarrolló estas funciones de densidad, la curtosis estaba circunscrita a β_2 por lo que sentimos curiosidad de examinar esas cuatro funciones de densidad usando el criterio de Van Zwet [6] y también el criterio de Dyson-Finucan el cual sí está ligado a β_2 .

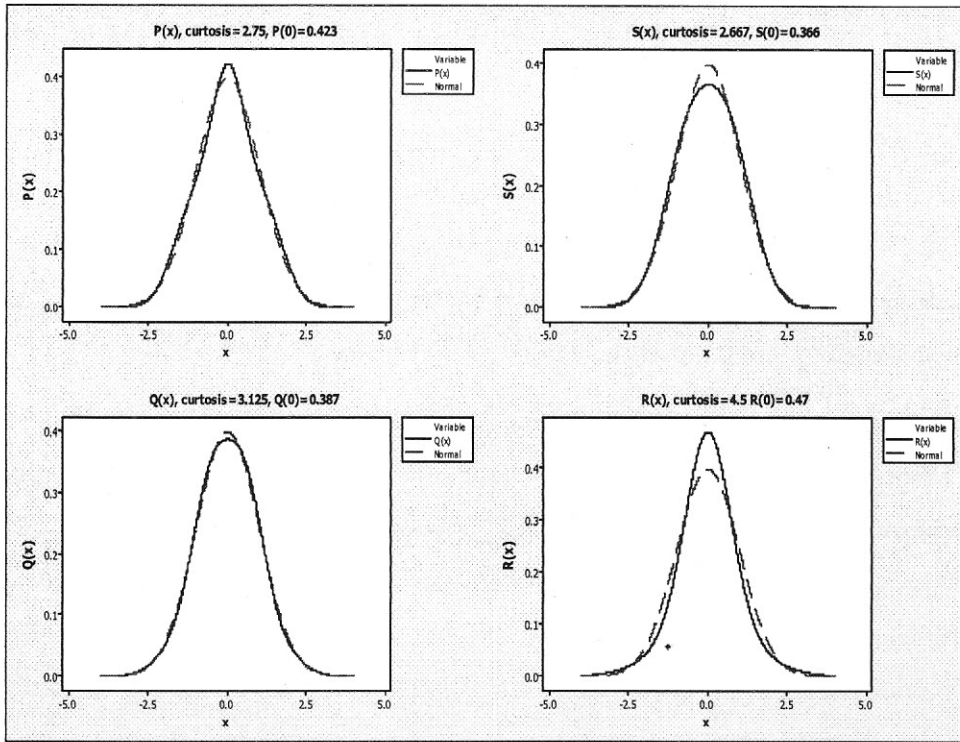


Figura 4. Ejemplos de funciones de densidad de Kaplanski

Es interesante observar que las dos funciones de densidad en la primera columna – que son las que tienen un valor $f(0)$ que algunos pueden considerar inesperado de acuerdo a su valor de β_2 ($f(0) > 0.399$ cuando $\beta_2 < 3$ y $f(0) < 0.399$ cuando $\beta_2 > 3$)– no satisfacen la condición de Finucan-Dyson para asegurar que $\beta_2 < 3$ o $\beta_2 > 3$; pues la curva de densidad se cruza con la normal más de dos veces a cada lado del cero. Las dos distribuciones en la segunda columna (para las cuales $f(0) > 0.399$ cuando $\beta_2 > 3$ y $f(0) < 0.399$ cuando $\beta_2 < 3$) si satisfacen la condición de Finucan-Dyson. Con un gráfico no incluido en este artículo, comprobamos, que $P(x)$ para la cual $\beta_2 < 3$ y $f(0) > 1/\sqrt{2\pi}$; no esta ordenada con respecto a la distribución normal de acuerdo al criterio Van Zwet pues $F^{-1}(P(x))$ (F función de distribución Normal y P función de distribución de $P(x)$) no es convexa para $x > 0$.

Varios autores han hecho criticas a la estadística de curtosis β_2 de Pearson pero esta sigue siendo la más conocida y utilizada. Dodge y Rousson [12] opinan que parte de los problemas y controversias que se presentan al estudiar la forma de una distribución incluyendo el cuarto momento puede deberse a las

complicaciones matemáticas que los momentos de orden superior (empezando del cuarto) tienen; mientras que para los tres primeros se obtienen expresiones simples y de fácil interpretación. Mencionan como ejemplo el hecho que los 3 primeros cumulantes son iguales a momentos: $k_1 = u$, $k_2 = u_2$, $k_3 = u_3$ pero $k_4 = u_4 - 3u_2^2$ ($u = E(x)$, $u_1 = E(x - u)^1$, k_r es el coeficiente de $(it)^r / r!$ en la expansión en series de potencia de $\ln(\phi(t))$; donde $\phi(t) = E[e^{itx}]$ es la función característica de la distribución. Otras propiedades como obtener estimadores simples insesgados; o que para variables independientes, el momento de la suma es la suma de los momentos, sólo se cumple hasta el tercer momento. Lindsay y Basak [13] muestran que las funciones de densidad de dos distribuciones con muchos momentos en común (incluyendo el cuarto momento en que se basa β_2) pueden ser diferentes, por un amplio margen, en la parte central de la distribución. Balandra y MacGillivray mencionan que distribuciones de apariencia muy diferente, como la normal, Tukey y la doble-gamma, tienen el mismo valor de β_2 . Esto se conoce como 'el efecto promedio' y es comprensible desde el punto de vista que β_2 es una esperanza y por lo tanto; valores bajos en un intervalo se compensan con valores altos en otro.

