PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. VI, N° 2, pags. 27 - 36, LIMA-PERÚ. Diciembre 2003

SOBRE LA ANALITICIDAD DEL SEMIGRUPO Co ASOCIADO A UN SISTEMA VISCOELÁSTICO

Yolanda S. Santiago Ayala[1]

RESUMEN.- *En este artículo, demostramos que el semigrupo C_0 asociado a un Sistema Viscoelástico es analítico y exponencialmente estable.*

PALABRAS CLAVE.- *Semigrupos analíticos, Semigrupos de contracción, Decaimiento exponencial, Operador resolvente, Sistema viscoelástico.*

ABOUT THE ANALITICITY OF THE Co-SEMIGROUP ASSOCIATED TO A VISCOELASTIC SYSTEM

ABSTRACT.- *We proved that the semigroup C_0 associated to a viscoelastic system is analytic and exponentially stable.*

KEYWORDS.- *Analytic semigroups, Contraction semigroups,Exponential decay, Resolvent operator, Viscoeslast system.*

1. INTRODUCCIÓN

Estudiamos el siguiente sistema disipativo

$$\begin{aligned} u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u_t = 0 \quad &, \text{ en } \Omega \times \left]0,T\right[\\ u = \Delta u = 0 \quad &, \text{ en } \partial\Omega \times \left]0,T\right[\\ u(x,0) = u_0(x) \ , \ u_t(x,0) = u_1(x) \quad & x \in \Omega \end{aligned} \tag{1}$$

donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ suave.

Este sistema modela el movimiento transversal de una placa de material viscoelástica presa en la frontera $\partial\Omega$, sin movimiento longitudinal. $u(x,t)$ representa la posición de la placa en el instante t y Δ^2, Δ, ∇ son los operadores Biarmónico, Laplaciano y Gradiente respectivamente.

[1] Profesora de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. E-mail: yssa@lycos.com

La energía asociada al sistema es

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\Omega} |u_t|^2 + |\Delta u|^2 \, dx$$

$E(t)$ es no creciente, desde que

$$\frac{\partial E(t)}{\partial t} = -\int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 \, dx \leq 0$$

Así $0 \leq E(t) \leq E(0)$.

Entonces surge la interrogante ¿A dónde tiende $E(t)$ cuando $t \to \infty$? y ¿con qué tasa de decaimiento lo hace?.

Para abordar este punto, probaremos que el semigrupo asociado al sistema es analítico, utilizando técnicas multiplicativas y el Toerma 2 que involucra al operador resolvente.

La estabilidad exponencial se obtiene como una consecuencia del Teorema 3. Para este caso, cabe resaltar que la Teoría de Semigrupos nos garantiza la existencia, unicidad y el comportamiento asintótico de la solución.

Recordemos que un semigrupo C_0 si decae, lo hace con tasa exponencial. Podemos citar un semigrupo C_0 que no decae, ver Pazy [3]. Existen trabajos importantes de estabilidad via semigrupos, citamos Liu-Zheng [2] y Wyler [6].

Para caracterizaciones del espectro de un semigrupo C_0 ver Prüss [4], Adams [1], Renardy-Hrusa-Nohel [5] que son referencias bases en esta rama de la matemática.

2. PRELIMINARES

Usaremos las siguientes definiciones y resultados. Ver Liu - Zheng [2] y Pazy [3].

Definición 1.

Sea H un espacio de Hilbert dotado de un producto interno $(\ ,\ )$ y la norma inducida $\|\cdot\|$. Sea A un operador lineal en H, ie. $A: D(A) \subseteq H \to H$. Diremos que A es disipativo; si para cualquier $x \in D(A)$, $Re(Ax,x) \leq 0$.

Definición 2.

Una familia $S(t)$ $(0 \leq t < \infty)$ de operadores lineales acotados en un espacio de Banach H es un semigrupo fuertemente contínuo (un semigrupo de clase C_0) si satisface:

(i) $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \geq 0$,

(ii) $S(0) = I$,

(iii) Para cada $x \in H$, $S(t)x$ es continuo en t en $[0, \infty)$.

Para cada semigrupo $S(t)$, definimos un operador A con dominio $D(A)$

$$D(A) = \left\{ x, \exists \lim_{h \to 0} \frac{S(h)x - x}{h} \right\},$$

entonces A es llamado el *generador infinitesimal* del Semigrupo de $S(t)$.

Definición 3.

