PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVIII N°1, pp. 27-38, Lima - Perú, Diciembre 2015

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO Y ESTABILIDAD EXPONENCIAL PARA UN PROBLEMA DE TRANSMISIÓN EN TERMOELASTICIDAD

Alfonso Pérez Salvatierra [1], ***Andrés Guardia Cayo*** [2], ***Victoriano Yauri Luque*** [3], ***Hugo E. Lázaro Manrique*** [4], ***Zoraida Huamán Gutierrez*** [5]

(Recibido: 08/09/2015 - Aceptado: 02/10/2015)

Resumen: Estudiamos un problema termoelástica semi-lineal con amortiguación localizado, modelado por

$$\left|\begin{array}{l} u_{tt} - au_{xx} + m\theta_x + f(u) = h_1, \text{ en } (L_1, L_2) \times (0, +\infty) \\ \theta_t - k\theta_{xx} + mu_{xt} = h_2, \text{ en } (L_1, L_2) \times (0, +\infty) \\ v_{tt} - bv_{xx} = h_3, \text{ en } (0, L_1) \times (0, +\infty) \end{array}\right.$$

que es uno de los modelos matemáticos más importantes en la ciencia de los materiales.

La existencia y decaimiento exponencial de la energía asociado al sistema se obtienen en el presente trabajo. Por otra parte, la existencia de conjuntos de absorción se logra en el caso no homogéneo.

Palabras clave: Termoelasticidad, decaimiento exponencial, estabilidad asintótica.

BEHAVIOR ASYMPTOTIC AND EXPONENTIAL STABILITY FOR A TRANSMISSION PROBLEM IN THERMOELASTICITY

Abstract: We studied a semi-linear thermoelastic problem with localized damping, modeling

$$\left|\begin{array}{l} u_{tt} - au_{xx} + m\theta_x + f(u) = h_1, \text{ in } (L_1, L_2) \times (0, +\infty) \\ \theta_t - k\theta_{xx} + mu_{xt} = h_2, \text{ in } (L_1, L_2) \times (0, +\infty) \\ v_{tt} - bv_{xx} = h_3, \text{ in } (0, L_1) \times (0, +\infty) \end{array}\right.$$

which it is one of the most important in materials science mathematical models.

The existence and exponential decay of the energy associated with the system are obtained in the present work. Moreover, the existence of sets of absorption is achieved in the non-homogeneous case.

Keywords: Thermoelasticity; exponential decay; asymptotic behaviour.

1. Introducción

La ecuación de onda sin ningún termino disipativo es un sistema conservativo, es decir, su energía total es constante para cualquier tiempo. Varios autores inducen diferentes tipos de mecanismos disipativos para estabilizar las oscilaciones. Por ejemplo, la disipación (o amortiguamiento) friccional αu_t, actúa sobre todo el dominio ver Hansen [1], o las condiciones

[1] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: apersal@hotmail.com
[2] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: agcwallace@yahoo.es
[3] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: victoriano_yauri@hotmail.com
[4] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: hlazarom@unmsm.edu.pe
[5] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: zoraidahg73@hotmail.com

de frontera friccional, donde la disipación actúa en una parte de la frontera ver Komornik [3], o también amortiguamiento localizado, es decir, cuando la fricción amortiguamiento es $\alpha(x)u_t$ donde α se anula en alguna vecindad de la frontera ver Nakao y Zuazua [7 y 8]. Dándose a entender que su objetivo es, encontrar la disipación mínima de tal manera que la energía de la correspondiente ecuación de onda disipativa, decaiga de manera uniforme a cero, cuando el tiempo va hacia infinito. En cuanto al amortiguamiento friccional localizado, la pregunta principal sería: ¿En qué parte tiene que ser α positiva con el fin de asegurar una tasa uniforme de decaimiento?. Esta pregunta está relacionada de alguna manera con la teoría de control. En el texto de Lions [15], se demuestra que, si podemos controlar un sistema, entonces podemos estabilizar. Más precisamente, si se puede controlar un sistema que actúa sobre un subconjunto ω de Ω, es posible estabilizar el sistema introduciendo un efectivo mecanismo de amortiguamiento solo sobre ω. Esto de alguna manera deja al problema de hallar, la más pequeña vecindad posible ω para que la ecuación de onda pueda ser controlado, trabajandose sobre ω. Una respuesta a esta pregunta se da en Bardos [2], donde los autores encuentran una condición suficiente para una ecuación hiperbólica de segundo orden donde los controles sean eficaces en una parte del dominio. En otros casos, se ven materiales compuestos que son inducidos para estabilizar las oscilaciones, ver Marzocchi y Gao [11 y 5], donde muestran los resultados de estabilidad para materiales compuestos. Cuando en el sistema se cumple adecuadas condiciones iniciales y de frontera, existen resultados de estabilidad para los materiales compuestos mencionados líneas arriba. Nuestro sistema se puede considerar como un sistema localmente amortiguado. Nuestro interés es, ¿será suficiente el amortiguación débil inducido por el efecto térmico en $[L_1, L_2]$ para obtener la estabilidad del sistema? La respuesta es afirmativa y lo demostramos en el desarrollo del presente articulo.

