PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. VI, N° 1, pag. 21 - 31, LIMA-PERÚ. Julio 2003

EXISTENCIA GLOBAL Y DECAIMIENTO DE LA ENERGÍA DE UNA ECUACIÓN DE KIRCHOFF CON DISIPACIÓN LOCALIZADA

Eugenio Cabanillas L., Zacarias Huaringa y Juan Bernui B[1].

RESUMEN.- *En este trabajo estudiamos la existencia y unicidad de la solución global de la ecuación de Kirchoff*

$$u'' - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)\Delta u + a(x)u' = 0$$

Con una disipación au' y demostraremos el decaimiento exponencial de su energía.

1. INTRODUCCIÓN

Sea Ω un dominio acotado de R^N con frontera regular Γ. Fijemos $x_0 \in R^N$. Sea $a = a(x) \in L^\infty(\Omega)$ una función acotada no negativa tal que

$$a(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{e.s} \quad \text{en} \quad \omega.$$

Donde ω es una vecindad de Γ_0,

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : (x - x_0)\cdot \nu(x) > 0\}$$

$\nu(x)$ es el vector exterior normal unitario en $x \in \Gamma$ y a_0 es una constante positiva. Por una vecindad de Ω, entenderemos a la intersección de Ω y una vecindad de Γ_0.

En el presente trabajo estamos interesados en demostrar la existencia y unicidad de la solución global, así como el comportamiento asintótico de la energía del problema:

$$(*)\quad \left|\begin{array}{lll} u'' - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u + a(x)u' = 0 & \text{en} & Q = \Omega \times]0,\infty[\\ u = 0 & \text{en} & \Sigma = \Gamma \times]0,\infty[\\ u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1 & \text{en} & \Omega \end{array}\right.$$

[1] Universidad Nacional Mayor de San Marcos - Facultad de Ciencias Matemáticas - Instituto de Investigación.

cuando $a(x)$ es efectiva en el subconjunto ω de Ω.

El caso $M(x)=1$ ha sido estudiado por muchos autores: M. Nakao [9], P. Martínez [7]. E. Cabanillas - J. Bernui - Z. Huaringa [1], L.R. Tcheougue[10], E. ZuaZua [12]. Ecuaciones del Tipo Kirchoff–Carrier con disipaciones en la frontera fueron vistas por: I. Lasieccka & J. Ong [5], M. Milla Miranda & L.P. San, Gil Jutuca [8], y otros.

2. PRELIMINARES

Los espacios que usaremos son los usuales y omitiremos su definición.
Denotemos lo siguiente:

$$(u,v)=\int_{\Omega} u(x)v(x)dx \quad , \quad |u|^2=\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx$$

$$u'=\tfrac{\partial u}{\partial t} \quad , \quad R=\max_{x\in\Omega}\|x-x_0\|$$

Las hipótesis sobre M son:

H.1) $\quad M\in C^1([0,\infty[),\ M(\lambda)\geq m_0>0,\ \forall\lambda\geq 0$

H.2) $\quad M^1(\lambda)\geq 0$

La hipótesis sobre los datos son:

H.3) $\quad u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\ ,\ u_1\in H_0^1(\Omega)$

Ahora podemos establecer nuestro resultado principal.

Teorema 2.1 *Bajo las hipótesis (H.1) - (H.3), el problema (*) posee una única solución u tal que:*

$$u\in L^\infty\left(0,\infty;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right) \tag{2.1}$$

$$u'\in L^\infty\left(0,\infty;H_0^1(\Omega)\right) \tag{2.2}$$

$$u''\in L^\infty\left(0,\infty;L^2(\Omega)\right) \tag{2.3}$$

Definiendo la energía asociada al sistema (*) como

$$E(t)=\tfrac{1}{2}|u'(t)|^2+\tfrac{1}{2}\widehat{M}\left(|\nabla u(t)|^2\right) \tag{2.4}$$

donde $\hat{M}(\lambda)=\int_0^\lambda M(s)ds$; existen constantes positivas C_0 y γ tales que:

$$E(t) \le C_0 e^{-\gamma t}, \quad \forall t \ge 0 \tag{2.5}$$

Para obtener (2.5) usamos el siguiente,

Lema 2.2 *(Haraux [3]). Sea* $E : [0,\infty[\to [0,\infty[$ *una función no creciente localmente absolutamente continua, tal que, existen constantes positivas* β *y* A *con ,*

