PESQUIMAT 20(2): 21–36 (2017) ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
http://dx.doi.org/10.15381/pes.v20i2.13963 Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Elección de portafolio óptimos de activos con y sin riesgo

Luis Javier Vásquez Serpa, [1] *Katherine Dextre Osco,* [2]
Dominique Mejia Quiñones [3] *y Ada Calapuja Escobedo* [4]

Resumen: En este trabajo de investigación presentaremos la "Elección de portafolios óptimos de activos con y sin riesgo", donde planteamos un modelo de optimización de portafolios eficientes basado en la teoría de Markowitz (Activos con Riesgos), quien ganó el Premio Nobel de Economía en 1990 por sus aportes al análisis de portafolios de inversión y a los métodos de financiación corporativa. Markowitz basándose en su teoría, define que para un rendimiento dado el riesgo que le deparan sea mínimo, éste modelo es el más eficiente a la hora de reducir riesgos. Por otro lado, si optamos por un portafolio óptimo de acivos sin riesgo nos apoyaremos en el Modelo de Sharpe, que establece una fijación de precios de activos financieros, en el cual un inversionista puede elegir una exposición al riesgo a través de una combinación de valores de renta fija y un portafolio de renta variable.

Palabras clave: Portafolio; activos; métodos de financiación; modelo de Markowitz; eficiente; riesgo; modelo de Sharpe; renta fija; renta variable.

Choice of optimal asset portfolio with and without risk

Abstract: In this research we will present the "Choice of optimal portfolios of assets with and without risk", where we propose an efficient portfolio optimization model based on the theory of Markowitz (Assets with Risks), who won the Nobel Prize in Economics in 1990 for their contributions to the analysis of investment portfolios and corporate financing methods. Markowitz based on his theory, defines that for a given performance the risk that they have is minimal, this model is the most efficient when it comes to reducing risks. On the other hand, if we opt for an optimal risk-free portfolio, we will rely on the Sharpe Model to establish a pricing of financial assets, in which an investor can choose a risk exposure through a combination of income values fixed and a variable income portfolio.

Keywords: Portfolio; assets; financing methods; Markowitz model; efficient; risk; sharpe model; fixed income, equities.

Recibido: 01/10/2017. *Aceptado*: 16/12/2017. *Publicado online*: 31/12/2017

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: luis.vasquez2@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: 12140119@unmsm.edu.pe
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: 09140017@unmsm.edu.pe
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: 11140409@unmsm.edu.pe

1. Introducción

La presente investigación pertenece al área de finanzas; finanzas corresponde a todo lo relativo con movimiento de dinero, cuyo objetivo es optimizar y lograr la multiplicación del dinero; actualmente los mercados financieros ofrecen diversas alternativas de inversión, que incluyen una gran variedad de activos, los cuales se diferencian entre sí por el nivel de rentabilidad, liquidez, volatilidad y bursatilidad asociada con los mismos, entre otras características propias del mercado; lo que conlleva a que los inversionistas utilicen diversas herramientas que les permitan escoger inversiones óptimas incurriendo en un nivel de riesgo determinado. En este caso, el trabajo presentado se enfoca en la "Elección de portafolios óptimos de activos con y sin riesgo". Un portafolio o cartera se puede definir como una combinación de las inversiones realizadas por una institución o un individuo; un inversionista siempre va a tratar de maximizar su rentabilidad y minimizar su riesgo, el problema que se presenta en esta situación es cómo repartir su dinero entre diferentes opciones de inversión, ante esta situación, el inversionista debe escoger un grupo de activos para conformar lo que se conoce como portafolio. Los activos del portafolio pueden incluir cuentas bancarias, acciones, bonos, opciones, certificados de oro, warrants, materias primas, contratos de futuro, las instalaciones de producción, o cualquier otro elemento que se espera que conserve su valor. Las características principales del portafolio óptimo dependiedo del riesgo son dos. En el presente documento se plantea un modelo de optimización de portafolios eficientes basado en la teoría de Markowitz (Activos con Riesgos), quien ganó el Premio Nobel de Economía en 1990 por sus aportes al análisis de portafolios de inversión y a los métodos de financiación corporativa. Markowitz basándose en su teoría, define que para un rendimiento dado el riesgo que le deparan sea mínimo, éste modelo es el más eficiente a la hora de reducir riesgos. Por otro lado, si optamos por un portafolio óptimo de acivos sin riesgo nos apoyaremos en el Modelo de Sharpe establece una fijación de precios de activos financieros, en el cual un inversionista puede elegir una exposición al riesgo a través de una combinación de valores de renta fija y un portafolio de renta variable. A continuación se revisa de manera general la teoría del portafolio y como un inversionista puede determinar su portafolio óptimo; y además se explica brevemente los modelos más empleados en finanzas, el cual estima la relación existente entre rentabilidad y el riesgo de un portafolio determinado.