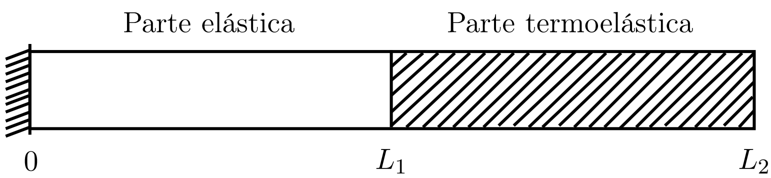
2. Preliminares

El sistema que modela el presente trabajo es,

$$(*)\left|\begin{array}{l} u_{tt} - au_{xx} + m\theta_x + f(u) = h_1, \text{ en } (L_1, L_2) \times (0, +\infty) \\ \theta_t - k\theta_{xx} + mu_{xt} = h_2, \text{ en } (L_1, L_2) \times (0, +\infty) \\ v_{tt} - bv_{xx} = h_3, \text{ en } (0, L_1) \times (0, +\infty) \end{array}\right.$$

$$(*)_1\left|\begin{array}{l} u(L_2, t) = \theta(L_2, t) = v(0, t) = 0 \\ u(L_1, t) = v(L_1, t), \\ au_x(L_1, t) - m\theta(L_1, t) = bv_x(L_1, t) \\ \theta_x(L_1, t) = 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l}\text{Condición de frontera} \\ \text{y transmisión}\end{array}$$

$$(*)_2\left|\begin{array}{l} u(x, 0) = u_0(x), \\ u_t(x, 0) = u_1(x), \ x \in (L_1, L_2) \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), \ x \in (L_1, L_2) \\ v(x, 0) = v_0(x), \\ v_t(x, 0) = v_1(x), \ x \in (0, L_1) \end{array}\right. \qquad \text{Condición inicial}$$



Donde a, b, k y m son constantes positivas,

$$h_i : (L_1, L_2) \to \mathbb{R}(i = 1, 2); \ h_3 : (0, L_1) \to \mathbb{R}$$

Son funciones dadas, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz no lineal con constante de Lipschitz positiva μ. Denotemos por

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt$$

Y asumamos que f satisface, $sf(s) > 0, \forall s \in \mathbb{R}$.
Nuestro resultado es demostrar que, cuando los materiales compuestos están hechos solo de una parte termoelástica, pueden también estabilizarse como en el sistema anterior planteado.

Más precisamente, demostramos que en el caso lineal homogénea ($f \equiv 0,\ h_i \equiv 0, i = 1,2,3$), la solución del sistema anterior tiende a cero con una tasa exponencial, cuando el tiempo va al infinito. En el caso no lineal esta propiedad se sustituye por la existencia de un conjunto absorbente en el espacio de soluciones, siempre que μ sea suficientemente pequeña, en comparación con la constante de la función energía elegida.

3. Espacios funcionales y notaciones

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado. Con la notación habitual introducimos los espacios $L^2(I)$, y $H^1(I)$ que actúa sobre I. También consideraremos espacios de funciones definidas en un intervalo I con valores en el espacio de Banach X tales como $C(I,X), C^1(I,X), L^p(I,X), H^p(I,X)$, con las normas usuales.
En seguida introducimos los siguientes espacios:

$$H^1_{L_2}(L_1,L_2) = \left\{w \in H^1(L_1,L_2) : w \in (L_2) = 0\right\}$$

$$H^1_{L_0}(0,L_1) = \left\{v \in H^1(0,L_1) : v(0) = 0\right\}$$

$$V = \left\{(u,v) \in H^1_{L_2}(L_1,L_2) \times H^1_{L_0}(0,L_1) : v(L_1) = u(L_1)\right\}$$

Observemos que V es un subespacio cerrado de $H^1_{L_2}(L_1,L_2) \times H^1_{L_0}(0,L_1)$ junto con la norma

$$\|(u,v)\|_V^2 := \int_0^1 |v_x|^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} |u_x|^2 dx = \|v_x\|_{L^2}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2$$

Es un espacio de Hilbert.

Nota 3.1 Desde que $u(L_2,t) = v(0,t) = 0$, tenemos

$$\int_{L_1}^{L_2} |u_x|^2 dx \le \|u\|^2_{H^1_{L_2(L_1,L_2)}} = \int_{L_1}^{L_2} |u|^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} |u_x|^2 dx \le \lambda_1^2 \int_{L_1}^{L_2} |u_x|^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} |u_x|^2 dx$$

Por lo tanto

$$\int_{L_1}^{L_2} |u_x|^2 dx \le \|u\|^2_{H^1_{L_2(L_1,L_2)}} \le \left(\lambda_1^2 + 1\right) \int_{L_1}^{L_2} |u_x|^2 dx$$

Similarmente para v se tiene

$$\int_0^{L_2} |v_x|^2 dx \le \|v\|^2_{H^1_{L_0(L_1,L_2)}} = \int_0^{L_1} |v|^2 dx + \int_0^{L_1} |v_x|^2 dx \le \left(\lambda_2^2 + 1\right) \int_0^{L_1} |v_x|^2 dx$$

Entonces, tenemos las equivalencias $\|u\|^2_{H^1_{L_2(L_1,L_2)}} \sim \|u_x\|^2_{L^2(L_1,L_2)}$ y $\|v\|^2_{H^1_{L_0(0,L_1)}} \sim \|v_x\|^2_{L^2(0,L_1)}$
Donde

λ_1 es la constante de Poincaré sólo sobre (L_1,L_2) con $u(L_2) = 0$

y

λ_2 es la constante de Poincaré sólo sobre $(0,L_1)$ con $v(0) = 0$.