$$\int_S^\infty E(t)^{\beta+1}\, dt \le A E(S) \ , \ \forall\, S > 0 .$$

Entonces

$$E(t) \le \begin{cases} E(0) e^{1-\frac{t}{A}}, \ \forall\, t \ge 0 \ , & \text{si } \beta = 0 \\ \left[A\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^{\frac{1}{\beta}} t^{\frac{1}{\beta}} \ , & \text{si } \beta > 0 \end{cases}$$

3. LA ECUACIÓN LINEALIZADA

En esta sección estudiaremos la existencia y unicidad de la solución global del sistema linealizado:

$$\begin{vmatrix} u'' - \alpha(t)\Delta u + a(x) u' = 0 & \text{en} & \Omega \times]0,\infty[\\ u = 0 & \text{en} & \Gamma \times]0,\infty[\\ u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1 & \text{en} & \Omega \end{vmatrix} \tag{3.1}$$

donde u_0 y u_1 satisfacen (H.3), siendo:

$$\alpha \in C(0,T), \ \alpha' \in L^\infty(0,T), \ \alpha(t) \ge m_0 > 0, \ \forall t \in [0,T] \tag{3.2}$$

Teorema 3.1 *Bajo las hipótesis (H.3) y (3.2) el sistema (3.1) admite una única solución* u *tal que:*

$$u \in L^\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \tag{3.3}$$

$$u' \in L^\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right) \tag{3.4}$$

$$u'' \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right) \tag{3.5}$$

Demostración.- *Se demuestra usando una base* $\{\omega_\gamma\}_{\gamma \ge 1}$ *de* $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, *considerando el subespacio* $V_m = [\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m]$, $m \in \mathbb{N}$ *y se determina*

$$u_m(t) = \sum_{j=1} g_{jm}(t)\omega_j$$

solución del problema de Cauchy

$$\left| \begin{array}{l} \left(u''_m(t), v\right) + \alpha(t)\left(\nabla u_m(t), \nabla v\right) + \left(au'_m(t), v\right) = 0 \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \quad \text{en } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ u'_m(0) = u_{1m} \to u_1 \quad \text{en } H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{3.6}$$

Por la teoria de las E.D.O. se prueba que existe una solución local a (3.6) en algún intervalo $[0, T_m]$. Esta solución será extendida por medio de estimativas a priori.

Estimativa a priori I.- Se hace $v = u'_m(t)$ en (3.6) y se obtiene

$$\left|u'_m(t)\right|^2 + \alpha(0)\left|\nabla u_m(t)\right|^2 + 2\int_0^t \int_\Omega \left|a^{1/2} u'_m(s)\right|^2 dxds \leq \tag{3.7}$$

$$\leq \left(\left|u'(0)\right|^2 + \alpha(0)\left|\nabla v(0)\right|^2\right) \exp\left(2\int_0^t \frac{|\alpha'(s)|}{\alpha(s)} ds\right), 0 \leq t \leq T$$

Estimativa a priori II.- Primero se acota $\left|u''(0)\right|$ considerando $t = 0$ en (3.6) y $v = u''_m(0)$:

$$\left|u''_m(0)\right| \leq \alpha(0)\left|\Delta u(0)\right| + |a|_\infty \left|u'(0)\right| \tag{3.8}$$

Ahora derivando (3.6) respecto a t y considerando $v = u''_m(t)$ resulta:

$$\left|u''_m(t)\right|^2 + \alpha(t)\left|\nabla u'_m(t)\right|^2 + \tfrac{3}{2}\int_0^t \int_\Omega \left|a^{\frac{1}{2}} u''_m(s)\right|^2 dxds \leq \tag{3.9}$$

$$\leq I_0(t) \exp\left(2\int_0^t \frac{\left|\alpha'(s)\right|}{\alpha(s)} ds\right)$$

donde $I_0(t) = \left(\alpha(0)\left|\Delta u(0)\right| + |a|_\infty \left|u'(0)\right|\right)^2 + \alpha(0)\left|\nabla u(0)\right|^2 +$

$$+\left[\frac{|\alpha'|_\infty}{m_0}\left(\left|u'(0)\right|^2 + \alpha(0)\left|\nabla u(0)\right|^2\right)\right]^2 \exp\left(2\int_0^t \frac{\left|\alpha'(s)\right|}{\alpha(s)} ds\right)$$

