PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVII N°1, pp. 17 -24, Lima - Perú, Abril 2014

EXISTENCIA DE FUNCIONES DE WHITNEY PARA EL HIPERESPACIO 2^X

***William Olano Diaz*[1], *Andrés Guardia Cayo*[2], *Heidi Chupayo Evangelista*[3], *Luis Durand Romero*[4], *Marlon Tineo Condeña*[5].**

Resumen.- En el presente trabajo estudiaremos la existencia de funciones de Whitney para el hiperespacio 2^X, donde X es un espacio métrico, compacto y conexo no degenerado.

Palabras clave: Funciones de Whitney. Hiperespacio 2^X.

EXISTENCE OF FUNCTIONS FOR WHITNEY HYPERSPACE 2^X

Abstract.- In the present work we study the existence of Whitney functions for hyperspace 2^X, where X is a metric space compact and connected non-degenerate.

Keywords: Whitney functions. Hyperspace 2^X.

1. Preliminares

Las funciones de Whitney juegan un papel importante en el estudio de los Hiperespacios de continuos. Intuitivamente, una función de Whitney es una manera de medir el tamaño de subconjuntos cerrados de un continuo. En este trabajo se ha retomado de la referencia [5].
Un **continuo** es un espacio métrico conexo, compacto y no degenerado.
Sea X un continuo y $Y \subseteq X$. Diremos que Y es un **subcontinuo** de X si Y es a su vez un continuo. Para mayor referencia ver [3] y [4].

2. Topología para 2^X

Dado un continuo X, los hiperespacios son ciertas familias de subconjuntos de X, con algunas características particulares. Consideremos el hiperespacio

$$2^X = \{A \subseteq X | A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado}\} \tag{1}$$

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: wcolano@hotmail.com
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: agcbayo@yahoo.es
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: unmsmheidi@yahoo.com
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: luis.durand.romero@gmail.com
[5]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: marlonunmsm@hotmail.com

Definición 1 Sea X un conjunto con métrica d, $A, B \subseteq X$, denotaremos por $d(A, B)$ la **distancia** de A a B como

$$d(A, B) = inf\{d(a, b)|a \in A \text{ y } b \in B\}$$

y la distancia de un punto p a un conjunto C por

$$d\left(p, C\right) = d\left(\{p\}, C\right).$$

Definición 2 Sea A un subconjunto cerrado no vacío en X, la **nube** en X con centro en A y radio $\epsilon > 0$, es

$$N(\epsilon, A) = \{y \in X| \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(y, a) < \epsilon\}$$

Teorema 1 Si X es un continuo, $\epsilon > 0$ y $A \in 2^X$, entonces

1) $A \subset N(\epsilon, A)$.

2) $N(\delta, A) \subset N(\epsilon, A)$ para cada $\delta > 0$ tal que $\delta < \epsilon$.

Demostración.

1) Es claro.

2) Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \epsilon$ y $x \in N(\delta, A)$. Existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \delta$, y como $\delta < \epsilon$, tenemos que $d(a, x) < \epsilon$, es decir $x \in N(\epsilon, A)$. Por lo tanto $N(\delta, A) \subset N(\epsilon, A)$.

Teorema 2 Si $A, B \in 2^X$ tal que $A \cap B = \emptyset$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) = \emptyset.$$

Demostración. Supongamos por el contrario, que para cada $\epsilon > 0$, tenemos que

$$N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) \neq \emptyset.$$

Puesto que $A \cap B = \emptyset$ y A, B son compactos en X, tenemos que $d(A, B) > 0$.
Sea $\epsilon = \frac{d(A,B)}{2}$, por lo supuesto, deducimos que $N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) \neq \emptyset$. Existe $z \in N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B)$. Así existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(a, z) < \epsilon$ y $d(b, z) < \epsilon$. Aplicando la desigualdad del triángulo, $d(a, b) < d(a, z) + d(z, b)$.
Luego, $d(a, b) < 2\epsilon = d(A, B)$, de manera que $d(a, b) < d(A, B)$, lo cual es una contradicción.