El estimador muestral $\hat{\beta}_2$ es seriamente sesgado cuando la distribución tiene alta curtosis y la muestra es pequeña. Byers [14] demostró que para una muestra de tamaño n , el máximo valor que $\hat{\beta}_2$ puede tomar es $n - 2 + 1/(n - 1)$. Para la distribución lognormal, por ejemplo, $\beta_2 = 113.9$ pero si se toman muestras de tamaño 20 o 50, $\hat{\beta}_2$ puede tomar como máximo los valores 18 y 48 respectivamente. La versión ajustada del estimador del coeficiente de exceso

$$\left[\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \right] \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 / s^4 \right] - \left[\frac{3(n-1)(n-1)}{(n-2)(n-3)} \right]$$

elimina el sesgo cuando las muestras vienen de la distribución normal pero no en general.

Las medidas de curtosis y asimetría β_2 y β_1 están fuertemente relacionadas, lo cual es comprensible pues ambas otorgan gran importancia a las colas de la distribución. Wilkins [15] demostró que el valor de β_2 está acotado inferiormente por la medida de asimetría; $\beta_2 \geq \beta_1^2 + 1$.

12 CURTOSIS

Blest [16] descompuso β_2 en dos partes, una asociada al cuarto momento (α_4^*) y otra que contiene términos de menor orden e incluye el efecto de la asimetría (β_1).

$$\alpha_4^* = \beta_2 - 3 \left[(1 + f^2)^2 - 1 \right]$$

donde

$$f = (a + b)^{1/3} - (a - b)^{1/3}; \quad a = \sqrt{(1/4)\beta_1^2 - 1} \quad \text{y} \quad b = (1/2)\beta_1.$$

Obviamente para distribuciones simétricas $\beta_1 = 0$ y $\alpha_4^* = \beta_2$. Blest [16] reporta el valor de α_4^* para 16 distribuciones; en su mayoría log-normales y Beta con diferentes valores para los parámetros. Para este artículo, hemos calculado α_4^* para diversas distribuciones asimétricas utilizando la fórmula de Blest; los valores aparecen en la Tabla 2 de la sección 8.

5. OTRAS MEDIDAS DE CURTOSIS DE LA FORMA $E(g(z))$

Stavig [17] definió la estadística robusta de curtosis como $1 - \sum_{i=1}^n |z_i|/n$.

Rescribiendo β_2 como $E[z^4]$; donde $z = (x - \mu)/\sigma$, y considerando la medida de Stavig, en el caso de distribuciones, como $E[1 - |z|]$, se puede pensar en estas medidas de curtosis como la esperanza de una función de la variable estandarizada z . Seier y Bonett [18] propusieron integrar las medidas de Pearson y Stavig bajo una notación común $E[g(z)]$ donde $g(z)$ es una función simétrica, que es monótona y lineal o convexa a cada lado de $z = 0$, explorar la relación entre el gráfico de $g(z)$ y las propiedades de la medida de curtosis y definir otras medidas de curtosis mediante la definición de otras funciones $g(z)$. En particular, dos funciones $g(z)$ fueron planteadas por Seier y Bonett :

$$g(z) = ab^{-|z|}, \quad 2 \leq b \leq 20 \quad \text{y} \quad g(z) = a[1 - |z|^b], \quad 0.2 \leq b \leq 1,$$

definiendo así dos nuevas familias de medidas de la forma $E[g(z)]$. En ambas funciones el valor de b determina la forma de la función $g(z)$ y las propiedades de la medida $E[g(z)]$; el valor del parámetro de escala 'a' se elige de modo que la medida de curtosis tome el valor 3 para la distribución normal. Para la primera familia

$$E[g(z)] = 2ae^{(\ln b)^2/2} [1 - F(\ln b)]$$

y para la segunda,

$$E[g(z)] = a \left[1 - (1/\sqrt{\pi}) \Gamma((b+1)/2) 2^{b/2} \right].$$

En el caso de la distribución normal; estas expresiones permiten encontrar el valor de a para cada valor de b .

En la figura 5, los gráficos de la parte superior presentan $g(z)$ para las medidas de Pearson [5] y Stavig [17], los de la parte inferior corresponden a $g(z)$ de las familias definidas por Seier y Bonett [18] para valores extremos de los parámetros.