2. Preliminares

Para realizar nuestro estudio debemos contar con herramientas estadísticas como una base para el análisis y una proyección técnica, motivo popr el cual se hablará de las herramientas más utilizadas para la elección optima de un portafolio.

Varianza (σ^2)

Es una herramienta estadística que cuantifica el grado de dispersión de los valores de un conjunto de observaciones de una variable(acciones en nuestro caso) respecto a un Valor central de dichas observaciones, representado por su Media Aritmética. Se define como la suma de los cuadrados de la desviación de cada una de las observaciones de la variable respecto de su medida, dividida por el número de observaciones [6].

$$Var(x) = \left[(x - E(x))^2\right]$$

$$Var(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2}{n - 1}$$

Covarianza

Es una medida del grado en que dos variables (acciones) se mueven en la misma dirección o en direcciones opuestas, una respecto a la otra, es decir es un indicador para ver si las acciones están relacionadas entre sí.

Coeficiente de Correlación

El coeficiente de correlación se emplea para determinar el grado de correlación existente entre los distintos rendimientos de los instrumentos de inversión que conforman el portafolio. La ventaja que tiene este coeficiente es que los resultados del coeficiente de correlación están acotados,$-1 < p_{ij} < 1$. Nos permite observar como varia el rendimiento del instrumento j al variar el rendimiento del instrumento i. Cuando $p_{ij} = 1$ quiere decir que los rendimientos de dichos instrumentos varia en forma directamente proporcional a través del tiempo, es decir, si uno aumenta el otro también lo hará y viceversa. (Ver Figura 1)

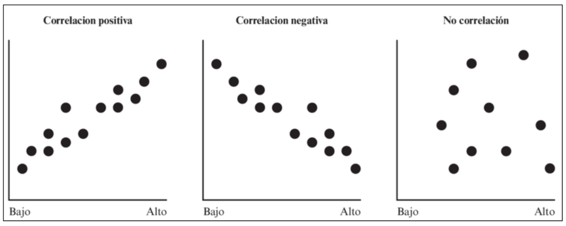

Figura 1. Tipos de correlación

Al realizar los estudios de la correlación de las acciones en un portafolio podemos analizar lo siguiente: si tenemos dos acciones con correlación igual a 1, tienen un comportamiento similar, si es igual a 0 no se encuentran correlacionadas y si es -1 su correlación es negativa y seria nuestra mejor opción para conformar el portafolio.

Coeficiente Beta(β)

Este coeficiente compara el riesgo sistemático de un valor(cualidad que poseen los bienes según su medida de proporcionar utilidad o satisfacción a su poseedor) midiendo su volatilidad con el mercado. Se halla su valor con el Coeficiente de covarianza del valor y la covarianza del Mercado.(Ver Figura 2)

$$\beta_x = \frac{Cov(x, M)}{Var(M)}$$

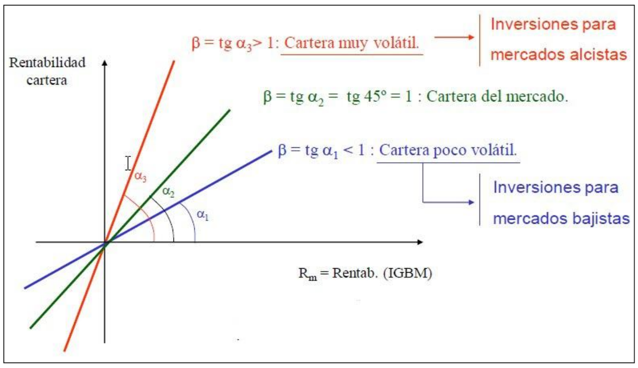

Figura 2. Coeficiente Beta

En finanzas β está relacionado directamente con el riesgo de cada activo que conforma el portafolio o cartera.
Daremos definiciones técnicas de términos que veremos en el presente artículo.