Diremos que $S(t)$ *es exponencialmente estable si existen constantes positivas* α y $M \geq 1$ *tales que*

$$\| S(t) \| \leq M e^{-\alpha t} \quad , \quad \forall t \geq 0$$

Definición 4.

Diremos que $S(t)$ *es analítico, si admite una extensión* $T(\lambda)$ *para* $\lambda \in \Delta_\theta = \{ \lambda \in \mathbb{C}, |\arg \lambda| < \theta \}$ *para algún* $\theta > 0$; *tal que* $\lambda \to T(\lambda)$ *es analítico y satisface:*

$$\lim_{\Delta_\theta \ni \lambda \to 0} \| T(\lambda) z - z \| = 0 \quad , \quad \forall z \in H$$

$$T(\lambda + \mu) = T(\lambda)\, T(\mu) \quad , \quad \forall \lambda, \mu \in \Delta_\theta .$$

Observación.- $S(t)$ es *analítico* sii $\exists\, K > 0$ tal que $\| AS(t) \| \leq K t^{-1}, t > 0$.

Teorema 1. (Lumer - Phillips)

Sea A *un operador lineal con dominio denso* $D(A)$ *es un espacio de Hilbert* H.

Si A *es disipativo y* $\exists\, \lambda_0 > 0$ *tales que* $Im(\lambda_0 I - A) = H$, *entonces* A *es el generador infinitesimal de un semigrupo* C_0 *de contracciones en* H.

Corolario 1

Sea A *es un operador lineal con dominio denso* $D(A)$ *en un espacio de Hilbert* H.

Si A *es disipativo y* $0 \in \rho(A)$ *(el conjunto resolvente de* A*), entonces* A *es el generador infinitesimal de un semigrupo* C_0 *de contracciones de* H.

Teorema 2.

Sea $S(t)$ un semigrupo C_0 de contracción en un Espacio de Hilbert. Suponga que

$$\rho(A) \supset \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R};$$

entonces $S(t)$ es analítica

$$\Leftrightarrow \overline{\lim_{|\beta| \to \infty}} \left\| \beta (i\beta I - A)^{-1} \right\| < \infty$$

acontece.

Teorema 3.

Sea $S(t)$ un C_0 semigrupo de contracciones en un Espacio de Hilbert. Entonces, $S(t)$ es exponencialmente estable

$$\Leftrightarrow \left\{ \rho(A) \supseteq iR, \overline{\lim_{|\beta| \to \infty}} \left\| (i\beta I - A)^{-1} \right\| < \infty \right\}$$

3. ANALITICIDAD DEL SEMIGRUPO ASOCIADO

De la ecuación (1), haciendo $v = u_t$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ -\Delta^2 u + \Delta u_t \end{pmatrix}$$

entonces,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Delta^2 & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Definamos el Operador

$$A := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Delta^2 & \Delta \end{pmatrix}$$

(1) es equivalente a

$$\left| \begin{aligned} Y_t &= AY \\ Y(0) &= (u_0, u_1) \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Construímos, la energía asociada al sistema. Multiplicando (1) por el u_t e integrando sobre Ω se tiene

$$\int_\Omega u_{tt} \cdot u_t + \Delta^2 u \cdot u_t - \Delta u_t \cdot u_t = 0$$

Usando la Identidad de Green, se obtiene

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}|u_t|^2 + \underbrace{\int_{\Omega}\Delta(\Delta u)\, u_t}_{J:=} + \int_{\Omega}|\nabla u_t|^2 = 0.$$

Pero

$$\begin{aligned} J &= -\int_{\Omega}\nabla(\Delta u)\,\nabla u_t + \underbrace{\int_{\Gamma}\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\,.\,u_t}_{=0} \\ &= \int_{\Omega}\Delta u\,\Delta u_t + \underbrace{\int_{\Gamma}\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\,.\,\Delta u}_{=0} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}|\Delta u|^2 . \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\frac{1}{2}\left\{\int_{\Omega}|u_t|^2 + |\Delta u|^2\, dx\right\}}_{E(t):=} = -\int_{\Omega}|\nabla u_t|^2\, dx \leq 0$$

ie. $E(t)\downarrow, 0 \leq E(t) \leq E(0), \ \forall t > 0$.

Ahora, consideremos

$$X = H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega) \ \text{ y } \ D(A) = \left(H_0^2(\Omega)\cap H_\Delta^2 \cap H^4(\Omega)\right)\times H_0^2(\Omega)$$

donde $H_\Delta^2 = \left\{u \in H^2(\Omega) \text{ tal que } \Delta u = 0\right\}$.