Estimativa a priori III.- En (3.6) haciendo $v = \Delta u_m(t)$ resulta:

$$\left|\Delta u_m(t)\right| \leq \frac{|\alpha|_\infty}{m_0}\left(\left|u'(0)\right|^2 + \alpha(0)\left|\nabla u(0)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\int_0^t \frac{|\alpha'(s)|}{\alpha(s)}\, ds\right) + \tag{3.10}$$

$$+ \frac{I_0(t)^{\frac{1}{2}}}{m_0} \exp\left(\int_0^t \frac{|\alpha'(s)|}{\alpha(s)}\, ds\right)$$

De las estimativas I, II y III, existe una subsucesión, denotada por $(u_m)_{m\geq 1}$, de $(u_m)_{m\geq 1}$ tal que

$$u_m \to u \text{ débil } * \text{ en } L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \tag{3.11}$$

$$u_m' \to u' \text{ débil } * \text{ en } L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \tag{3.12}$$

$$u_m'' \to u'' \text{ débil } * \text{ en } L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \tag{3.13}$$

De (3.12) y (3.13) $u_m' \to u'$ fuerte en $L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$, lo que implica:

$$a u_m' \to a u' \text{ débil } * \text{ en } L^\alpha\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \tag{3.14}$$

Las convergencias (3.11) - (3.14) permiten pasar al límite en (3.6).

No es difícil verificar la unicidad.

4. SOLUCIONES LOCALES Y GLOBALES

En esta sección probaremos que el problema (*) posee una solución en algún intervalo $[0, T_m]$ haciendo uso del teorema del punto fijo. Más aún mostramos que esta solución es única.

Para $T > 0$ y $R > 0$ definimos el espacio de soluciones como

$$X_{T,R} = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right), u \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C\left(0, T, L^2(\Omega)\right), \\ \left|u\right|^2_{L^\infty\left(0,T,H_0^1 \cap H^2\right)} + \left|u'\right|^2_{L^\infty\left(0,T,H_0^1\right)} \leq R^2, \text{ en } [0,T],\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1 \end{array} \right\}$$

Es fácil verificar que $X_{T,R}$ con la métrica

$$d(u, v) = \left|u - v\right|^2_{L^\infty\left(0,T,H_0^1\right)} + \left|u' - v'\right|^2_{C\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}$$

es un espacio métrico completo.

Definimos una aplicación no líneal S de la siguiente manera.

Para $\mathbf{v} \in X_{T,R}$, $u = S\mathbf{v}$ es la única solución de la ecuación líneal.

$$\left| \begin{array}{lll} u'' - M\left(\left|\nabla \mathrm{v}(t)\right|^2\right)\Delta u + a(x)u' = 0 & \text{en} & Q = \Omega \times]0,\infty[\\ u = 0 & \text{en} & \Sigma = \Gamma \times]0,\infty[\\ u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1 & \text{en} & \Omega \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Mostramos que existe $T > 0$ y $R > 0$ tal que $S\left(X_{T,R}\right) \subseteq X_{T,R}$

Sea $\alpha(t) = M\left(\left|\nabla \mathbf{v}(t)\right|^2\right)$ y $\kappa = \max\left\{M^1(\lambda), 0 \le \lambda \le R^2\right\}$

entonces:

$$\left|\alpha'(t)\right| \le M^1\left(\left|\nabla \mathbf{v}(t)\right|^2\right)\left|2\left(\nabla \mathbf{v}(t), \nabla \mathbf{v}'(t)\right)\right| \le \kappa R^2 \tag{4.2}$$

ahora de (3.9) y (3.11)

$$\left|\nabla u'(t)\right|^2 \le \tfrac{1}{m_0} I_0(t) \exp\left(2\int_0^t \tfrac{|\alpha'(s)|}{\alpha(s)}\, ds\right) \tag{4.3}$$

$$\left|\Delta u(t)\right|^2 \le \tfrac{2}{m_0^2}\left[\left|a\right|_\infty^2\left(\left|u'(0)\right|^2 + \alpha(0)\left|\nabla u(0)\right|^2\right) + I_0(t)\right] \cdot \exp\left(2\int_0^t \tfrac{|\alpha'(s)|}{\alpha(s)}\, ds\right) \tag{4.4}$$