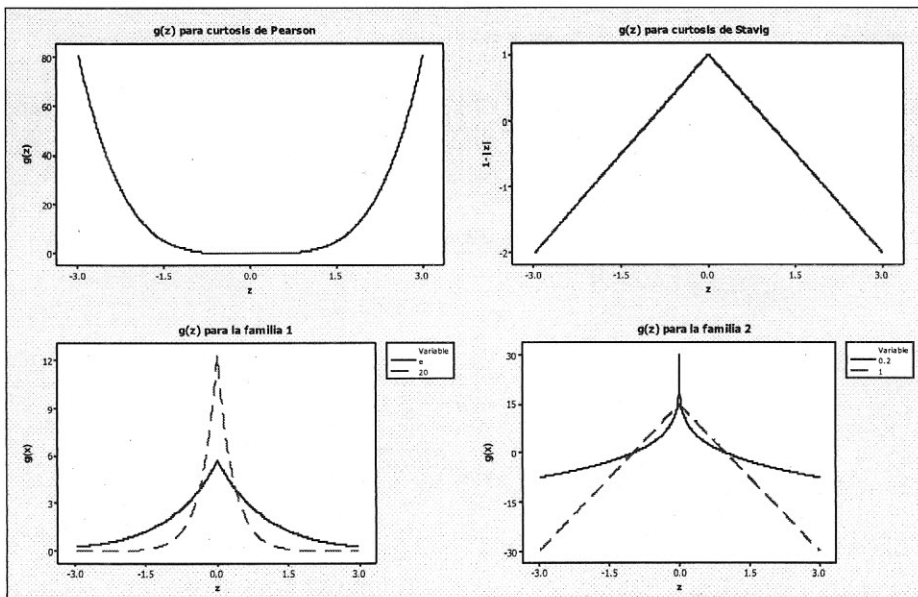


Figura 5. $g(z)$ para varias medidas del tipo $E[g(z)]$

14 CURTOSIS

Los gráficos de $g(z)$ permiten percibir que β_2 da importancia a los valores de z lejos del 0; las otras medidas dan más importancia a los valores cerca de 0, es decir al centro de la distribución. Por ello, es de esperar que β_2 sea más sensible a las colas de la distribución y éste más correlacionada con la medida de asimetría que también le da importancia a las colas. Para explorar ese hecho simulamos 5000 muestras de tamaño 30 de la distribución $\chi_{(2)}^2$ y calculamos $\hat{\beta}_2$, la curtosis de Stavig $1 - (1/n) \sum_{i=1}^n |z_i|$, $k_1 = (1/n) \sum_{i=1}^n 5.7344e^{-|z_i|}$, las tres estadísticas aparecen graficadas versus la estadística de asimetría b_1 en la Figura 6. La correlación lineal (r) es 0.965, 0.938 y 0.89 respectivamente; sin embargo la correlación es casi 0 cuando las muestras se toman de la distribución normal. También puede observarse que la distribución empírica de $\hat{\beta}_2$ es más asimétrica y el sesgo del estimador es mayor. Para $\chi_{(2)}^2$, $\beta_2 = 9$ y $K_1 = E[5.7344e^{-|z|}] = 3.1693$; para las 1000 muestras la medida de $\hat{\beta}_2$ es 4.84 y la medida de k_1 es 3.1 por lo que el sesgo relativo empírico es de 46% y 2.1%, respectivamente.

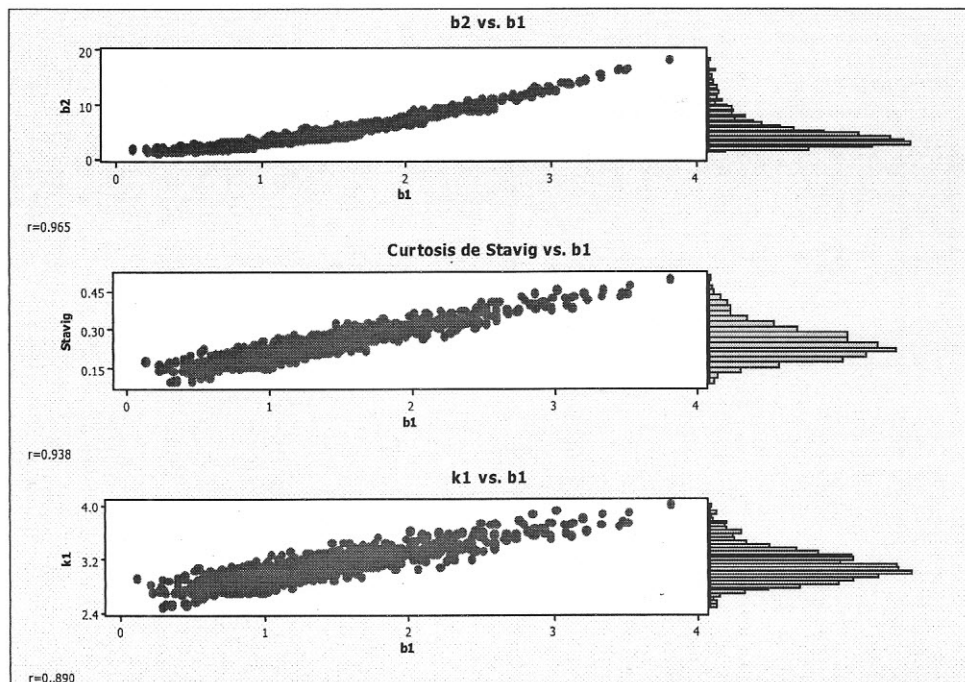


Figura 6. Estadísticas de asimetría b_1 y curtosis para 1000 muestras de la distribución $\chi_{(2)}^2$

6. MEDIDAS DE CURTOSIS EN BASE A CUANTILES

Varias medidas de curtosis han sido definidas en base a cuantiles. Moors [19] definió una medida basada en los octiles $[(E_7 - E_5) + (E_3 - E_1)] / (E_6 - E_2)$, que toma el valor 1 para la distribución uniforme y 1.237 para la distribución normal. Una amplia lista de medidas basadas en cuantiles se puede encontrar en Balanda y MacGillivray [7]. La más reciente de estas medidas de kurtosis es la propuesta por Groeneveld [9]; restringida a las distribuciones simétricas con media 0 utilizando la función de distribución inversa

$$\gamma_2(p) = \frac{F^{-1}(1 - (p/2)) + F^{-1}((1 + p)/2) - 2F^{-1}(.75)}{F^{-1}(-(p/2)) - F^{-1}((1 + p)/2)}, \quad 0 < p < 0.5$$

A nivel de distribuciones teóricas $\gamma_2(p)$ evita algunos de los problemas que presenta β_2 .

A la fecha no se ha definido una extensión de la medida de Groeneveld para distribuciones no simétricas ni una estadística a nivel muestral.

7. L-CURTOSIS

Hosking [20] definió L-curtosis como el cociente del cuarto y segundo L-momentos, que son esperanzas de combinaciones lineales de valores esperados de la estadística de orden i -ésima $X_{i:n}$ en una muestra de tamaño n .

$$\tau_4 = L_4/L_2, \quad L_4 = \left(\frac{1}{4}\right) E[X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4}] \quad \text{y} \quad L_2 = \left(\frac{1}{2}\right) E[X_{2:2} - X_{2:1}]$$

Para calcular la versión muestral de L-curtosis existen expresiones en función de las estadísticas de orden de la muestra. L-curtosis es utilizada ampliamente en el área de hidrología pero a la fecha no ha sido incorporada a la mayoría de los textos de estadística en general. Se le utiliza principalmente para identificar la distribución apropiada para modelar el comportamiento de variables como precipitación pluvial, descarga de ríos, temperaturas. Teuscher y Guiard [21] encontraron que también L-curtosis (τ_4) tiene una cota inferior determinada por L-asimetría (τ_3); $0.25(5\tau_3^2 - 1) \leq \tau_4 < 1$. Wang [22] definió una versión más general de los L-momentos, a la que llamó LH momentos, con la finalidad de modelar eventos extremos.