Portafolio o Cartera

En finanzas, un portafolio es una colección de diferentes activos o instrumentos financieros tales como acciones de diferentes empresas, bonos o dinero en efectivo, con el objetivo de sacar una rentabilidad del mercado, esta combinación de inversiones lo puede realizar una institución o un individuo.
La creación de un portafolio es parte de una estrategia de diversificación donde se busca minimizar el riesgo para que se optimizen los retornos [7].

Activos

Un activo financiero es un instrumento financiero que otorga a su comprador el derecho a recibir ingresos futuros por parte del vendedor, es decir, es un derecho sobre los activos reales del emisor y el efectivo que generen. Pueden ser emitidas por cualquier unidad económica (empresa, Gobierno, etc), los activos financieros no suelen tener un valor físico. El comprador de un activo financiero posee un derecho (un activo) y el vendedor una obligación (un pasivo).

Rendimiento

Se refiere al porcentaje de ganancia, rentabilidad o utilidad que se obtiene con respecto a la inversión durante cierto periodo de tiempo. Generalmente se genera un mayor rendimiento cuando se prolonga el plazo de la inversión, un activo financiero que ofrezca mayor riesgo usualmente tiene un mayor riesgo implícito [7].

Riesgo

El riesgo financiero hace referencia a la incertidumbre producida en el rendimiento de una inversión, esto se debe a los cambios producidos del sector en el que se opera, a la imposibilidad de devolución del capital por una de las partes y a la inestabilidad de los mercados financieros.
En la actualidad hemos visto los riesgos financieros en el atentado de las Torres Gemelas haciendo especial hincapié en las cotizaciones españolas, como señala Alexander Schindler,“*el impacto del terrorismo sobre los mercados bursátiles resulta inapreciable a largo plazo. Los mercados se acostumbran a las acciones terroristas y se recuperan rápidamente de sus efectos. La incertidumbre se traslada entonces a los mercados de derivados, que mediante la prima de riesgo evalúan la inestabilidad a largo plazo* ”[1] .

Plazo

En economía, se refiere a un período de tiempo cuya amplitud no es específica, sino que depende del estudio que se desee hacer sobre el grado de ajuste de las variables pertinentes al análisis. Este es determinado por el inversionista, puede ser a corto, mediano o largo plazo, es el periodo de tiempo durante el cual no se puede disponer del monto invertido hasta que se cumpla cierto plazo conocido como vencimiento.

[1] Declaraciones de Alexander Schindler, miembro del consejo de administración de Union Investment de Alemania, recogidas en VV.AA. (2004).

Liquidez

Es la facilidad con que un activo financiero puede ser vendido o comprado, esto representa por supuesto la rapidez con la cual puede convertirse en efectivo para el inversionista. Por ejemplo, una acción puede ser vendida en minutos o días. Sin embargo, las propiedades, como los terrenos o edificios, pueden tardar semanas, meses o incluso años para convertirse en efectivo.

Diversificación

Es la elección de diferentes instrumentos financieros de inversión que conforman al portafolio. Dichos elementos tienen características propias distintas entre sí, con lo cual se busca disminuir el riesgo total del portafolio, de tal manera que sea posible obtener el rendimiento esperado por el inversionista. La elección de elementos diversificados (que difieren en sus características) permite equilibrar las pérdidas y ganancias que se tienen con los distintos activos. La seguridad de un instrumento financiero se refiere a la relación existente entre riesgo y rendimiento los cuales guardan una relación directamente proporcional. (Ver figura 3)

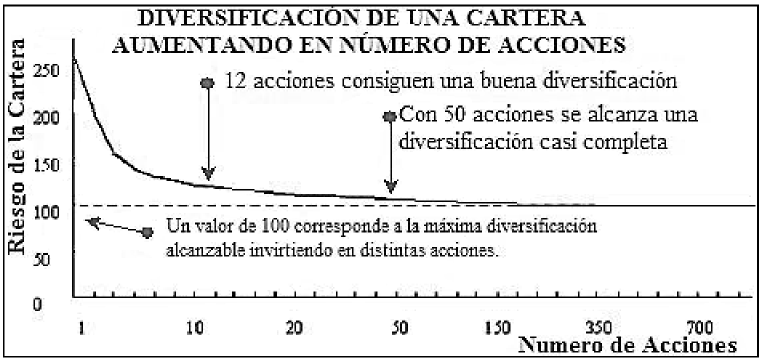

Figura 3. Diversificación de una cartera de acciones
Fuente: Villarreal (2008, p. 52)