Con el fin de simplificar la notación, omitimos la indicación del dominio de la variable espacial. Por ejemplo, $u \in C\left([0,T]; H^1\right)$, implica $u \in C\left([0,T]; H^1(L_1,L_2)\right)$ y así sucesivamente. En lo que sigue necesitamos del siguiente lema:

Lema 3.2 Supongamos que

$$z \in H^1\left(I, L^2(x_1, x_2)\right), q \in C^1(x_1, x_2).$$

Entonces para cualquier

$$w \in H^2\left(I, L^2(x_1, x_2)\right) \cap L^2\left(I, H^2(x_1, x_2)\right)$$

Satisfaciendo

$$w_{tt} - \sigma w_{xx} = z \tag{1}$$

Con $\sigma > 0$, de donde se tiene la siguiente identidad

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} q w_t w_x dx = &\int_{x_1}^{x_2} q w_x z dx + \frac{q(x_2)}{2}\left(|w_t(x_2,t)|^2 + \sigma |w_x(x_2,t)|^2\right)\\ &- q\frac{(x_1)}{2}\left(|w_t(x_1,t)|^2 + \sigma |w_x(x_1,t)|^2\right)\\ &- \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(q_x|w_t|^2 + q_x\sigma|w_x|^2\right)dx\end{aligned}$$

Demostración. Multiplicando la ecuación (1) por qw_x e integrando sobre $[x_1, x_2]$ obtenemos

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} q w_1 w_x dx = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} q\frac{d}{dx}|w_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} q\sigma\frac{d}{dx}|w_x|^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} q w_x z dx$$

Y aplicando integración por partes se llega al resultado del Lema 3.2 ∎

4. Existencia y unicidad de las soluciones

Teorema 4.1 En esta sección, estableceremos la existencia y unicidad de soluciones para los problemas planteados en $(*), (*)_1$ y $(*)_2$, donde la no linealidad de f se asume como una función real que verifica

$$sf(s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Además denotemos

$$F(s) = \int_0^s f(\sigma)\, d\sigma$$

Primeramente, definimos que se entiende por solución débil de los problemas $(*), (*)_1$ y $(*)_2$. A lo largo de esta sección, estableceremos $I = [0, T]$, con $T > 0$.

Definición 4.2 Sean $h_i \in L^2$ $(i = 1, 2, 3)$.Diremos que (u, θ, v) es una solución débil de los problemas $(*), (*)_1$ y $(*)_2$ cuando

$$(u, v) \in L^\infty(I, V), (u_t, v_t) \in L^\infty\left(I, L^2 \times L^2\right),\ \theta \in L^\infty\left(I, L^2\right) \cap L^2\left(I, H^1_{L_2}\right)$$

Satisfaciendo las identidades:

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{L_1}^{L_2}\{u\phi_{tt} + au_x\phi_x - m\theta\phi_x + [f(u) - h_1]\phi\}\,dxdt\\ &\qquad + \int_0^T\int_0^{L_1}(vw_{tt} + bv_xw_x - h_3w)\,dxdt = \int_{L_1}^{L_2} u_1\phi(0)\,dx - \int_{L_1}^{L_2} u_0\phi_t(0)\,dx\\ &\qquad\qquad + \int_0^{L_1} v_1 w(0)\,dx - \int_0^{L_1} v_0\phi_t(0)\,dx\end{aligned}$$

y

$$\int_0^T\int_{L_1}^{L_2}(-\theta\psi_t + k\theta_x\psi_t - mu_x\psi_t - h_2\psi)\,dxdt = \int_0^{L_1}\theta_0\psi(0)\,dx + m\int_{L_1}^{L_2} u_{0x}\psi(0)\,dx$$

para todo,

$$(\phi, w) \in C^2(I, V), \ \psi \in C^2\left(I, H^1_{L_2}\right)$$

y con apropiado $T \in I$ tal que

$$\phi(T) = \phi_t(T) = \psi(T) = w(T) = w_t(T) = 0$$

La existencia de soluciones de los sistemas $(*), (*)_1$ y $(*)_2$ es dado por el siguiente teorema.

Teorema 4.3 Supongamos que $f \in C^1$ es una función que satisface (1). Tomamos los datos iniciales satisfaciendo

$$(u_0, v_0) \in V, \ (u_1, v_1) \in L^2 \times L^2, \ \theta_0 \in L^2$$

Entonces, existe una solución (u, v, θ) de los sistemas $(*), (*)_1, (*)_2$ satisfaciendo

$$(u, v) \in L^\infty(I, V), \ (u_t, v_t) \in L^\infty\left(I, L^2 \times L^2\right), \ \theta \in L^\infty\left(I, L^2\right) \cap L^2\left(I, H^1_{L_2}\right)$$

Además, si

$$(u_0, v_0) \in \left(H^2 \times H^2\right) \cap V, \ \ (u_1, v_1) \in V, \ \theta_0 \in H^2 \cap H^1_{L^2}$$

Verificando la condición de compatibilidad

$$au_{0x}(L_1) - m\theta_0(L_1) = bv_{0x}(L_1),$$

Entonces la solución satisface

$$\begin{aligned}
&(u, v) \in L^\infty\left(I, \left(H^2 \times H^2\right) \cap V\right), \\
&(u_t, v_t) \in L^\infty(I, V), \\
&(u_{tt}, v_{tt}) \in L^\infty\left(I, L^2 \times L^2\right) \\
&\theta \in L^\infty\left(I, H^2 \cap H^1_{L_2}\right), \\
&\theta_t \in L^\infty\left(I, L^2\right).
\end{aligned}$$

En este caso diremos que (u, θ, v) es una solución fuerte. La solución fuerte es única. Demostraremos el teorema mediante el método estándar de Faedo Galerkin y de convergencias débiles.

Demostración. Denotemos por $\{(\varphi_i, \psi_i); i \in \mathbb{N}\}$ una base de $V \cap \left(H^2 \times H^2\right)$ y por $\{\psi_i; i \in \mathbb{N}\}$ una base de $H^2 \cap H^1_{L_2}$. Denotemos los subespacios generados

$$V_\nu = SG\{(\varphi_1, w_1), \ldots, (\varphi_\nu, w_\nu)\}, \ \ H_\nu = SG\{\psi_1, \ldots, \psi_\nu\}.$$

Escribamos

$$(u^\nu, v^\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i(t)(\varphi_i, w_i), \ \ \theta^\nu = \sum_{i=1}^{\nu} b_i(t)\psi_i$$