Probaremos que el sistema (2) es disipativo.

$$\begin{aligned} D(A) \ni u,\ (Au, u) &= \left(\begin{pmatrix} v \\ -\Delta^2 u + \Delta v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \\ &= \int_{\Omega}\Delta v\,\Delta u + \int_{\Omega}-(\Delta^2 u + \Delta v)v \\ &= \int_{\Omega}\Delta v\,\Delta u - \int_{\Omega}\Delta^2 uv + \int_{\Omega}\Delta v\,.\,v \\ &= \int_{\Omega}\Delta v\,\Delta u + \int_{\Omega}\nabla(\Delta u)\nabla v - \int_{\Omega}|\nabla v|^2 + \int_{\Gamma}\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\,.\,v \\ &= \int_{\Omega}\Delta v\,\Delta u - \int_{\Omega}\Delta u\,\Delta v - \int_{\Omega}|\nabla v|^2 \\ &= -\int_{\Omega}|\nabla v|^2\, dx \leq 0 . \end{aligned}$$

Por otro lado, necesitamos probar que $0 \in \rho(A)$. En verdad probaremos que $\exists\,(-A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Probaremos que $-A$ es inyectiva:

$$-AU = 0, \text{ con } U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} v \\ -\Delta^2 u + \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ -\Delta^2 u = 0 \end{cases}$$

$$0 = -\int_\Omega \Delta^2 u \,.\, u = -\int_\Omega \Delta(\Delta u) u = -\int_\Omega |\Delta u|^2$$

entonces $\| u \| = 0 \Rightarrow u = 0$. Así,

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La sobreyectividad resulta del Teorema de Lax-Milgram y la regularidad elíptica

Por lo tanto, el Corolario 1 nos permite concluir que A es el generador infinitesimal de $T(t)$ un semigrupo C_0 de contracción,*

$$U(t) := T(t)\, U_0 \;, \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}; \; U_0 \in D(A),$$

donde U es la solución de $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = U_0 \end{cases}$.

En lo que sigue, probaremos que $T(t)$ es analítico, usando el Teorema 2.

Afirmación: $i\beta \subset \rho(A)$

Supongamos que exista β tales que $i\beta \in \sigma(A) = \sigma_p(A)$. Luego, $\exists w \neq 0$ tal que

$$Aw = i\beta w. \tag{3}$$

Denotemos

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Así (3) queda expresado por

$$\begin{pmatrix} v \\ -\Delta^2 u + \Delta v \end{pmatrix} = i\beta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

es decir,

$$v = i\beta u \tag{4.a}$$

$$-\Delta^2 u + \Delta v = i\beta v \tag{4.b}$$

Sustituyendo (4a) en (4b) obtenemos

$$-\Delta^2 u + i\beta \ \Delta u = (i\beta)^2 u = -\beta^2 u \, . \tag{5}$$

Multiplicando (5) por u e integrando obtenemos

$$-\int_\Omega |\Delta u|^2 \ dx - i\beta \int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx = -\beta^2 \int_\Omega |\, u \,|^2 \ dx \, . \tag{6}$$

Por otro lado,

$$\left(Aw, \overline{w}\right) = \left(i\beta w, \overline{w}\right) = i\beta \left(w, \overline{w}\right) = i\beta \, \| w \|^2 \, . \tag{7}$$

Tomando la parte real, conseguimos

$$Re\left(Aw, \overline{w}\right) = 0 \, . \tag{8}$$

De (7) se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\left(\begin{matrix} v \\ -\Delta^2 u + \Delta u \end{matrix}\right), \left(\begin{matrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{matrix}\right)\right) &= \int_\Omega \Delta v \, . \, \overline{\Delta u} + \int_\Omega (-\Delta^2 u + \Delta v)\, \bar{v} \\ &= \int_\Omega \Delta v \, . \, \overline{\Delta u} - \int_\Omega \Delta u \ \Delta\bar{v} - \int_\Omega |\nabla u|^2 \\ &= 2i \ Im \left\{ \int_\Omega \Delta v \ \overline{\Delta u} \right\} - \int_\Omega |\nabla u|^2 \end{aligned} \tag{9}$$