3. Modelo de Markowitz

El especialista en análisis de inversiones , Markowitz *(economista norteamericano)* publicó en 1952 su libro *Portfolio Selection*, donde habla sobre como optimizar la elección de un portafolio. Su enfoque revolucionó el campo de las finanzas, entregando un concepto como el de 'portafolios eficientes', que actualmente se aplica en gran cantidad de modelos de construcción de portafolios, por lo cual ganó un premio nobel en 1990, esto ha sido el empuje para que otros investigadores hagan sus aportes con la finalidad de lograr un modelo más consistente y eficaz.
Este modelo está basado en la racionalidad del inversor, es decir el deseo de un rendimiento y el rechazo de un riesgo. Por lo tanto para Markowitz un portafolio de activos financieros es eficiente cuando está compuesto con activos de alta rentabilidad, pero de bajo riesgo, además la correlación entre activos es baja por lo que resultan portafolios altamente óptimos.

3.1. Hipótesis del Modelo de Markowitz

Este modelo parte de algunas hipótesis:

- El rendimiento de cualquier portafolio se considera una variable aleatoria. El valor que se espera es utilizado para cuantificar la rentabilidad del portafolio [3].

- La varianza y la desviación estándar son tomados para medir la dispersión, como medida de riesgo de la variable aleatoria.

- La decisión del inversionista va por el camino de optar por un portafolio que le genere mayor rentabilidad asumiendo un riesgo mínimo.

3.2. Formulación

Una de las formas de encontrar este conjunto de portafolios de instrumentos financieros eficientes, es por medio de un modelo de optimización donde se considera una formulación dual:

1. Determinan los pesos que minimizan la varianza sujeto a un rendimiento requerido [1].

$$Min\ \sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

   sujeto a :

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \quad (i = 1, ..., n) \quad ...^2$$

2. Consiste en determinar los pesos w_i, que maximiza el rendimiento esperado del portafolio sujeto a un riesgo máximo.

$$Max\ \ E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i)$$

   sujeto a:

$$\sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \quad (i = 1, ..., n)$$

   donde:

   n: Número de activos financieros.
   R_i: Variable aleatoria del rendimiento del activo. i
   $E(R_i)$: Rendimiento esperado del portafolio.
   W_i:Proporción que el inversionista le dará al activo i.
   $\sigma^2(R_p)$: Varianza del rendimiento del portafolio.
   σ_{ij}: Covarianza entre el rendimiento de los activos ij.

[2] No se permiten operaciones apalancadas, por lo tanto, la suma de los pesos debe ser igual a 1 y Las ventas en corto no son permitidas, entonces, los pesos deben ser mayores o iguales a cero

En cualquiera de estos dos casos optimizando la varianza o el retorno esperado, se hallarán los pesos de los activos, que optimizarán el portafolio con las restricciones dadas, generando así la curva eficiente de portafolio, lo cual genera el alto rendimiento para un riesgo determinado.

Una vez que el problema está resuelto se obtuvieron las proporciones de cada activo en lo cual se va a invertir, una forma de resolver los problemas de optimización es por el método de los multiplicadores de LaGrange [5].

Siguiendo con el modelo, se necesita los retornos esperados de los activos que integrarán el portafolio y la matriz de varianza- covarianza entre los retornos de los activos.

La matriz de varianza-covarianza representa el riesgo de los activos financieros. Su estimación precisa es fundamental en la determinación del portafolio eficiente, ya que contiene información acerca de la volatilidad de los activos financieros.

Una de las desventajas y críticas al modelo es que no se considera la volatilidad de una serie financiera (el comportamiento del mercado no es estable en el tiempo), por lo cual supone que la varianza es constante en el tiempo (homocedasticidad), por el contrario, es muy frecuente la heterocidad, es decir, la varianza tiene cambios sistemáticos en el tiempo [4][5].

3.3. Riesgo y Rendimiento del portafolio

Un portafolio está compuesto por una serie de activos financieros, diversificados en base a la correlación y a la proporción que se le asignara a cada activo [4]. Para medir el riesgo y el rendimiento promedio del portafolio es simplemente aplicar la desviación estándar y la media ponderada respectivamente.
El efecto de la diversificación indica que el riesgo disminuye a medida que se agrega un mayor número de activos al portafolio.