Donde u^ν y v^ν satisfacen

$$\int_{L_1}^{L_2} [u^\nu_{tt}\varphi_i + au^\nu_x\varphi_{i,x} - m\theta^\nu\varphi_{i,x} + f(u^\nu)\varphi_i - h_i\varphi_i]dx + \int_0^{L_1}(v^\nu_{tt}w_i + bv^\nu_x w_{i,x} - h_3 w_i)\,dx = 0$$

$$\int_{L_1}^{L_2} (\theta^\nu_t\psi_t + k\theta^\nu_x\psi_{i,x} + mu^\nu_{xt}\psi_i - h_2\psi_i)dx = 0$$

$$(u^\nu(0), v^\nu(0)) = (u_0, v_0), \ \ (u^\nu_t(0), v^\nu_t(0)) = (u_1, v_1), \ \theta^\nu(0) = \theta_0.$$

Para un $t \leq T$ adecuado, donde φ_0, w_0 y ψ_0 son los vectores cero en los respectivos espacios. Replanteando exactamente el esquema clásico de Faedo-Galerkin, obtenemos un sistema de ecuaciones EDO en las variables $a_i(t)$ y $b_i(t)$. Según la teoría estándar de la existencia de EDO, existe una solución continua del sistema, en un intervalo $(0, T_n)$. Usando estimativas a priori implicará de hecho que $T_n = +\infty$. De igual forma teniendo en cuenta estimativas apropiadas para la energía del sistema $E^{\nu}(t)$, definida por

$$E^{\nu}(t) = \frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2} \left[|u_t^{\nu}|^2 + a|u_x^{\nu}|^2 + 2F(u^{\nu})\right] dx + \frac{1}{2}\int_0^{L_1} \left[|v_t^{\nu}|^2 + b|v_x^{\nu}|^2\right] dx$$

Se obtienen los resultados del teorema. ■

Nota 4.4 Con el mismo procedimiento anterior se puede demostrar que cuando el dato inicial satisface

$$\begin{array}{ll} (u_0, v_0) \in \left(H^3 \times H^3\right) \cap V, & (u_t, v_t) \in \left(H^2 \times H^2\right) \cap V, \\ (u_2, v_2) \in \left(H^1 \times H^1\right) \cap V, & \theta \in H^3 \cap H^1_{L_2} \end{array}$$

Verificando la condición de compatibilidad

$$au_{0x}(L_1) - m\theta_0(L_1) = bv_{0x}(L_1)$$

Donde

$$(u_2, v_2) = (au_{0xx} - m\theta_{0x} - f(u_0) + h_1(x), bv_{0xx} + h_3),$$

Entonces la solución satisface

$$\begin{array}{l} (u, v) \in L^{\infty}\left(I, H^3 \times H^3\right) \cap L^{\infty}\left(I, L^2 \times L^2\right), \\ (u_t, v_t) \in L^{\infty}\left(I, H^2 \times H^2\right), \\ (u_{tt}, v_{tt}) \in L^{\infty}\left(I, H^1 \times H^1\right), \\ \theta \in L^{\infty}\left(I, H^3 \cap H^1_{L_2}\right) \cap L^{\infty}\left(I, H^1\right). \end{array}$$

Cuando (u, θ, v) satisface las regularidades anteriores diremos que (u, θ, v) es una H^3-solución.

5. Estimativas de la energía

En los siguientes lemas probaremos las propiedades disipativas de los sistemas $(*)$, $(*)_1$ y $(*)_2$. Asumiremos que f es una función de Lipschitz y $\mu > 0$es una constante de Lipschitz y suficientemente pequeño. Análisis similares como en el referente [11] Marzacchi A, Muñoz R. Naso M. G., tenemos los Lema 5.1, Lema 5.2 y Lema 5.3.

Lema 5.1 Supongamos que (u, θ, v) es una solución fuerte de los sistemas $(*)$, $(*)_1$ y $(*)_2$. Entonces la identidad de la energía se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_1(t) = -k\int_{L_1}^{L_2} |\theta_x|^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} (h_1 u_t + h_2\theta)\, dx + \int_0^{L_1} h_3 v_t dx \tag{3}$$

Donde

$$\mathcal{E}_1(t) = \frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2} \left(|u_t|^2 + a|u_x|^2 + |\theta|^2\right) dx + \frac{1}{2}\int_0^{L_1} \left(|v_t|^2 + b|v_x|^2\right) dx + \int_{L_1}^{L_2} F(u) dx$$

En particular, si $h_i \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3)$, tenemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_1(t) = -k\int_{L_1}^{L_2} |\theta_x|^2 dx$$

Demostración. Multiplicando a la primera, segunda y tercera ecuación de $(*)$ por u_t, θ, v_t respectivamente e integrando en los intervalos respectivos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{L_1}^{L_2} \left[\, |u_t|^2 + a|u_x|^2 + 2F(\, u)\,\right] dx + m\int_{L_1}^{L_2} \theta_x u_t dx = \int_{L_1}^{L_2} h_1 u_t dx - \left[au_x(L_1, t) - m\theta(L_1, t)\right] u_t(L_1, t) \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{L_1}^{L_2}|\theta|^2dx\right)+k\int_{L_1}^{L_2}|\theta_x|^2dx+m\int_{L_1}^{L_2}\theta u_{xt}dx=\int_{L_1}^{L_2}h_2\theta dx \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^{L_1}|v_t|^2+b\,|v_x|^2\right)dx\right]-bv_x\left(L_1,t\right)v_t\left(L_1,t\right)=\int_0^{L_1}h_3v_tdx \tag{6}$$

De (4) y (5) y considerando las condiciones de frontera se obtiene (3) ■

Lema 5.2 Supongamos que (u,θ,v) es una H^3 -solución de los sistemas $(*)$, $(*)_1$ y $(*)_2$. Entonces, tenemos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_2\left(t\right)=-k\int_{L_1}^{L_2}|\theta_{xt}|^2dx-\int_{L_1}^{L_2}f'\left(u\right)u_tu_{tt}dx \tag{7}$$

Donde

$$\mathcal{E}_2\left(t\right)=\frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2}\left(|u_{tt}|^2+a|u_{xt}|^2+|\theta_t|^2\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^{L_1}\left(|v_{tt}|^2+b|v_{xt}|^2\right)dx$$

Demostración. Diferenciando las tres ecuaciones de $(*)$ con respecto a t y utilizando el mismo procedimiento como el lema 5.1, conseguimos (7). ■

Lema 5.3 Supongamos que (u,θ,v) es una H^3- solución de los sistemas $(*)$, $(*)_1$y $(*)_2$.