De (4.2), (4.3) y (4.4), podemos seleccionar $T_0 \le T$ de modo que:

$$\left|\nabla u'(t)\right|^2 + \left|\Delta u(t)\right|^2 \le R^2 \ , \ \forall\, t \in \left[0, T_0\right] \tag{4.5}$$

También conseguimos demostrar que S es una contracción estricta:

$$d\left(Su_1, Su_2\right) \le \theta\, d\left(u_1, u_2\right) \ , \ 0 < \theta < 1 \tag{4.6}$$

para algún T_0 suficientemente pequeño.

Eligiendo T_0 que satisfaga (4.5) y (4.6) simultaneamente; deducimos que S tiene un único punto fijo u. Esta función es justamente la solución buscada.

A fin de exterder la solución u a todo el intervalo $[0,\infty[$, consideramos la ecuación linealizada:

$$\left|\begin{array}{lll} z''-\alpha(t)z-a(x)z'=0 & \text{en} & Q=\Omega\times\,]0,\infty[\\ z=0 & \text{en} & \Sigma=\Gamma\times\,]0,\infty[\\ z(0)=u_0, \qquad z'(0)=u_1 & \text{en} & \Omega \end{array}\right. \tag{4.7}$$

Con $\alpha(t)=M\left(\left|\nabla u(t)\right|^2\right), t\in[0,T_0]$ donde u es la solución obtenida mediante el método del punto fijo.

Como $u\in X_{T_{0,R}}$ se sigue que α sastiface las condiciones del Teorema 3.1 y asi:

$$z\in C_\omega\left(0,T_0,H_0^1\cap H^2\right)\cap C_\omega^1\left(0,T_0,H_0^1(\Omega)\right)\cap C_\omega^2\left(0,T_0,L^2(\Omega)\right). \tag{4.8}$$

Como u es solución de (4.7) y este problema tiene unicidad entonces $z=u$, por lo que u sastiface (4.8).

El lema de Zorn nos permite concluir que (*) posee una única solución maximal $u:\,]0,T_0[\,\rightarrow H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ con la regularidad (4.8).

El siguiente lema es decisivo en la demostración del teorema.

Lema 4.1 *Sea u solución de (*) en $[0,T_m[$. Si*

$$\limsup_{t\to T_m}\left[\left|\Delta u(t)\right|^2+\left|\nabla u'(t)\right|^2\right]<+\infty \quad \textit{entonces} \quad T_m=+\infty.$$

Demostración.- Ver [11] .

Con este lema estamos habilitados para extender la solución de (*) al intervalo $[0,+\infty[$, lo que concluye la prueba de la existencia global de la solución u de (*).

5. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA ENERGÍA

Verifiquemos primero que (*) es un problema disipativo.

Lema 5.1

$$\forall\, 0\le S<T<\infty: E(t)-E(S)=-\int_S^T\int_\Omega a(u')^2\,dxdt \tag{5.1}$$

Demostración.- Basta multiplicar por u' la ecuación $(*)$ e integrar por partes en $\Omega\times[S,T]$.

Lema 5.2 Sea $q\in\left[W^{1,\infty}(\Omega)\right]^N$, $\alpha\in R$ y $\xi\in W^{1,\infty}(\Omega)$. Se verifican las siguientes identidades:

$$\int_S^T\int_\Omega M\left(\left|\nabla u(t)\right|^2\right)q\cdot\nu\left|\tfrac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma\, dt=\left(u,2q\cdot\nabla u+\alpha u\right)\Big|_S^T+ \tag{5.2}$$

$$+\int_S^T\int_\Omega\left[\left[(div\, q-\alpha)\left[\left|u'\right|^2-M\left(\left|\nabla u(t)\right|^2\right)\left|\nabla u(t)\right|^2\right]dxdt+\right.\right.$$

$$+2\int_S^T\int_\Omega M\left(\left|\nabla u(t)\right|^2\right)\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_i}dxdt+$$

$$+\int_S^T\int_\Omega au'(2q\cdot\nabla u+\alpha u)dxdt$$

$$(u',\xi u)\Big|_S^T+\int_S^T\int_\Omega\xi\left[M\left(|\nabla u|^2\right)|\nabla u|^2-|u'|^2\right]dxdt+ \tag{5.3}$$

$$+\int_S^T\int_\Omega M\left(|\nabla u|^2\right)(\nabla u,\nabla\xi)dxdt+\int_S^T\int_\Omega au'\xi udxdt=0$$