3.4. Riesgo y Rendimiento de un portafolio con dos activos

El rendimiento del portafolio con dos activos financieros R_1 y R_2 es un rendimiento ponderado de los rendimientos esperados $E(R_1)$, $E(R_2)$ con sus pesos correpsondientes w_1, w_2.

$$R_p = w_i E(R_1) + w_2 E(R_2) = \sum_{i=1}^{2} w_i E(R_i)$$

donde:
$E(R_i)$: Rendimiento esperado del activo i.
w_i: Proporción invertida en el activo i.
$\sum_{i=1}^{2} w_i = 1$

El riesgo del portafolio es obtenido a través de la variación, lo cual esta expresado de la siguiente manera:

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_{R_1}^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{R_1 R_2} + w_2^2 \sigma_{R_2}^2.$$

Puede ocurrir que si los rendimientos del portafolio se encuentran muy alejados del promedio, se obtendrá una mayor desviación o variabilidad de los rendimientos lo que representará un mayor riesgo.

3.5. Riesgo y Rendimiento de portafolio con N-activos

De manera análoga a lo anterior, el rendimiento es un promedio ponderado de los rendimientos esperados $E(r_1)$, $E(R_2)$,..., $E(R_n)$ de un grupos de activos financieros.

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i)$$

donde
$E(R_i)$: Rendimiento esperado del activo i
w_i: Proporción invertida en el activo i
n : Total de activos que se analizan.

El riesgo del portafolio es,

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}}$$

Expresándolo matricialmente, la rentabilidad se observaría de la siguiente manera:

$$R_p = W^T E(R)$$

y el riesgo del portafolio :

$$\sigma_p = \sqrt{W^T \Omega W}$$

donde

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_{mm} \end{pmatrix}$$

Matriz de varianzas y covarianzas

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Vector de pesos invertidos

4. Construcción de un Portafolio

Vamos a demostrar paso a paso como se construye un portafolio óptimo, luego lo mostraremos mediante una aplicación.

1) Recopilamos la información de las cotizaciones históricas de los activos a analizar.

2) Si existieran datos vacíos, se sugiere completar dichos datos con el último precio de cotización inmediatamente anterior al festivo , asumiendo que este es un día hábil, también se puede generar un promedio del día anterior con el día siguiente y se coloca en el dato faltante.

3) Se calcula la rentabilidad [3] de los activos de forma diaria (R_t).

4) Se calcula la rentabilidad promedio de cada activo k:

5) Luego se tendrá una matriz de información de los rendimientos $\overline{R}_{k_{1xm}}$, donde m representa la cantidad de activos financieros que se usarán para determinar la curva eficiente $(R_{11}, R_{12}, ..., R_{1Xm})$

6) Se construye una matriz de pesos o proporción que tendrá cada activo (W_{mxq}), se busca que estos pesos sean menores a 1 pero mayores a 0, y la suma igual a 1.

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1q} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mq} \end{pmatrix}$$

7) Se multiplican las matrices $\overline{R}_{1xm}$ y W_{mxq} para hallar el vector con los elementos de $E(R_p)$, donde al final se obtiene un vetor de q rendimientos esperados.$(E(R_p)_{1,1}, E(R_p)_{12}, ..., E(R_p)_{1q}$

8) Se calcula la matriz de varianzas y covarianzas.

9) Se calcula el riesgo asociado a cada portafolio σ_p

10) Se prosigue a resolver el problema de optimizacón minimizando el riesgo, obteniendo el retorno ideal y las proporciones correctas para cada activo financiero.

5. Portafolio Óptimo

Si se quiere determinar el portafolio óptimo se utiliza el concepto de desempeño del portafolio, para esto aplicamos el índice de Sharpe, que mide el exceso de rentabilidad sobre la tasa de interés libre de riesgo [2].

$$IS_p = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

donde
R_p: Rendimiento del portafolio eficiente.
R_f: Rendimiento libre de riesgo.
σ_p: Riesgo del portafolio eficiente.

En este portafolio se encuentra un activo libre de riesgo, la mayoría de los investigadores consideran que estos activos deben ser tomados como referencia para la valorización de empresa, los cuales suelen ser los que vencen a largo plazo, ya que la distancia de inversión en el caso de las acciones es a largo plazo.(Ver figura 4)

[3] Se hace referencia solo al resultado de la valorización o desvalorización de la acción en el mercado; es decir, el cociente del precio de venta menos el precio de compra, sobre el precio de compra de la acción. Matemáticamente, este cociente es aproximadamente igual al logaritmo natural del precio de venta sobre el precio de compra de la acción.