Entonces, tenemos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_3\left(t\right)=-ak\int_{L_1}^{L_2}|\theta_{xx}|^2dx+a\int_{L_1}^{L_2}f\left(\ u\right)u_{xxt}dx+m\theta_t\left(L_2,t\right)u_{tt}\left(L_2,t\right)$$
$$-\,am\theta_x\left(L_1,t\right)u_{xt}\left(L_1,t\right)\,-a\int_{L_1}^{L_2}(\ h_1u_{xxt}+h_2\theta_{xx})dx-b\int_0^{L_1}h_3v_{xxt}dx. \tag{8}$$

Donde

$$\mathcal{E}_3\left(t\right)=\frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2}\left(|u_{xt}|^2+a|u_{xx}|^2+|\theta_x|^2\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^{L_1}\left(|v_{xt}|^2+b|v_{xx}|^2\right)dx$$

En particular, si $h_i\equiv 0\,(i=1,2,3)$tenemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_3\left(t\right)=-ak\int_{L_1}^{L_2}|\theta_{xx}|^2dx+a\int_{L_1}^{L_2}f\left(u\right)u_{xxt}dx+m\theta_t\left(L_2,t\right)u_{tt}\left(L_2,t\right)-am\theta_x\left(L_1,t\right)u_{xt}\left(L_1,t\right)$$

Demostración. Multiplicando las ecuaciones (2), (3) y (4) de $(*)$ por $-au_{xxt},-a\theta_{xx}$ y $-bv_{xxt}$ respectivamente e integrando sobre los intervalos respectivos y considerando los resultados obtenidos se obtiene (8). ■

Definimos la cantidad

$$\mathcal{H}\left(t\right)=\int_{L_1}^{L_2}\left(N_0\theta_{xx}-u_tu_{xx}+C_0uu_t\right)dx+C_0\int_0^{L_1}vv_tdx.$$

Donde N_0 y C_0 son constantes positivas, y denotamos

$$B=|u_{xx}\left(L_1,t\right)|^2+|u_{tt}\left(L_1,t\right)|^2,\quad B_0\left(t\right)=|u_{xt}\left(L_2,t\right)|^2.$$

Ahora, tenemos

Lema 5.4 Si (u,θ,v)es una H^3-solución de los sistemas $(*)$, $(*)_1$, $(*)_2$, entonces, se tiene la siguiente desigualdad

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}\left(t\right)\leq-\frac{a}{4}\int_{L_1}^{L_2}|u_{xx}|^2dx-\frac{mN_0}{4}\int_{L_1}^{L_2}|u_{xt}|^2dx+\frac{k^2N_0}{m}\int_{L_1}^{L_2}|\theta_{xx}|^2dx-\frac{aC_0}{8}\int_{L_1}^{L_2}|u_x|^2dx$$
$$+\,C_0\lambda_2^2\int_0^{L_1}|v_{xt}|^2dx+\delta B\left(\ t\right)-\frac{1}{8a}\int_{L_1}^{L_2}|u_{tt}|^2dx+C_\delta\int_{L_1}^{L_2}|\theta_x|^2dx$$
$$+\,C_1\left[\int_{L_1}^{L_2}\left(|h_1|^2+|h_2|^2\right)dx+\int_0^{L_1}|h_3|^2dx\right]$$

Nota 5.5 Considerando: $u(L_2) = 0$, $v(0) = 0$, $\theta(L_2) = 0$, $\lambda_1$constante de Poincaré de u dependiendo solo del intervalo (L_1, L_2), constante de Poincaré de v dependiendo solo del intervalo $(0, L_1)$, N_0 y C_0 son constantes positivas a definir posteriormente, se tiene la demostración del Lema:

Demostración de lema 5.4
Multiplicando la segunda ecuación de $(*)$ por u_{xt}

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{L_1}^{L_2}\theta u_{xt}dx &= \int_{L_1}^{L_2}\theta_t u_{xt}dx + \int_{L_1}^{L_2}\theta u_{xt}dx \\
&= k\int_{L_1}^{L_2}\theta_{xx}u_{xt}dx - m\int_{L_1}^{L_2}|u_{xt}|^2dx + \int_{L_1}^{L_2}h_2u_{xt}dx \\
&\qquad - \theta(L_1)\, u_{tt}(L_1) - \int_{L_1}^{L_2}\theta_x u_{tt}dx \\
&\leq \frac{k^2}{m}\int_{L_1}^{L_2}|\theta_{xx}|^2dx - \frac{m}{2}\int_{L_1}^{L_2}|u_{xt}|^2dx + \frac{\delta}{N_0}\int_{L_1}^{L_2}|u_{tt}|^2dx + \frac{\delta}{N_0}|u_{tt}(\ L_1, t)\ |^2 \\
&\qquad + C_2\int_{L_1}^{L_2}|h_2|^2dx + C_\delta\int_{L_1}^{L_2}|\theta_x|^2dx \qquad (9)
\end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación de $(*)$ por $-u_{xx}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\int_{L_1}^{L_2}u_t\theta_{xx}dx &= -\int_{L_1}^{L_2}u_{tt}u_{xx}dx - \int_{L_1}^{L_2}u_tu_{xxt}dx \\
&= -\int_{L_1}^{L_2}a|u_{xx}|^2dx + \int_{L_1}^{L_2}m\theta_xu_{xx}dx + \int_{L_1}^{L_2}f(\ u)\, u_{xx}dx \\
&\quad - \int_{L_1}^{L_2}h_1u_{xx}dx + \int_{L_1}^{L_2}|u_{xt}|^2dx + u_{xt}(L_1, t)\, u_t(L_1, t) \\
&\leq -\frac{a}{4}\int_{L_1}^{L_2}|u_{xx}|^2dx - \frac{1}{4a}\int_{L_1}^{L_2}|u_{tt}|^2dx + C_\delta\int_{L_1}^{L_2}|u_{xt}|^2dx \\
&\qquad + \frac{10\lambda_1^2\mu^2}{a}\int_{L_1}^{L_2}|u_x|^2dx + C_3\int_{L_1}^{L_2}|h_1|^2dx \\
&\qquad + C_4\int_{L_1}^{L_2}|\theta_x|^2dx + \delta|u_{xt}(\ L_1, t)\ |^2 \qquad (10)
\end{aligned}$$