La demostración del Lema 5.2 se basa en técnicas conocidas de multiplicadores. El lector interesado puede leer Lions [6] ó Komornik [4].

Para probar procedemos en dos etapas.

Etapa 1.- Aplicamos (5.2) con $q(x)=m(x)$, $\alpha=N-1$ obtenemos

$$\int_S^T\int_\Omega\left[\left|\nabla u\right|^2+M\left(|\nabla u|^2\right)-|\nabla u|^2\right]dxdt=\int_S^T\int_\Gamma M|\nabla u|^2 m.\nu\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2- \tag{5.4}$$

$$-\left(u',2m\cdot\nabla u+(N-1)u\right)\Big|_S^T-\int_S^T\int_\Omega au'\left[2m\nabla u+(N-1)u\right]dxdt$$

Observemos que como $u\in L^\infty\left(0,\Gamma,H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right)$:

$$m_0\le M\left(\left|\nabla u(t)\right|^2\right)\le m_1\quad,\quad\forall t\ge0 \tag{5.5}$$

por lo que:

$$m_0\left|\nabla u(t)\right|^2\le\widehat{M}\left(\left|\nabla u(t)\right|^2\right)\le\tfrac{m_1}{m_0}M\left(\left|\nabla u(t)\right|^2\right)\left|\nabla u(t)\right|^2,\forall t\ge0. \tag{5.6}$$

Denotemos con

$$E_0(t)=\frac{1}{2}\left|u'(t)\right|^2+\frac{1}{2}M\left(\left|\nabla u'(t)\right|^2\right)\left|\nabla u(t)\right|^2$$

Luego existen constantes positivas C_0 y C_1 tales que:

$$C_0E(t)\leq E_0(t)\leq C_1E(t) \tag{5.7}$$

En lo que sigue de este trabajo todas las constantes positivas serán denotadas con C y cambiarán de línea en línea.

Acotando convenientemente en (5.4) obtenemos

$$\int_S^T E_0(t)\leq CE_0(S)+m,\ R\int_S^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt \tag{5.8}$$

Etapa 2.- Para estimar el último término en (5.8) usamos (5.3) con $\xi=\eta$ donde $\eta\in W^{1,\infty}(\Omega)$ es una función tal que:

$$\left|\begin{array}{l} 0\leq\eta\leq 1 \\ \eta=1 \quad \text{en} \quad \widehat{\omega} \quad ; \quad \frac{|\nabla\eta|^2}{\eta}\in L^\infty(\omega) \\ \eta=0 \quad \text{en} \quad \dfrac{\Omega}{\omega} \end{array}\right.$$

y $\hat{\omega}$ es un conjunto abierto en Ω con $\Gamma_0\subseteq\hat{\omega}\not\subseteq\omega$, y así obtenemos la acotación.

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_S^T\int_\Omega \eta\left|\nabla u\right|^2 dxdt \quad &\leq C\left[E_0(S)+\int_S^T\int_\omega \left|u'\right|^2+\left|u\right|^2 dxdt\right]+ \\ &+\varepsilon\int_S^T E_0(t)\,dt,\quad \varepsilon>0.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Ahora tomamos un vector $h\in\left[W^{1,\infty}(\Omega)\right]^N$ tal que,

$$h=\nu \quad \text{en} \quad T_0 \ ,\ h\cdot\nu\geq 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \quad \text{y} \quad h=0 \quad \text{en} \quad \Omega\backslash\widehat{\omega}\,.$$