8. CORRELACIÓN ENTRE LAS DIFERENTES MEDIDAS DE CURTOSIS.

Si todas las medidas de curtosis intentan medir lo mismo, lo natural sería que coincidieran en su caracterización de las distribuciones. Para aquellas distribuciones que están ordenadas con respecto a curtosis de acuerdo al criterio de Van Zwet, las diferentes medidas coinciden en el ordenamiento de las mismas, no necesariamente en la relativa separación entre ellas en términos de curtosis. Para las distribuciones que no están ordenadas de acuerdo al criterio de Van Zwet, la forma en que las diferentes medidas de curtosis ordenan las distribuciones puede diferir. Las Tablas 1 y 2 contienen los valores de las medidas de curtosis provenientes de varias fuentes y de nuestros propios cálculos para una serie de distribuciones simétricas y asimétricas respectivamente. En la Tabla 1 los valores de β_2 aparecen en Gan y Koehler [23], $\gamma_2(0.05)$ en Groeneveld [9], L-curtosis en Hosking [24]; $K_1 = E[5.7344 \exp(-|z|)]$ y $K_2 = E[14.843(1 - |z|)]$ son miembros de las familias de medidas definidas por Seier y Bonett [18]. K_2 es además un múltiplo de la curtosis robusta de Stavig.

Tabla 1. Valores de varias medidas de curtosis para distribuciones simétricas

Distribución ²	β_2	$\gamma_2(0.05)$	L	K_1	K_2
N(0,1)*	3.00	0.355	0.123	3.000	3.000
SU(0,3)**	3.53	0.395	0.143	3.058	3.230
t(10)	4.00	0.413	0.154	3.089	3.364
Logística*	4.20	0.440	0.167	3.126	3.498
SU(0,2)**	4.51	0.439	0.168	3.134	3.540
ScCon (0.05, 3)	7.65	0.403	0.176	3.179	3.833
t(4)	-	0.503	0.217	3.320	4.348
Laplace*	6.00	0.564	0.236	3.360	4.347
ScCon (0.1, 3)	8.33	0.463	0.212	3.284	4.250
ScCon (0.05, 5)	20.00	0.437	0.249	3.483	5.261
ScCon (0.2, 3)	7.54	0.574	0.249	3.382	4.560
SU(0,1)**	36.20	0.611	0.293	3.587	5.491
ScCon (0.05, 7)	31.40	0.459	0.313	3.738	6.493
SU(0, 0.9)**	82.10	0.649	0.329	3.738	6.128
t(2)	-	0.648	0.375	-	-
ScCon (0.1, 5)	16.50	0.597	0.315	3.665	5.851
ScCon (0.1, 7)	21.50	0.708	0.394	3.957	6.975
ScCon (0.2, 5)	11.20	0.735	0.363	3.765	5.991
Tukey (10)	5.38	0.857	0.396	3.954	6.100
ScCon (0.2, 7)	12.80	0.808	0.437	4.014	6.840
t(1)	-	0.854	-	-	-

Sería de esperar que los valores que toman las medidas estén fuertemente correlacionados, sin embargo, no sucede así. Las mayores discrepancias suceden para las distribuciones que no están ordenadas de acuerdo al criterio de Van

¹ Las distribuciones marcadas con * o ** son las que pertenecen a dos grupos de distribuciones que están ordenadas de acuerdo al criterio de Van Zwet.

Zwet, especialmente la distribución normal contaminada. Las correlaciones entre los valores en la Tabla 1 son:

	β_2	γ_2	L-curtosis	K_1
γ_2	0.244			
L-curtosis	0.389	0.917		
K_1	0.438	0.879	0.992	
K_2	0.515	0.797	0.966	0.985

β_2 muestra una correlación muy baja con las otras medidas. Por otro lado, es sorprendente la alta correlación entre L-curtosis (Hosking, [24]) y K_1 (Seier y Bonett [18]), ya que ambas medidas se calculan en forma muy diferente. La figura 7 corresponde a los valores de la tabla 1. Un detalle que llama la atención en dicha figura y que sirve para ilustrar las diferencias en sensibilidad de las diferentes medidas es el siguiente. Compárese las distancias en términos de curtosis que las tres medidas (β_2 , L y K_1) tácitamente asignan entre la distribución no acotada de Johnson $SU(0, \delta)$ con parámetros $\delta = 0.9$ y $\delta = 1$; con la distancia entre la distribución normal y la Laplace. Para L y K_1 parece haber ligeramente más diferencia entre la normal y Laplace que entre las dos $SU(0, \delta)$. En cambio para β_2 la diferencia entre las dos $SU(0, \delta)$ es impresionantemente mayor (54.1 vs 3) que la diferencia entre las otras dos distribuciones.

Autores que definen nuevas medidas de curtosis suelen utilizar la correlación con la potencia del test de Shapiro-Wilk ($n = 20$) como validación. La idea es que tratándose de distribuciones simétricas, la razón para rechazar la hipótesis de normalidad reside en la curtosis y por ello la curtosis y la potencia del test estén relacionadas. Las correlaciones de la potencia (reportada en Gan y Koehler, [23]) para las distribuciones y medidas en la Tabla 1 aparecen a continuación. La baja correlación con β_2 se explica por casos como el discutido en el párrafo anterior respecto a las distribuciones Normal, Laplace y $SU(0, \delta)$

β_2	γ_2	L-curtosis	K_1	K_2
0.305	0.943	0.974	0.974	0.927

18 CURTOSIS

La tabla 2 contiene los valores de varias medidas de curtosis para un conjunto de distribuciones asimétricas. Los valores de β_2 aparecieron en Gan y Koehler [23] y los de L-curtosis en Hosking [24], α_4^* es una de las componentes de β_2 y los valores fueron calculados usando la fórmula de Blest [16].