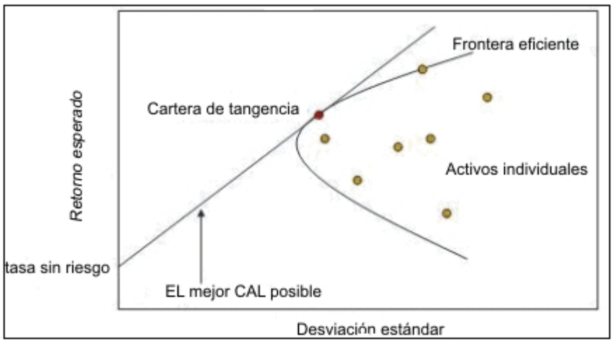

Figura 4. Frontera eficiente con un activo libre de riesgo

6. Aplicación

Los datos que se utilizaron en éste trabajo corresponden a las cotizaciones que fueron extraídas de la Bolsa de Valores de Lima desde el período Agosto 2012- Dicembre 2016.

Se consideraron inicialmente 10 empresas entre ellas: Edelnor, Scotiabank, BBVA, Unacem, Pacasmayo, Graña y Montero, Enersur, Edegel, Alicorp, Luz del Sur.

Agrupamos las cotizaciones semanalmente, si faltáse datos se llenan con los del dia anterior o se calculaba un promedio con los datos que habian ubicados por semana como lo hemos explicado anteriormente.
Graficamente se observa de este modo.

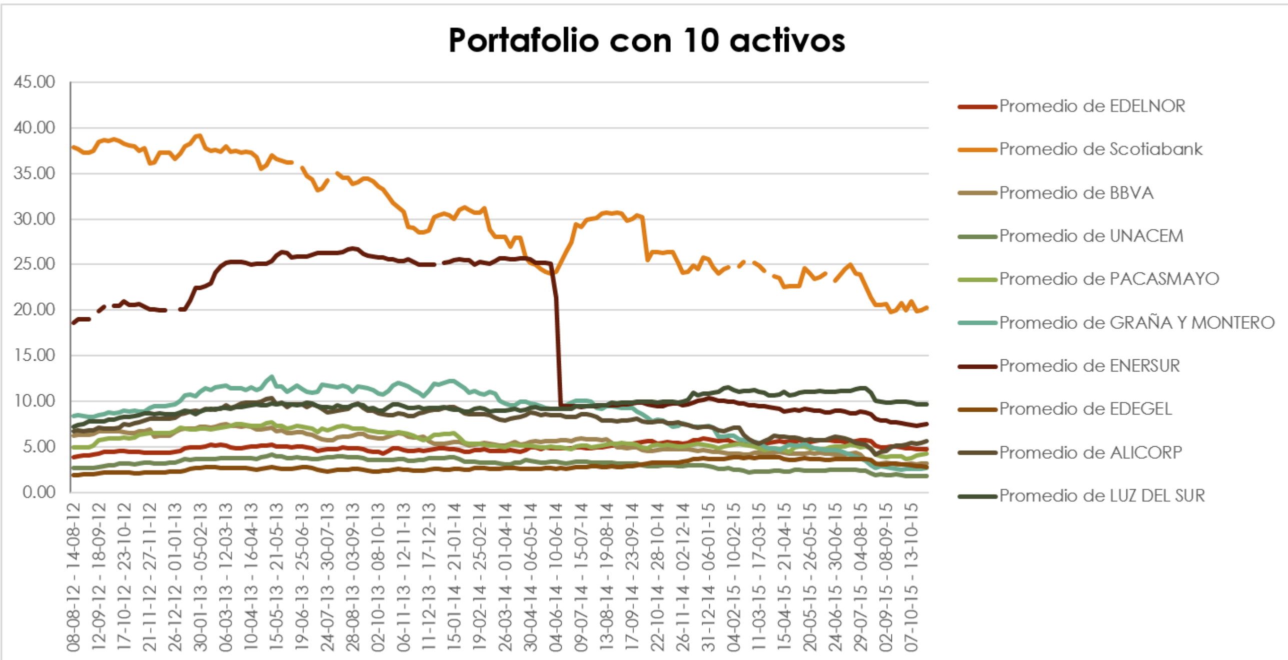

Figura 5. Portafolio con 10 acciones

Se eliminaron dos empresas dado que tenían muchos vacios en su data y con poca estabilidad en el tiempo respecto a sus cotizaciones, las empresas a eliminar fueron: Enersur y Scotiabank. Quedando la gráfica de la siguiente manera:

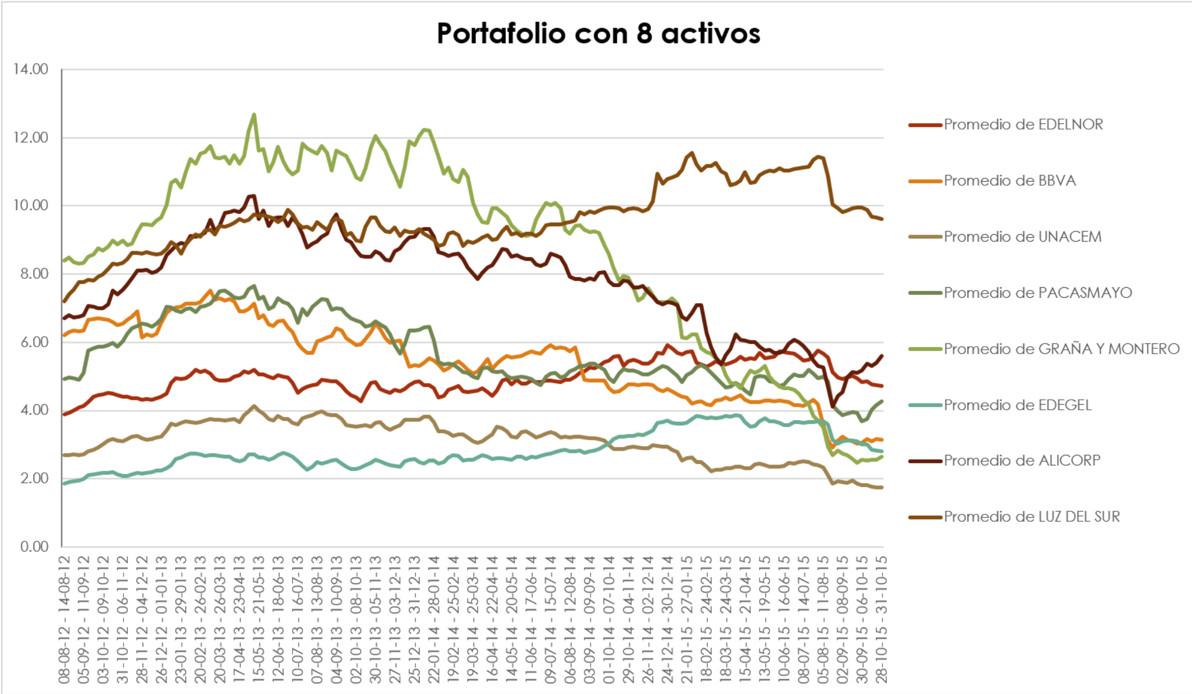

Figura 6. Portafolio con 8 acciones
Fuente: Bolsa de Valores de Lima.

Luego, generamos un portafolio compuesto por 4 empresas del total, los cuales fueron:Edelnor, Unacem, Edegel, Luz del Sur.