De la primera ecuación de $(*)$, se tiene:

$$-\frac{a}{2}|u_{xx}|^2 \leq -\frac{1}{4a}|u_{tt}|^2 + \frac{m^2}{2a}|\theta_x|^2 + \frac{4}{a}|f(u)|^2 + \frac{4}{a}|h_1|^2$$

y

$$\int_{L_1}^{L_2}|f(u)|^2dx = \int_{L_1}^{L_2}|f(u) - f(0)|^2dx \leq \int_{L_1}^{L_2}|\mu u|^2dx \leq \lambda_1^2\mu^2\int_{L_1}^{L_2}|u_x|^2dx$$

Donde μ es una constante tal que $\dfrac{10\lambda_1^2\mu^2}{a} < \dfrac{aC_0}{4}$.

Multiplicando la primera y tercera ecuación de $(*)$ por u y v respectivamente y utilizando las condiciones de frontera obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\int_{L_1}^{L_2}uu_tdx + \int_0^{L_1}vv_tdx\right] &= \int_{L_1}^{L_2}|u_t|^2dx + \int_0^{L_1}|v_t|^2dx - a\int_{L_1}^{L_2}|u_x|^2dx - b\int_0^{L_1}|v_x|^2dx \\
&\quad - mu(L_1, t)\,\theta(L_1, t)\ - m\int_{L_1}^{L_2}u\theta_xdx - \int_{L_1}^{L_2}f(\ u)\, udx \\
&\quad + \int_{L_1}^{L_2}h_1udx + \int_0^{L_1}h_3vdx. \qquad (11)
\end{aligned}$$

De la desigualdad de Young, se tiene

$$m\,u\,(L_1,t)\,\theta\,(L_1,t)\ \leq \varepsilon \int_0^{L_1} |u_x|^2 dx + C_\varepsilon \int_{L_1}^{L_2} |\theta_x|^2 dx$$

Luego en (10) :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\int_{L_1}^{L_2} u u_t dx + \int_0^{L_1} v v_t dx\right] &\leq \frac{-a}{2}\int_{L_1}^{L_2} |u_x|^2 dx - b\int_0^{L_1} |v_x|^2 dx + C_5 \int_{L_1}^{L_2} |\theta_x|^2 dx \\ &+ \lambda_1^2 \int_{L_1}^{L_2} |u_{xt}|^2 dx + \lambda_2^2 \int_0^{L_1} |v_{xt}|^2 dx + C_6\left[\int_{L_1}^{L_2} |h_1|^2 dx + \int_0^{L_1} |h_3|^2 dx\right] \qquad (12)\end{aligned}$$

Siguiendo las ecuaciones (9), (10) y (12) concluimos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{H}(t) &\leq \delta B(t) - \frac{a}{4}\int_{L_1}^{L_2} |u_{xx}|^2 dx - \left(\frac{N_0 m}{2} - C_\delta - C_0\lambda_1^2\right)\int_{L_1}^{L_2} |u_{xt}|^2 dx \\ &+ \frac{N_0 k^2}{m}\int_{L_1}^{L_2} |\theta_{xx}|^2 dx - \left(\frac{aC_0}{2} - 5\lambda_1^2\mu^2\right)\int_{L_1}^{L_2} |u_x|^2 dx \\ &- \left(\frac{1}{4a} - \delta\right)\int_{L_1}^{L_2} |u_{tt}|^2 dx + C_0\lambda_2^2 \int_0^{L_1} |v_{xt}|^2 dx + C_\delta \int_{L_1}^{L_2} |\theta_x|^2 dx \\ &+ C_1\left\{\int_{L_1}^{L_2} \left(|h_1|^2 + |h_2|^2\right) dx + \int_0^{L_1} |h_3|^2 dx\right\}\end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado el lema 5.4. ■

Ahora bien introducimos las siguientes integrales

$$\mathcal{L}_1(t) = -\int_{L_1}^{L_2} w_1 u_{tt} u_{xt} dx,\ \ \mathcal{L}_2(t) = -\int_0^{L_1} w_2 v_{tt} v_{xt} dx$$

Donde

$$w_1(x) = \frac{L_1}{4(L_1 - L_2)}(x - L_2)\,,\ x \in [L_1, L_2]$$

Y

$$w_2(x) = x - \frac{1}{2}L_1,\ x \in [0, L_1]$$

Lema 5.6 Sea (u,θ,v)un H^3-solución de los sistemas $(*)$, $(*)_1$, $(*)_2$ y sea $h_1 \in L^2$, entonces se tiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_1(t) \leq -\frac{L}{2}\left[B(t) + B_0(t)\right] + D\int_{L_1}^{L_2}\left(|u_{tt}|^2 + |u_{xt}|^2 + |\theta_{xt}|^2\right) dx \qquad (13)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{L}_2(t) &\leq \frac{L_1}{4}\left(\frac{2a^2}{b} + 1\right) B(t) - \frac{bL}{8}|v_{xt}(\ L_1,t)\ |^2 + \frac{m^2\lambda_1^2 L_1}{2b}\int_{L_1}^{L_2} |\theta_{xt}|^2 dx \\ &- \frac{L_1}{4(L_2 - L_1)}\int_0^{L_1}\left(\ |v_{tt}|^2 + |v_{xt}|^2\right) dx \qquad (14)\end{aligned}$$