Definición 3 Sea A un subconjunto no vacío de un continuo X. El **diámetro** de A, denotado por $diam(A)$, es

$$diam(A) = sup\{d(a, b)|a, b \in A\}.$$

Notación 1 Para cada $A, B \in 2^X$, sean

$$E(A, B) = \{\epsilon > 0|A \subset N(\epsilon, B) \; y \; B \subset N(\epsilon, A)\} \; y$$

$$E(A, B) \biguplus E(C, D) = \{\epsilon + \delta > 0|\epsilon \in E(A, B) \; y \; \delta \in E(C, D)\}.$$

Teorema 3 Sea X un continuo. La función $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida para cada $A, B \in 2^X$, por

$$H(A, B) = inf E(A, B)$$

es una métrica para 2^X.

Demostración. Sean $A, B, C \in 2^X$

1. Veamos que está bien definida. Para esto, tenemos que probar que el conjunto $E(A, B)$ es no vacío y esta acotada inferiormente.
   Observemos que $d(x, y) < diam(X) + 1$ para cada $x, y \in X$.
   Así, $A \subset N(diam(X) + 1, B)$ y $B \subset N(diam(X) + 1, A)$. De manera que $diam(X) + 1 \in E(A, B)$. Por lo tanto $E(A, B) \neq \emptyset$. Es claro que $H(A, B)$ está acotado inferiormente por el cero.

2. Para cada $A, B \in 2^X$, notemos que $H(A, B) \geq 0$.

3. Por definición de $E(A, B)$, deducimos que $E(A, B) = E(B, A)$, de esto, para cada $A, B \in 2^X$, tenemos que $H(A, B) = H(B, A)$.

4. Para cada $A, B \in 2^X$, vemos que $H(A, B) = 0$ si, y sólo si, $A = B$. Sean $A, B \in 2^X$. Supongamos que que $H(A, B) = 0$. Mostraremos que $A = B$. Para esto, sean $\epsilon > 0$ y $x \in A$. Como $H(A, B) = 0$, existe $\delta \in E(A, B)$ tal que $\delta < \epsilon$. Luego, $A \subset N(\delta, B)$ y como $x \in A$, se sigue que $x \in N(\delta, B)$. Entonces existe $y \in B$ tal que $d(x, y) < \epsilon$. Así, $y \in B(x, \epsilon) \cap B$ de donde $B(x, \epsilon) \cap B \neq \emptyset$ y como ϵ era arbitrario, tenemos que $x \in \overline{B}$. Puesto que B es cerrado en X, se sigue que $x \in B$. Por lo tanto $A \subset B$. Análogamente se prueba que $B \subset A$. Así $A = B$.

   Ahora supongamos que $A = B$. Luego, para todo $\epsilon > 0$, tenemos que $\epsilon \in E(A, B)$. Así $H(A, B) = 0$.

5. Finalmente veamos que para cada $A, B, C \in 2^X$, tenemos que

   $$H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C).$$

   Para esto, demostraremos que

   $$E(A, B) \uplus E(B, C) \subset E(A, C)$$

   tal que $\beta = \epsilon + \delta$. Luego, $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\delta, C)$.

   Veamos que $A \subset N(\beta, C)$.

   Si $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $d(x, y) < \epsilon$, entonces, existe $z \in C$ tal que $d(y, z) < \delta$. Así, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \epsilon + \delta$. Por lo tanto, $A \subset N(\beta, C)$. Análogamente, se puede probar que $C \subset N(\beta, A)$.
   De esto, deducimos que $\beta \in E(A, C)$. Por lo tanto,

   $$E(A, B) \uplus E(B, C) \subset E(A, C).$$

De lo anterior, es inmediato que $H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$. De acuerdo al teorema 2 y 3, para cada continuo X, tenemos que $(2^X, H)$ es un espacio métrico, H se le conoce como la **métrica de Hausdorff**.

Teorema 4 Sea X un continuo $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Si $H(A,B) < \epsilon$ entonces $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.

Demostración. Supongamos que $H(A,B) < \epsilon$, entonces existe $\delta' \in E(A,B)$ tal que $A \subset N(\delta', B)$ y $B \subset N(\delta', A)$ y por el teorema 1 de la parte 2, tenemos que $N(\delta', B) \subset N(\epsilon, B)$ y $N(\delta', A) \subset N(\epsilon, A)$. Por lo tanto $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.

3. Existencia de funciones de Whitney para el hiperespacio 2^X

Definición 4 Sea X un continuo. Una *función de Whitney* para 2^X, es una función continua $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ tal que

1) Para cada $x \in X, \mu(\{x\}) = 0$,

2) Para cada $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$, tenemos que $\mu(A) < \mu(B)$.