Elegimos $\alpha=0$ y $q=h$ en (5.2) y obtenemos el estimado:

$$\int_S^T \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \leq C \left[E_0(S) + \int_S^T \int_\omega \left[|u'|^2 + |u|^2 \right] dxdt \right] \tag{5.10}$$
$$+ \delta \int_S^T E_0(t) dt, \quad \delta > 0$$

Combinando (5.9) y (5.10)

$$\int_S^T \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \leq C \left[E_0(S) + \int_S^T \int_\omega \left[|u'|^2 + |u|^2 \right] dxdt \right] + \tag{5.11}$$
$$+ \varepsilon \int_S^T E_0(t) dt, \quad \varepsilon > 0$$

Luego de (5.7), (5.8) y (5.11)

$$\int_S^T E_0(t) dt \leq C \left[E_0(S) + \int_S^T \int_\omega \left[|u'|^2 + |u|^2 \right] dxdt \right] \tag{5.12}$$

Para absorver el último término en (5.12) adaptamos un método introducido por Conrad - Rao [2], considerando $z(t) \in H_0^1(\Omega)$ solución de:

$$\left| \begin{array}{lll} -\Delta z = \chi(\omega) u & \text{en} & \Omega \\ z = 0 & \text{en} & \Gamma \end{array} \right.$$

Multiplicando la ecuación en (*) por z e integrando por partes en $\Omega \times]S,T[$ y acotando obtenemos

$$\int_S^T \int_\omega |u|^2 \, dxdt \leq C \left[E_0(S) + \int_S^T \int_\omega |u'|^2 \, dxdt \right] + \tag{5.13}$$
$$+ \delta \int_S^T E_0(t) dt, \quad \delta > 0$$

De (5.13) en (5.12) resulta:

$$\int_S^T E_0(t) dt \leq C E_0(S)$$

Del Lema 2.2 y la expresión (5.7) se concluye la demostración del Teorema 2.1.

BIBLIOGRAFÍA

[1] **Cabanillas, L.E. - Bernui, B.J. - Huaringa, S.Z.** *Energy Decay of a Linear Hyperbolic Equation with Locally Distributed Damping.*- 55 S.B.A. Uberlandia - 2002 - Brasil.

[2] **Conrad, F. & Rao, B.** *Decay of Solutions of Wave Equations in a Star - Shaped Domain with non-linear boundary feed back. Asympotic Analysis,* 7(1993).

[3] **Haraux, A.** *Semigroupes Linéaires et équations d'evolution linéaires.* Periodique publications du laboratoire d'Analyse Numérique Université Pierre et Manie Curie, Paris (1978).

[4] **Komornik, V.** *Exact Controllability and Stabilization, the Multiplier Method.* RAM. Masson & John Wiley Paris. 1994.

[5] **Lasieka, I. and Ong, J.** *Solvability and Uniform Decays of Solutions to Quasilinear Equation with Nonlinear Boundary Dissipation.* Comm in Partial Diff Eq., 24 (1999), 2069 - 2107.

[6] **Lions, J. L.** *Contrôlabite Exacte, Perturbations et stabilisation des Systémes distribués,* N° 1, RMA, Masson. Paris. (1988).

[7] **Martínez, P.A.** *New Method to obtain Decay Rate estimates for dissipative systems with localized damping.* Revista Mat. Complutense Vol. 12, N° 1, (1999), 251 - 283.

[8] **Milla Miranda, M.S., San Gil Jutuca, L.P.** *Existence and Boundary Stability of Solutions for the Kirchoff Equations.* Comm. in Partial Diff. Eq. 24 (1999), 1759 - 1800.

[9] **Nakao, M.** *Decay of Solutions of the Wave Equations with a Local Degenerate dissipation.* Israel J. Math, 95 (1996), 25 - 42.

[10] **Tcheoque Tebou, L.R.** *On the Decay Estimates for the Wave Equation with a Local Degenerate or Nondegenerate Dissipation.* Portugal Math. Vol. 55 Fasc. 3 - (1988) 293 - 306.

[11] **Tucsnak, M.** *Boundary Stabilization for the Stretched String Equation.* Diff. Integral Equations 6(1993), 925 - 935.

[10] **Zua - Zua, E.** *Exponential Decay for the Semilinear Wave Equation with Locally Distributed Damping.* Comm. in P.D.E., 15 (1990), 205 - 235.