Donde $L = min\,\{L_1, a\,L_1\}$ y $D = \dfrac{1}{2}\left\{1 + aL_1\left(2 + \mu^2\lambda_1^2\right) + m^2\right\}$

Demostración. Aplicando lema 3.2 con

$$z = -m\theta_{xt} - f'(u)\,u_t,\ x_1 = 0,\ x_2 = L_1,\ \sigma = a$$

a la derivada respecto al tiempo de la primera ecuación del sistema $(*)$ con w_1 en reemplazo de q, obtenemos (13). Procediendo similarmente, obtenemos (14). ■

Lema 5.7 Sea (u,θ,v) un H^3-solución de los sistemas $(*)$, $(*)_1$y $(*)_2$; $h_1,h_2,h_3\in L^2$, entonces se tiene la siguiente desigualdad,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\mathcal{H}(t)+\delta_0\mathcal{L}_1(t)\right]+\frac{\delta_0 b}{2\left(2a^2+b\right)}\left(\frac{L}{L_1}\mathcal{L}_2(t)\right) \le & -\frac{L^2b^2\delta_0}{16\left(2a^2+b\right)L_1}|v_{xt}(\ L_1,t)\ |^2\\ & -\frac{L\delta_0}{8}\left[B(t)+B_0(t)\right]-\frac{a}{4}\int_{L_1}^{L_2}|u_{xx}|^2dx\\ & +\frac{mN_0}{8}\int_{L_1}^{L_2}|u_{xt}|^2dx-\frac{1}{16a}\int_{L_1}^{L_2}|u_{tt}|^2dx\\ & -\frac{aC_0}{8}\int_{L_1}^{L_2}|u_x|^2dx+\frac{k^2N_0}{m}\int_{L_1}^{L_2}|\theta_{xx}|^2dx\\ & +C_7\int_{L_1}^{L_2}\left(\ |\theta_x|^2+|\theta_{xt}|^2\right)dx\\ & -\frac{bL\delta_0}{16\left(2a^2+b\right)\left(L_2-L_1\right)}\int_0^{L_1}\left(\ |v_{tt}|^2+|v_{xt}|^2\right)dx\\ & +C_8\left\{\int_{L_1}^{L_2}\left(|h_1|^2+|h_2|^2\right)dx+\int_0^{L_1}|h_3|^2dx\right\}\end{aligned}$$

Demostración. Usando el lema 5.4 y primera parte del lema 5.6, esto es, (13) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dh}\left[\mathcal{H}(t)+\delta_0\mathcal{L}_1(t)\right] \le & \left(\frac{L\delta_0}{2}-\delta\right)\left[B(t)-B_0(t)\right]-\left(\frac{1}{8a}-\delta_0 D\right)\int_{L_1}^{L_2}|u_{tt}|^2\,dx\\ & -\left(\frac{mN_o}{4}-\delta_0 D\right)\int_{L_1}^{L_2}|u_{xt}|^2\,dx-\frac{a}{4}\int_{L_1}^{L_2}|u_{xx}|^2\,dx\\ & -\frac{aC_0}{8}\int_{L_1}^{L_2}|u_x|^2\,dx\frac{k^2N_0}{m}\int_{L_1}^{L_2}|\theta_{xx}|^2\,dx\\ & +C_9\int_{L_1}^{L_2}\left(|\theta_{xt}|^2+|\theta_x|^2\right)dx+C_0\lambda_2^2\int_0^{L_1}|v_{xt}|^2\,dx\\ & +C_1\left\{\int_{L_1}^{L_2}\left[|h_1|^2+|h_2|^2\right]dx+\int_0^{L_1}|h_3|^2\,dx\right\}\end{aligned}$$

Entonces considerando δ suficientemente pequeño tal que, $\delta<\dfrac{L\delta_0}{4}$ y se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\mathcal{H}(t)+\delta_0\mathcal{L}_1(t)\right] \le & \frac{L\delta_0}{4}\left[B(t)-B_0(t)\right]-\frac{1}{16a}\int_{L_1}^{L_2}|u_{tt}|^2\,dx\\ & \frac{mN_o}{8}\int_{L_1}^{L_2}|u_{xt}|^2\,dx-\frac{a}{4}\int_{L_1}^{L_2}|u_{xx}|^2\,dx-\frac{aC_0}{8}\int_{L_1}^{L_2}|u_x|^2\,dx\\ & +\frac{k^2N_0}{m}\int_{L_1}^{L_2}|\theta_{xx}|^2\,dx+C_9\int_{L_1}^{L_2}\left(|\theta_{xt}|^2+|\theta_x|^2\right)dx\\ & +C_0\lambda_2^2\int_0^{L_1}|v_{xt}|^2\,dx+C_1\left\{\int_{L_1}^{L_2}\left[|h_1|^2+|h_2|^2\right]dx+\int_0^{L_1}|h_3|^2\,dx\right\}\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la segunda parte del lema 5.6 dado en (14), obtenemos,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\mathcal{H}(t)+\delta_0\mathcal{L}_1(t)+\frac{\delta_{0b}}{2\left(2a^2+b\right)}\left(\frac{L}{L_1}\right)\mathcal{L}_2(t)\right] \le & -\frac{L^2b^2\delta_0}{16\left(2a^2+b\right)L_1}|v_{xt}(L_1,t)|^2\\ & -\frac{L\delta_0}{8}\left[B(t)+B_0(t)\right]-\frac{a}{4}+\int_{L_1}^{L_2}|u_{xx}|^2\,dx-\frac{mN_0}{8}\int_{L_1}^{L_2}|u_{xt}|^2\,dx\end{aligned}$$

$$- \frac{1}{16a}\int_{L_1}^{L_2} |u_{tt}|^2 \, dx - \frac{aC_0}{8}\int_{L_1}^{L_2} |u_x|^2 \, dx + \frac{k^2 N_0}{m}\int_{L_1}^{L_2} |\theta_{xx}|^2 \, dx$$
$$+ C_7 \int_{L_1}^{L_2} \left(|\theta_x|^2 + |\theta_{xt}|^2\right) dx$$