Sea X un espacio métrico compacto, elijamos un subconjunto denso y numerable $D = \{z_1, z_2, \ldots\}$ de X. Para cada n, definamos

$$\mu_n : 2^X \to [0, \infty)$$

por

$$\mu_n(A) = max\{d(a, z_n)|a \in A\} - min\{d(a, z_n)|a \in A\}$$

esta función μ_n está bien definida ya que d es una función continua y A es un conjunto compacto.

Lema 1 μ_n es continua.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, $A, B \in 2^X$ y $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ tal que $H(A,B) < \delta$. Veamos que μ_n es uniformemente continua. Como A y B son compactos, existen $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$ tales que

$$d(z_n, a_1) = max\{d(z_n, a)|a \in A\} \tag{2}$$

$$d(z_n, a_2) = min\{d(z_n, a)|a \in A\} \tag{3}$$

$$d(z_n, b_1) = max\{d(z_n, b)|b \in B\} \tag{4}$$

$$d(z_n, b_2) = min\{d(z_n, b)|b \in B\} \tag{5}$$

Como $H(A,B) < \delta$, por el teorema 4, tenemos que $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$, de manera que existen $x, y \in A$ tales que

$$d(x, b_1) < \delta \textbf{ y } d(y, b_2) < \delta \tag{6}$$

Luego de (2) y (6) tenemos que

$$d(z_n, b_1) \leq d(z_n, x) + d(x, b_1) < d(z_n, a_1) + \delta$$

ya que $d(z_n, x) \leq d(z_n, a_1)$. Así,

$$d(z_n, b_1) - d(z_n, a_1) < \delta \tag{7}$$

luego de (3) y (6) tenemos que

$$d(z_n, a_2) \leq d(z_n, y) \leq d(z_n, b_2) + d(b_2, y) < d(z_n, b_2) + \delta$$

ya que $d(z_n, a_2) \leq d(z_n, y)$. Así

$$d(z_n, a_2) - d(z_n, b_2) < \delta \tag{8}$$

De manera análoga existen $x_1, y_1 \in B$ tales que

$$d(x_1, a_1) < \delta \ y \ d(y_1, a_2) < \delta \tag{9}$$

Luego de (4) y (9), tenemos que

$$d(z_n, a_1) \leq d(z_n, x_1) + d(x_1, a_1) < d(z_n, b_1) + \delta,$$

ya que $d(z_n, x_1) \leq d(z_n, b_1)$. Así

$$d(z_n, a_1) - d(z_n, b_1) < \delta \tag{10}$$

Luego de (5) y (9) tenemos que

$$d(z_n, b_2) \leq d(z_n, y_1) \leq d(z_n, a_1) + d(a_2, y_1) < d(z_n, a_2) + \delta$$

ya que $d(z_n, a_2) \leq d(z_n, a_2)$. Así,

$$d(z_n, b_2) - d(z_n, a_2) < \delta \tag{11}$$

de (7) y (10), obtenemos que

$$|d(z_n, a_1) - d(z_n, b_1)| < \delta \tag{12}$$

y de (8) y (11), obtenemos que

$$|d(z_n, a_2) - d(z_n, b_2)| < \delta \tag{13}$$

de (12) y (13) se concluye que

$$\begin{aligned} |\mu_n(A) - \mu_n(B)| &= |(d(z_n, b_1) - d(z_n, b_2)) - (d(z_n, a_1) - d(z_n, a_2))| \\ &\leq |d(z_n, b_1) - d(z_n, a_1)| + |d(z_n, a_2) - d(z_n, b_2)| \\ &< \delta + \delta = \epsilon \end{aligned}$$

Lema 2 Si $A \subset B$, entonces $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$.

Demostración. Sea $A \subset B$, entonces $\{d(z_n, a)|a \in A\} \subseteq \{d(z_n, b)a \subseteq\in B\}$. De aquí que

$$max\{d(z_n, a)|a \in A\} \leq max\{d(a, z_n)|a \in B\}, \ y$$

$$min\{d(z_n, a)|a \in B\} \leq min\{d(z_n, a)|a \in A\}$$

se sigue que

$$-min\{d(z_n, a)|a \in A\} \leq -min\{d(z_n, a)|a \in B\}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mu_n(A) &= max\{d(z_n, a)|a \in A\} - min\{d(z_n, a)|a \in A\} \\
&\leq max\{d(z_n, b)|b \in B\} - min\{d(z_n, b)|b \in B\} \\
&= \mu_n(B)
\end{aligned}$$

Lema 3 μ_n es uniformemente acotada.