(8) y (9) nos conducen a

$$-\int_\Omega |\nabla v|^2 = 0$$

i.e

$$\begin{aligned} & v = 0 \text{ en } H_0^1 \Rightarrow v = 0 \ \ en \ \ L^2 \Rightarrow u = 0 \ \ en \ \ L^2 \\ & \downarrow \\ & u = 0 \text{ en } H_0^1 \end{aligned} \tag{10}$$

de (6) y (10) conseguimos

$$-\int_\Omega |\Delta u|^2 \ dx - i\beta \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx}_{=0} = -\beta^2 \underbrace{\int |\, u \,|^2 \ dx}_{=0}$$

$$\therefore \ \int_\Omega |\Delta u|^2 \ dx = 0$$

$$\therefore \ \|w\|_X = \int_\Omega |\Delta u|^2 \ dx + \int_\Omega |v|^2 \ dx = 0 \Rightarrow w = 0 \ (\Rightarrow \Leftarrow) \ .$$

Sea

$$(i\beta I - A)\, U = F \quad , \quad U = \left(\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right) \in D(A) \quad , \quad F = \left(\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix}\right) \qquad (a)$$

Probamos que $|\beta| \| R(i\beta, A) F \| \leq C |F|_X$

$$(a) \longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} i\beta u - v = F_1 \qquad (11) \\ i\beta v + \Delta^2 u - \Delta v = F_2 \qquad (12) \end{array} \right.$$

Sustituyendo (11) en (12), obtenemos

$$\begin{aligned} & i\beta \{ i\beta u - F_1 \} + \Delta^2 u - \Delta(i\beta u - F_1) = F_2 \\ & -\beta^2 u - i\beta F_1 + \Delta^2 u - i\beta \Delta u + \Delta F_1 = F_2 \\ & -\beta^2 u + \Delta^2 u - i\beta \Delta u = F_2 - \Delta F_1 + i\beta F_1 \ . \qquad (13) \end{aligned}$$

Multiplicando (13) por $\overline{\Delta u}$, obtenemos

$$-\beta^2 u \overline{\Delta u} + \Delta^2 u \overline{\Delta u} - i\beta \Delta u \overline{\Delta u} = (F_2 - \Delta F_1) \Delta\overline{u} + i\beta F_1 \Delta\overline{u} \cdot$$

Integrando sobre Ω y usando la Identidad de Green obtenemos

$$\begin{aligned} & \beta^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega |\nabla(\Delta u)|^2 \, dx + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta u) \, \overline{\Delta u} - i\beta \int_\Omega |\Delta u|^2 = \\ & = \int_\Omega (F_2 - \Delta F_1) \, \Delta\overline{u} + i\beta \int_\Omega F_1 \Delta \overline{u} \, . \qquad (14) \end{aligned}$$

Tomando conjugado a igualdad (11), obtenemos

$$\begin{aligned} i\beta \int_\Omega F_1 \Delta\overline{u} \, dx &= i\beta \int_\Omega \Delta F_1 \overline{u} = \int_\Omega \Delta F_1 \, . \, i\beta\overline{u} = \int_\Omega \Delta F_1 (-\overline{v} - \overline{F_1}) \\ &= \int_\Omega \Delta F_1 \overline{v} - \int_\Omega \Delta F_1 \, . \, \overline{F_1} = - \int_\Omega \Delta F_1 \overline{v} + \int_\Omega |\nabla F_1|^2 \, . \qquad (15) \end{aligned}$$

Sustituyendo (15) en (14) y tomando la parte imaginaria, obtenemos

$$\begin{aligned} -\beta \int_\Omega |\Delta u|^2 \, dx &= Im \left\{ \int_\Omega (F_2 - \Delta F_1) \, \Delta \overline{u} \right\} - Im \int_\Omega \Delta F_1 \overline{v} \\ &= Im \left\{ \int_\Omega (F_2 - \Delta F_1) \, \Delta\overline{u} - \int_\Omega \Delta F_1 \overline{v} \right\} \quad . \qquad (16) \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación (12) por $\overline{v}$ e integrando sobre Ω, obtenemos

$$i\beta \int_\Omega |v|^2 + \int_\Omega \Delta^2 u \overline{v} - \int_\Omega \Delta v \overline{v} = \int_\Omega F_2 \overline{v} \, .$$

Utilizando la Identidad de Green

$$i\beta \int_\Omega |v|^2 + \int_\Omega \Delta u \, \Delta\overline{v} + \int_\Omega |\Delta v|^2 = \int_\Omega F_2 \overline{v} \, . \qquad (17)$$