Tabla 2. Valores de diferentes medidas de curtosis para distribuciones asimétricas

Distribución	β_2	α_4^*	L-curtosis	K_1
Beta (2, 1)	2.40	2.1847	0.048	2.8299
TrunN(-2, 1)	2.27	2.2019	0.061	2.8369
Beta(3, 2)	2.36	2.3040	0.070	2.8742
TrunN(-3, 1)	2.78	2.5794	0.084	2.9172
TrunN(-3, 2)	2.65	2.6284	0.102	3.0709
Weibull(4)	2.75	2.7446	0.110	2.9662
Weibull(3, 6)	2.72	2.7200	0.108	2.9609
SB(0.53333, . 5)	2.13	1.8505	0.003	2.7296
SB(1, 1)	2.91	2.5581	0.083	2.9110
SB(1, 2)	2.77	2.7178	0.104	2.9557
Weibull(2, 2)	3.04	2.8674	0.104	2.9595
Weibull(2)	3.25	2.9873	0.105	2.9661
HalfN(0, 1)	3.78	3.1630	0.097	2.9607
LoConN(.2, 3)	3.09	2.7843	0.134	3.4031
LoConN(.2, 5)	3.16	2.4117	0.151	3.5804
LoConN(.2, 7)	3.20	2.1855	0.162	3.6341
LoConN(.1, 3)	4.02	3.5982	0.174	3.4456
LoConN(.1, 5)	5.45	3.9286	0.245	3.7841
LoConN(.1, 7)	6.60	4.1841	0.296	3.9826
LoConN(.05, 3)	4.35	4.0443	0.169	3.3411
LoConN(.05, 5)	7.44	5.7022	0.241	3.7075
LoConN(.05, 7)	10.40	6.8039	0.299	3.9843
SU(1, 1)	93.40	78.3371	0.293	3.5998
SU(1, 2)	5.59	5.0921	0.168	3.1319
TrianII(1)	2.40	2.1847	0.048	2.8299
Gumbel(0, 1)	5.40	4.5527	0.150	3.0931
Chi (4)	6.00	4.7175	0.142	3.0809
Exp	9.00	6.4895	0.167	3.1644
Chi(1)	15.00	10.1909	0.227	3.3300
Lognor	113.90	94.7584	0.293	3.6303
Wei (. 5)	87.70	66.2057	0.398	3.8425

La correlación entre esos valores es

	β_2	L	K_1
L	0.659		
K_1	0.430	0.903	
α_4^*	0.999	0.634	0.409

Se observa que también para distribuciones asimétricas los valores de L-curtosis y K_1 están fuertemente correlacionados.

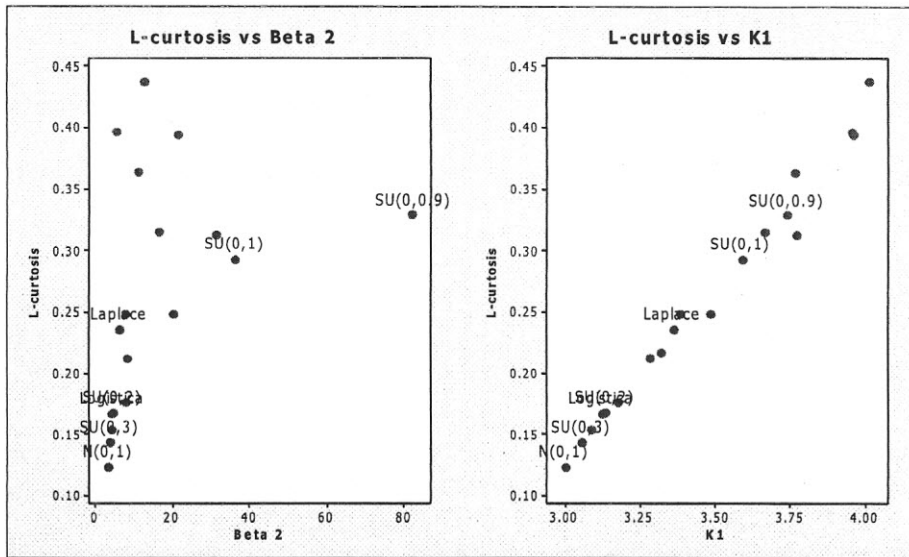


Figura 7. β_2 , L-curtosis y $K_1 = E(5.7344e^{-|z|})$ para un conjunto de distribuciones simétricas

9. LA DÓCIMA DE GEARY Y LA G-CURTOSIS

Geary [25] propuso el uso de la razón $\hat{\tau}/\hat{\sigma}$, donde $\hat{\tau} = (1/n) \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$, como una dócima de normalidad, en el caso de distribuciones simétricas. Para la distribución normal $(\tau/\sigma) = \sqrt{2/\pi} = 0.7979$ y para distribuciones leptocúrticas $(\hat{\tau}/\hat{\sigma}) < 0.7979$. A pesar de lo cuidadoso del trabajo de Geary en derivar las propiedades de $\hat{\tau}/\hat{\sigma}$ bajo la hipótesis de normalidad el uso de esta dócima no se extendió. Bonett y Seier [26] propusieron una transformación de la estadística de Geary a la que llamaron g-curtosis $\hat{\omega} = 13.29(\ln \hat{\sigma} - \ln \hat{\tau})$. Para la distribución normal $\omega = 13.29(\ln \sigma - \ln \tau) = 3$ y para las distribuciones leptocúrticas $\omega > 3$. La estadística $z = (n+2)^{1/2} (\hat{\omega} - 3)/3.54$ puede ser utilizada en el caso de distribuciones simétricas para contrastar la hipótesis de normalidad contra la alternativa de no-normalidad (o la alternativa de leptocurtosis) utilizando los valores críticos de la distribución normal. Esta dócima es más potente que la basada en $\hat{\beta}_2$ para distribuciones leptocúrticas pero menos potente para distribuciones platicúrticas por lo que Bonett y Seier [26] proponen combinar las dos cuando la alternativa es bilateral.