Demostración. Sea

$$M = diam(X) = max\{d(x, y)|x, y \in X\}$$

entonces

$$\begin{aligned}
max\{d(z_n, a)|a \in A\} - mim\{d(z_n, a)|a \in A\} &\leq max\{d(z_n, a)|a \in A\} \\
&\leq M
\end{aligned}$$

ya que $A \subset X$. De donde $\mu_n(A) \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $A \in 2^X$.

El siguiente teorema, es conocido como el criterio M. de Weierstrass, el cual, muestra una manera de construir funciones continuas a partir de sucesiones de funciones continuas. Esto nos servirá para dar una expresión explícita de algunas funciones de Whitney.

Teorema 5 Si $\{\mu_n\}_{n \in N}$ es una sucesión de funciones continuas del espacio métrico X en $\mathbb{R}$ y $M \in \mathbb{R}^+$ son tales que $|\mu_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$, entonces la función $\mu : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(x)}{2^n}$$

es una función continua.

Demostración. Ver [1], pág 85.

Teorema 6 Si X es continuo, entonces existen funciones de Whitney.

Demostración. Definamos

$$\mu : 2^X \to [0, \infty)$$

por $\mu(A) = \dfrac{\mu_n(A)}{2^n}$., Por el Lema 1, la función μ está bien definida. Del Lema 3 y por el teorema anterior, se sigue que μ es una función continua.

Ahora probaremos que μ verifica las propiedades (1) y (2) de la definición de funciones de Whitney. Para $x \in X$,

$$\begin{aligned}\mu_n\{x\} &= max\{d(a, z_n)|a \in \{x\}\} - min\{d(a, z_n)|a \in \{x\}\} \\ &= d(x, z_n) - d(x, z_n) = 0\end{aligned}$$

entonces $\mu\{x\} = 0$. Sean $A, B \in 2^X$ tal que $A \subsetneq B$ y elijamos $b_0 \in B - A$, por ser A cerrado, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(b_0, \epsilon) \cap A = \emptyset$. Como D es denso, existe $z_n \in D \cap B(b_0, \frac{\epsilon}{2})$. Así

$$d(z_n, b_0) < \frac{\epsilon}{2}$$

Para n probaremos que $\mu_n(A) < \mu_n(B)$. Notemos que

$$max\{d(a, z_n)|a \in A\} \leq max\{d(a, z_n)|a \in B\}\ y$$

$$min\{d(a, z_n)|a \in B\} \leq min\{d(a, z_n)|a \in A\}$$

Además

$$min\{d(a, z_n)|a \in A\} \geq \frac{\epsilon}{2}$$

Por que de lo contrario, si

$$min\{d(a, z_n)|a \in A\} < \frac{\epsilon}{2}$$

entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, z_n) < \dfrac{\epsilon}{2}$ y esto implica que

$$d(a, b_0) \leq d(a, z_n) + d(z_n, b_0) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Así, $a \in B(b_0, \epsilon) \cap A$ lo cual es una contradición. Entonces

$$\begin{aligned}min\{d(a, z_n)|a \in A\} &\geq \frac{\epsilon}{2} \\ &> d(z_n, b_0) \\ &\geq min\{d(z_n, b)|b \in B\}\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}\mu_n(A) &= max\{d(z_n, a)|a \in A\} - min\{d(z_n, a)|a \in A\} \\ &< max\{d(z_n, b)|b \in B\} - min\{d(z_n, b)|b \in B\} = \mu_n(B)\end{aligned}$$

entonces

$$\mu_n(A) < \mu_n(B)$$

por el lema 2, se concluye que $\mu(A) < \mu(B)$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Dugundji J.; *Topology.* 2nd ed. BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[2] Illanes A.; *Hiperespacios de Continuos.* Aportaciones Matemáticas, Serie Texto Nro. 28, Sociedad Matemática Mexicana.

[3] Tkachuk V.; *Curso Básico de Topología General.* Universidad Autónoma Metropolitana. (Unidad Iztapalapa), ISBN:970-654-362-7, 1999.

[4] Willard S.; *General Topology.* Dover Publications, 1998.

[5] Vianey C.; *Elementos Básicos de Hiperespacios de Continuos.* Tesis de Licenciada en Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2011.