Tomando el Laplaciano a la ecuación (11) tenemos,

$$i\beta\,\Delta u - \Delta v = \Delta F_1\,. \tag{18}$$

Multiplicando la ecuación (18) por $\Delta\bar{u}$ e integrando sobre Ω tenemos,

$$i\beta\int_\Omega |\Delta u|^2\,dx - \int_\Omega \Delta u\,\Delta\bar{u}\,dx = \int_\Omega \Delta F_1\,\Delta\bar{u}\,dx\,. \tag{19}$$

Sumando (17) y (19) obtenemos,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + i\beta\left\{\int_\Omega |v|^2 + |\Delta u|^2\,dx\right\} + 2i\,Im\left\{\int_\Omega \Delta u\,\Delta\bar{v}\right\}\\ &= \int_\Omega F_2\,\bar{v} + \int_\Omega \Delta F_1\,\Delta\bar{u}\,.\end{aligned} \tag{20}$$

Pero, se observa que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta u\,\Delta\bar{v} &= \int_\Omega \Delta u\left\{i\beta\,\Delta\bar{u} - \Delta\overline{F_1}\right\}\\ &= i\beta\int_\Omega |\Delta u|^2\,dx - \int_\Omega \Delta u\,\Delta\overline{F_1}\,.\end{aligned}$$

Luego,

$$Im\int_\Omega \Delta u\;\Delta\bar{v} \;=\; -\;\beta\int_\Omega |\Delta u|^2\,dx \;-\; Im\int_\Omega \Delta u\;\Delta\,\overline{F_1}\;. \tag{21}$$

Sustituyendo (21) en (20) obtenemos,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |v|^2\,dx + i\beta\left\{\int_\Omega |v|^2 + |\Delta u|^2\,dx\right\} - 2i\beta\int_\Omega |\Delta u|^2\,dx\\ &-2i\;Im\int_\Omega \Delta u\;\Delta\overline{F_1} = \int_\Omega F_2\,\bar{v} + \int_\Omega \Delta F_1\,\Delta\bar{u}\,.\end{aligned}$$

Tomando la parte imaginaria, obtenemos

$$\beta\left\{\int_\Omega |v|^2 - |\Delta u|^2\,dx\right\} = 2\,Im\int_\Omega \Delta u\;\Delta\overline{F_1} + Im\left\{\int_\Omega F_2\,\bar{v} + \int_\Omega \Delta F_1\;\Delta\bar{u}\right\}. \tag{22}$$

sumando las ecuaciones (22) y $-\,2$ (16) tenemos

$$\begin{aligned}\beta\int_\Omega |v|^2 - |\Delta u|^2\,dx \;=\; &Im\left\{\int_\Omega 2\Delta u\;\Delta F_1 + F_2\bar{v} + \Delta F_1\,\Delta\bar{u}\right\}\\ &-2\,Im\left\{\int_\Omega (F_2 - \Delta F_1)\;\Delta\bar{u} - \Delta F_1\,\bar{v}\right\}\end{aligned}$$

tomando $|\,.\,|$ se consigue,

$$|\beta| \underbrace{\int_\Omega \left\{ |v|^2 + |\Delta u|^2 \right\} dx}_{|U|_X^2} \leq |F|_X \, |U|_X$$

$$|\beta| \, |U|_X^2 \leq C |F|_X |U|_X$$

$$|\beta| \, |U|_X \leq C |F|_X$$

$$|\beta| \, \| R(i\beta, A) F \| \leq C |F|_X$$

$$|\beta| \, \| R(i\beta, A) \| \leq C \, .$$

Tomando el límite cuando $|\beta| \to +\infty$, se tiene $\lim_{|\beta| \to +\infty} |\beta| \; \| R(i\beta, A) \| \leq C$, donde C es una constante positiva.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Adams, R. A. *Solobev Spaces.* Academic Press, New York. (1975).

[2] Liu-Zheng. *Semigroups associated with dissipative systems.* Chapman-Hall/ CRC. (1999).

[3] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and applications to partial Differential Equations.* Springer, New York. (1983).

[4] Prüss, J. *On the spectrum of C_0 Semigroups.* Trans AMS 284, pag. 847-857. (1984).

[5] Renardy, M. Hrusa, W. J. and Nohel, J.A. *Mathematical problems in Viscoelasticity.* Pitman monographs and surveys in Pure and Applied Mathematics 35, John Wiley & Sons. New York. (1987).

[6] Wyler, A. *Stability of wave equations with dissipative boundary conditions in a bounded domain.* Differential and Integral Equations, Vol 7, number 2, 345 - 336. (1994).