10. CURTOSIS Y DÓCIMAS DE NORMALIDAD

El desarrollo de β_2 a comienzos del siglo XX estuvo centrado alrededor de la comparación de distribuciones empíricas de frecuencia con la distribución normal. Sin embargo, otros métodos para docimar la hipótesis de normalidad no basadas en simetría y curtosis han sido definidos posteriormente. Actualmente, los métodos llamados de regresión basados en la relación lineal $z = \mu + \sigma x$ entre una variable $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ con la variable $z \sim N(0, 1)$, como la dócima de Shapiro-Wilk, son considerados los más potentes en promedio frente a una gama amplia de distribuciones alternativas. Sin embargo, hay algunas distribuciones alternativas específicas contra las cuales las dócimas basadas en curtosis tienen potencia ligeramente más alta que las dócimas basadas en regresión. Spiegelhalter [27] demostró que la estadística de curtosis de Pearson constituye una dócima asintóticamente óptima contra las distribuciones t-student. En simulaciones que hemos realizado comprobamos que dócimas definidas con otras estadísticas de curtosis también tienen un buen desempeño para docimar la hipótesis de normalidad cuando la distribución verdadera es una t-student. Bajgier and Aggarwal [28] señalan que las dócimas basadas en $\hat{\beta}_2$ son más potentes que otras para detectar mezclas de distribuciones normales, algo que hemos podido comprobar en nuestras propias simulaciones. En Seier [29] se puede encontrar resultados de simulaciones para la potencia de 9 diferentes métodos para docimar normalidad y una descripción de los mismos. La tabla 3 resume los resultados de esas simulaciones comparando la potencia promedio de dos métodos basados en regresión S - W (versión original de Shapiro-Wilk [31], para $n \leq 50$), S - Ch (Chen y Shapiro, [30]) y dos métodos basados en estadísticas de asimetría y curtosis K (basado en β_2 , D'Agostino et. al. [32]) G (basado en g-curtosis, Bonett y Seier, [26]). El número de distribuciones de cada tipo incluidas en las simulaciones aparece entre paréntesis.

Tabla 3. Potencia empírica promedio de cuatro dójimas de normalidad para varios tipos de distribuciones para muestras pequeñas, moderadas y grandes

n	S-W	S-Ch	k	G	n	S-W	S-Ch	k	G
Simétricas bimodales (3)					Normales contaminadas con $\sigma > 3$ (9)				
20	0.48	0.50	0.34	0.20	20	0.50	0.49	0.52	0.52
50	0.97	0.95	0.94	0.69	50	0.72	0.75	0.74	0.78
100	—	1.00	1.00	0.96	100	*	0.89	0.91	0.90
Simétricas de colas cortas(6)					Asimétricas unimodale, baja curtosis (10)				
20	0.11	0.13	0.08	0.04	20	0.23	0.23	0.12	0.09
50	0.55	0.49	0.52	0.22	50	0.48	0.47	0.29	0.31
100	—	0.87	0.89	0.55	100	*	0.63	0.54	0.53
Simétricas con curtosis ligeramente > 3 (4)					Asimétricas mezclas de normales, curtosis moderada (8)				
20	0.11	0.10	0.14	0.12	20	0.60	0.60	0.43	0.50
50	0.11	0.15	0.21	0.20	50	0.80	0.81	0.61	0.78
100	—	0.22	0.29	0.29	100	*	0.93	0.71	0.91
Simétricas con altas curtosis (9)					Asimétricas con altas curtosis (9)				
20	0.47	0.46	0.47	0.51	20	0.69	0.69	0.66	0.59
50	0.66	0.71	0.70	0.78	50	0.87	0.88	0.83	0.85
100	—	0.88	0.87	0.92	100	*	0.95	0.90	0.95
Normales contaminadas con $\sigma < 3$ (3)									
20	0.09	0.08	0.09	0.11					
50	0.09	0.11	0.11	0.20					
100	*	0.18	0.12	0.33					

El lector puede juzgar por si mismo la ventaja de cada método dependiendo del tipo de distribución y el tamaño de muestra. El método propuesto en Chen y Shapiro [30] tiene una mayor potencia promedio si se considera todas las distribuciones. Para algunos tipos de distribuciones el uso de la curtosis tiene ligeramente mayor potencia. La ventaja de los métodos llamados de regresión a nuestro parecer, reside en el hecho que la comparación se hace observación por observación y luego la estadística de la dójima resume la comparación. En las dójimas basadas en asimetría y curtosis, primero se resume las características de las distribución empírica y luego se compara con los valores que corresponden a la distribución normal. Si comparamos las dójimas G y K, basadas en diferentes estadísticas de curtosis, cabe señalar que G es mucho más sencilla de calcular; el cálculo de K incluye complicadas transformaciones debido a la marcada asimetría de la distribución muestral de $\hat{\beta}_2$ aun bajo la hipótesis de normalidad. La sensibilidad de G y K a diferentes formas de no-normalidad se explica por la importancia que las respectivas medidas dan a las colas o el centro de la distribución. Dójimas

basadas en las medidas alternativas $E[g(z)]$ mencionadas en la sección 5, tienen un comportamiento similar a la basada en g-curtosis. Aunque se apliquen las dójimas de normalidad, denominadas de regresión, es recomendable que el p-valor de esas dójimas se acompañe por un gráfico de probabilidad y estadísticas de asimetría y curtosis para completar el diagnóstico.