Introducimos la siguiente funcional

$$\mathcal{L}(t) = M_0\mathcal{E}_1(t) + M_0\mathcal{E}_2(t) + N\mathcal{E}_3(t) - Na\int_{L_1}^{L^2} f(u)\, u_{xx} dx + \mathcal{H}(t) + \delta_0\mathcal{L}_1(t) + \frac{\delta_{0b}}{2(2a^2+b)}\frac{L}{L_1}\mathcal{L}_2(t)$$

Donde M_0, N, δ_0 son constantes positivas; M_0, N suficientemente grande y se fijan en el desarrollo del teorema. ■

Teorema 5.8 Sea (u, θ, v) una solución fuerte de los sistemas $(*), (*)_1, (*)_2$ y sean $h_1, h_3 \in H^1$, $h_2 \in L_2$. Entonces ,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \le -\frac{\gamma}{C_{10}}\mathcal{L}(t) + \Lambda$$

Donde γ, C_{10}, Λ son constantes positivas
En particular, si $h_i \equiv 0, i \equiv 1, 2, 3$ se tiene,

$$M_0\mathcal{E}_1(t) + M_0\mathcal{E}_2(t) + N\mathcal{E}_3(t) \le [\mathcal{E}_1(0) + M_0\mathcal{E}_2(0) + N\mathcal{E}_3(0)]\, e^{-\frac{\gamma}{C_{10}}t}$$

Demostración. Supongamos que (u, θ, v) son H^3- solución, nuestra conclusión se siguen por argumentos estándar. Usando los lemas anteriores y eligiendo M_0, N suficientemente grande, tenemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \le \gamma[\mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_2(t) + \mathcal{E}_3(t)] + C_h \le -\frac{\gamma}{C_{10}}\mathcal{L}(t) + C_n$$

Donde $\gamma > 0, C_n < +\infty, C_{10} < +\infty$ son constantes positivas, y la siguiente desigualdad se tiene presente,

$$C_{11}[\mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_2(t) + \mathcal{E}_3(t)] \le \mathcal{L}(t) \le C_{12}[\mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_2(t) + \mathcal{E}_3(t)]$$

Donde, C_{11}, C_{12} son constantes positivas. ■

6. Conclusión

El trabajo realizado por Marzocchi [11] es mejorado por un análisis más rigoroso en la obtención de la existencia y unicidad de solución del sistema planteado. Como por ejemplo la equivalencia de normas, estimativas de decaimiento y la existencia de solución débil y regularidad de soluciones y como también el espacio de soluciones. Se pueden crear nuevos problemas incrementando término de memoria en la ecuación que nos indicará una información precedente del fenómeno físico

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Hansen S.W.: Exponential energy decay in a linear thermoelastic rod [J]. Journal of Mathematical Analysis and Application, 1992, 167(2):429-442.

[2] Bardos C., Lebeau G., Rauch J.: Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1992, 3(5); 1024-1065.

[3] Komornik V.: Rapid boundary stabilization of the wave equation [J]. SIAM journal on Control and Optimization, 1991, 129(1): 197-208.

[4] Gao Hong-jun y Jaime Muñoz: Global existence and decay for the semilinear thermoelastic contact problem. J. Differential Equation 186(2000); 52-68.

[5] Gao Hung y Zhao Yu-Juan: Asymptotic behavior and exponential stability for thermoelastic problem with localized damping. Applied Mathematics and Mechanics, 2006, 27(11); 1557-1568.

[6] Nakao M.: Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation [J]. Mathematiche Annlen, 199, 305(3): 403-417.

[7] Nakao M.: Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation [J]. Israel Journal of Mathematics, 1996, 95:25-42.

[8] Zuazua E.: Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping [J]. Communications in Partial Differential Equations, 1990, 15(2): 205-235.

[9] Jiang S.: Global solutions of the Neumann problem in one-dimensional nonlinear thermoelasticity .Nonlinear Analysis. 1992; 21: 65-75.

[10] Kim J.U.: On the energy decay of a linear thermoelastic bar and plate. SIAM Journal on Mathematical Analysis 1993; 51: 535-545.

[11] Marzocchi A., Muñoz Rivera J.E., Naso M.G.: Asymptotic behaviour and exponential stability for a transmission problema in thermoelasticity [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1992, 23(5): 889-899.

[12] Kawashima S., Shibata Y.; On the Neumann problem of one-dimensional nonlinear thermoelasticity with time independent external forces. Czechoslovak Mathematical Journal 1995; 45(1): 39-67.

[13] Muñoz Rivera J.E.; Energy decay rates in linear thermoelasticity. I Fako del´Funkcialaj Ekvacioj 1992; 35: 19-30.

[14] Burns J.A., Liu Z., Zheng S.; On the energy decay of a linear thermoelastic bar. Journal of Mathematiccal Analysis and Application 1993; 179: 574-591.

[15] Lions J.L.: Controbalite Exacte, Perturbations et Stabilization de Systemes distributes. Tome I Masson: Paris, 1988.