11. CURTOSIS Y BIMODALIDAD

Bimodalidad es una característica interesante pues indica que la población puede ser mezcla de dos sub-poblaciones que difieren en el valor esperado de la variable. Una pregunta que ha originado controversia es: ¿Deben las medidas de curtosis identificar la bimodalidad? Es decir, ¿deben las distribuciones bimodales tener una curtosis menor que el valor de la curtosis de las distribuciones uniforme normal?. Es tentador pensar que distribuciones que tienen una hendidura en lugar del levantamiento central de las distribuciones unimodales deberían tener menos curtosis que estas. Por un lado, están los autores que han encontrado contra ejemplos viendo como una deficiencia de β_2 el no poder detectar la bimodalidad en esos casos y por otro están los autores, como Moors [33], que opinan que una medida de curtosis no tiene porque detectar bimodalidad. Darlington [4] sugirió que $\beta_2 - 3$ se considere una medida de bimodalidad. Hildebrandt [34] utilizó la distribución 'doble gamma' o 'gamma de dos colas'

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{2\Gamma(\alpha)} |x|^{\alpha-1} e^{-\beta|x|} ; -\infty < x < \infty \quad (\text{si } \beta = \sqrt{\alpha(\alpha+1)} \text{ la varianza es 1})$$

como contra ejemplo a la conclusión de Darlington. La distribución es bimodal cuando $\alpha > 1$, sin embargo, $\beta_2 > 3$ para $1 < \alpha < 2.3$, $E[ab^{-|z|}]$ es más sensible a lo que sucede en el centro de la distribución y toma valores menores que 3; mientras que $\beta_2 > 3$, excepto por un rango de valores del parámetro α para los que la hendidura central del gráfico de $f(x)$ es muy delgada.

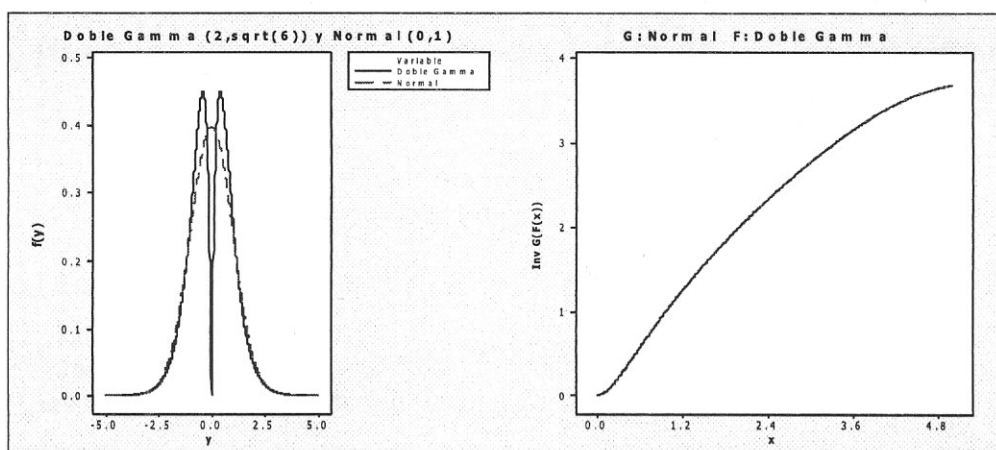


Figura 8. Funciones de densidad $f(x)$: Doble Gamma y $g(x)$: Normal y $G^{-1}[F(x)]$

Probablemente la posición menos riesgosa sea asumir que no porque una distribución es bimodal una medida de curtosis tenga que tomar valor menor para ella que para la distribución normal o la distribución uniforme. El criterio de Van Zwet u otro criterio de ordenamiento basado en la función de distribución puede ser aplicado y en caso que, de acuerdo a este criterio, una distribución tenga menos curtosis que la otra, recién se esperará que la medida de curtosis esté de acuerdo con este ordenamiento. La figura 8, muestra la función de densidad de la distribución Doble Gamma con parámetros 2 y $\sqrt{6}$ superpuesta a la densidad de la distribución normal. El gráfico de $G^{-1} F(x)$ indica que de acuerdo al criterio de Van Zwet esas distribuciones no están ordenadas en cuanto a curtosis puesto que la línea no es convexa (ni cóncava) en toda su extensión cuando $x > 0$.

12. CONCLUSIONES

El concepto y la medición de la curtosis pueden ser más complejos y las opciones al respecto menos concluyentes de lo que se puede imaginar al ver únicamente la definición de β_2 en los libros de texto. La primera referencia a curtosis en la literatura estadística se refiere al achatamiento o achatamiento de una distribución con relación a la distribución normal. Actualmente, se considera que la curtosis refleja no sólo la masa en la parte central de la distribución sino también en las colas de la misma y existen formas alternativas para comparar una distribución con la distribución normal. Hay objeciones a medir la curtosis y representarla con un número; y por otro lado hay propuestas de usar otras medidas diferentes a β_2 .

A lo largo de los años ha habido, varias interpretaciones controversiales de la idea de curtosis y la forma más común de medirla. Por lo general, los contraejemplos que se dan en esas situaciones se refieren a pares de distribuciones que desde el punto de vista del criterio de Van Zwet no están ordenadas en cuanto a curtosis. Una posición que se podría adoptar es:

- En cuanto al concepto de curtosis utilizar la definición amplia de Balanda y McGillivray.
- Al tratar con distribuciones teóricas, de existir conflictos en la representatividad de la curtosis entre medidas alternativas; se podría intentar dirimir sólo cuando las distribuciones son ordenables en términos del criterio de Van Zwet u otro criterio.
- En la práctica, al tratar con datos y distribuciones empíricas (para las cuales no existe a la fecha una extensión de los criterios de ordenamiento como el de Van Zwet) puede ser mejor calcular más de una estadística de curtosis debido a que cada una tiende a ser más sensible que otras a lo que sucede en la parte central o las colas de la distribución.
- Debido a las complicaciones ya enumeradas es de esperar que, a pesar de tratarse de un tema muy antiguo, sigan apareciendo en el futuro nuevos trabajos en el área.

13. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Dyson, F.J. *A note on Kurtosis*. Journal of the Royal Statistical Society, Vol 106 pag. 360-361 (1943).
- [2] Kaplansky, I. *A Common Error Concerning Kurtosis*. Journal of the Amer. Stat. Assoc. Vol 40 pag. 259 (1945).
- [3] Finucan, H. M. *A note on Kurtosis*. Journal of the Royal Statistical Society, Series B. Vol. 26 pag. 111-112 (1964).
- [4] Darlington, R. *Is Kurtosis really "Peakedness"?* The American Statistician, Vol 24 # 2, pag. 19-22 (1970).
- [5] Pearson, K. *Skew Variation, a Rejoinder*. Biometrika Vol. 4 pag. 169-212 (1905).
- [6] Van Zwet, W.R. *Convex Transformations of Random Variables*. Mathematics Centre Tract 7, Mathematisch Centrum Amsterdam, Amsterdam (1964).

- [7] Balanda, K.P. & MacGillivray, H.L. *Kurtosis: A Critical Review*. American Statistician, Vol. 42 pag. 111-119 (1988).
- [8] Ruppert, D. *What is Kurtosis? An Influence Function Approach*. A. Stat. Vol. 41 pag. 1-5 (1987).
- [9] Groeneveld, R.A. *A Class of quantile measures for kurtosis*. The American Statistician Vol 52 pag. 325-329 (1998).
- [10] Oja, H. *On Location, Scale, Skewness and Kurtosis of Univariate Distributions*. Scandinavian Journal of Statistics Vol 8 pag. 154-168 (1981).
- [11] Balanda K. P. y MacGillivray, H.L. *Kurtosis and Spread*. Canadian Journal of Statistics, Vol 18 pag. 17-30 (1990).
- [12] Dodge, Y. y Rousson, V. *The Complications of the Fourth Central Moment*. American Statistician Vol 53 pag. 267-269 (1999).
- [13] Lindsay, B.G. y Basak, P. *Moments Determine the Tail of a Distribution (But Not Much Else)*. The American Statistician Vol 54 pag. 248-251 (2000).
- [14] Byers, R. H. *On the Maximum of the Standardized Fourth Moment*. Interstat, January 2000 # 2 pag. 1-7 (2000).
- [15] Wilkins, J.E. *A note on skewness and kurtosis*. Annals of Math. Stat. Vol 15 pag. 333-335 (1944).
- [16] Blest, C. D. *A New Measure of Kurtosis Adjusted for Skewness*. Austr.& New Zealand Journal of Stat. Vol 4 pag. 175-179.
- [17] Stavig, G. R. *A Robust Measure of Kurtosis*. Perceptual and Motor Skills Vol 55 pag. 666 (1982).
- [18] Seier, E. y Bonett, D. G. *Two families of kurtosis measures*. Metrika Vol 58 pag. 59-70 (2003).
- [19] Moors, J. J. A. *A Quantile Alternative for Kurtosis*. The Statistician. Vol 37 pag. 25-32 (1988).
- [20] Hosking, J.R.M. *L-moments: Analysis and Estimation of Distributions using Linear Combinations of Order Statistics*. Journal of the Royal Statistical Society Serie B, Vol 52 pag. 105-124 (1990).
- [21] Teuscher, F. Y Guiard, V. *Sharp Inequalities between Skewness and Kurtosis for Unimodal Distributions*. Statistics and Probability Letters, Vol 22 pag. 257-260 (1995).
- [22] Wang, Q, J. *LH moments for statistical analysis of extreme events*. Water Resources Research Vol 33 pag. 2841-2848 (1997).
- [23] Gan, F. F., y Koehler, K. J. *Goodness - of - Fit Tests Based on P-P Probability Plots*. Technometrics Vol 32 pag. 289-303 (1990).
- [24] Hosking, J.R.M. *Moments or L Moments? An Example Comparing Two Measures of Distributional Shape*, The American Statistician Vol 41 pag. 186-189 (1992).
- [25] Geary, R.C. *Moments of the ratio of the mean deviation to the standard deviation for normal samples*. Biometrika, Vol 28, pag. 295-307 (1936) .

- [26] Bonett, D.G. y Seier, E. *A test of normality with high uniform power*. Computational Statistics and Data Analysis, Vol 40 pag. 435-445 (2002).
- [27] Spielgehalter, D. J. *Diagnostic test of distributional shape*. Biometrika 70, pag. 401-408 (1983).
- [28] Bajgier, S. M, y Aggarwal L.K. *Powers of Goodness-of-Fit Tests in Detecting Balanced Mixed Normal Distributions*. Education and Psychological Measurement, Vol 51 pag. 253-269 (1991).
- [29] Seier, E. *Comparison of Tests of Univariate Normality*. Interstat. January # 1 pag. 1-17 (2002).
- [30] Chen, L. y Shapiro, S. *An Alternative test for normality based on normalized spacings*. Journal of Statistical Computation and Simulation Vol 53 pag. 269-287 (1995).
- [31] Shapiro, S. y Wilk, M.B. *An analysis of variance test for normality*. Biometrika Vol 52 pag. 591-611 (1965).
- [32] D'Agostino, R.B., Belanger, A. y D'Agostino, R.B. Jr *A suggestion for using powerful and informative tests of normality*. American Statistician Vol 44 pag. 316-321 (1990).
- [33] Moors, J.J.A. *The Meaning of Kurtosis: Darlington Reexamined*. The American Statistician, Vol 40 pag. 283-284 (1986).
- [34] Hildebrand, D. K. *Kurtosis Measures Bimodality?* The American Statistician, Vol. 25 pag.42-43 (1971).
- [35] Baloglou, Giorgos. Comunicación personal.
- [36] Groeneveld, R.A. y Meeden, G. *Measuring Skewness and Kurtosis*. The Statistician Vol 33 pag. 391-399 (1984).