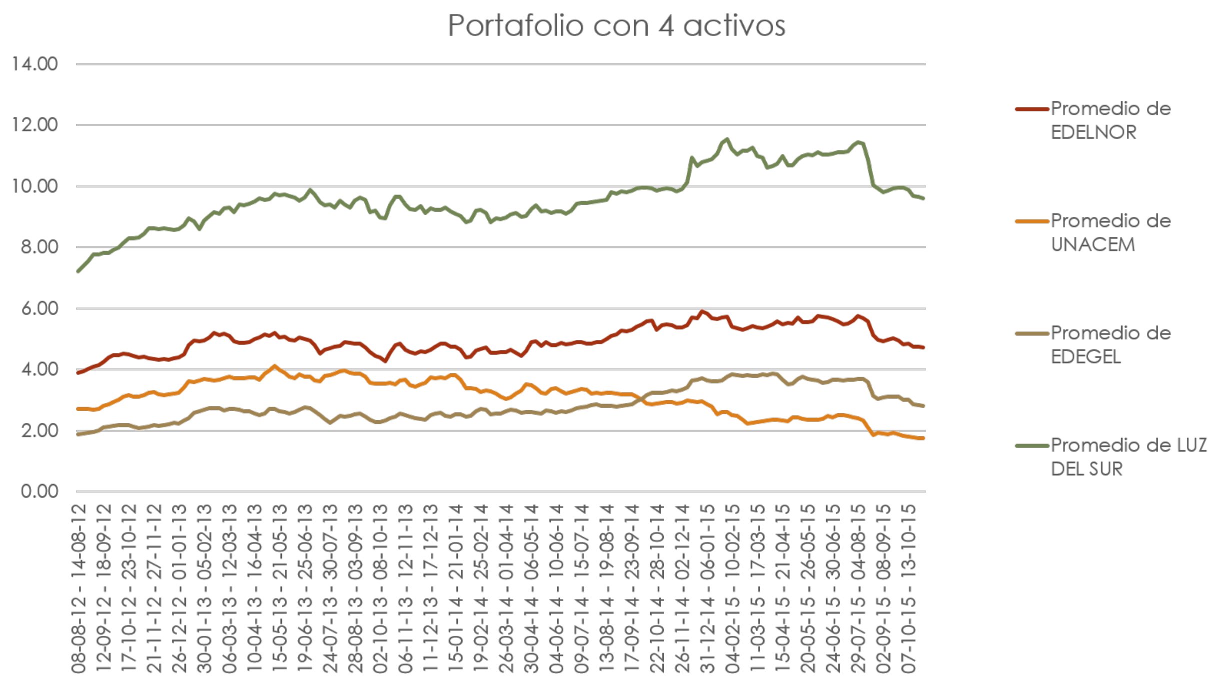

Figura 7. Portafolio con 4 acciones

Mostraremos parte de la data semanal de cotizaciones con sus respectivas variaciones porcentuales para un mejor análisis, ya que hemos tomado datos del periódo Agosto 2012- Dicembre

2016, se extiende el tamaño de la data.

Fecha de cotización	Edelnor	Unacem	Edegel	Luz del Sur	Edelnor	Unacem	Edegel	Luz del Sur
08/08/12-14/08/12	3.8940	2.6960	1.8700	7.2040	1.25 %	0.30 %	1.71 %	2.72 %
15/08/12-21/08/12	3.9425	2.7040	1.9020	7.4000	1.71 %	0.22 %	1.74 %	1.81 %
22/08/12-28/08/12	4.0100	2.7100	1.9350	7.5340	2.00 %	-0.65 %	0.90 %	3.13 %
29/08/12-04/09/12	4.0900	2.6925	1.9525	7.7700	1.16 %	0.65 %	2.18 %	0.03 %
05/09/12-11/09/12	4.1375	2.7100	1.9950	7.7720	2.77 %	3.54 %	5.16 %	0.67 %
12/09/12-18/09/12	4.2520	2.8060	2.0980	7.8240	3.39 %	1.57 %	2.00 %	-0.15 %
08/08/12-14/08/12	4.3960	2.8500	2.1400	7.8120	1.46 %	2.69 %	1.09 %	1.51 %
19/09/12-25/09/12	4.4600	2.9267	2.1633	7.9300	0.07 %	2.68 %	0.77 %	0.84 %
26/09/12-02/10/12	4.4633	3.0050	2.1800	7.9967	1.12 %	3.83 %	0.18 %	1.82 %
03/10/12-09/10/12	4.5133	3.1200	2.1840	8.1420	-0.30 %	1.67 %	0.37 %	1.99 %
10/10/12-16/10/12	4.5000	3.1720	2.1920	8.3040	-1.28 %	-1.64 %	-2.74 %	-0.13 %
17/10/12-23/10/12	4.4425	3.1200	2.1320	8.2933	-0.96 %	-0.64 %	-2.09 %	0.47 %
24/10/12-30/10/12	4.4000	3.1000	2.0875	8.3325	0.23 %	2.06 %	0.22 %	1.31 %
31/10/12-06/11/12	4.4100	3.1640	2.0920	8.4420	-0.85 %	2.34 %	2.10 %	2.11 %
⋮								

Hallamos la matriz de correlación y la matriz de covarianzas

Cuadro 1. Matriz de coeficientes de correlaciones

	Edelnor	Unacem	Edegel	Luz del Sur
Edelnor	1,000	0,3844	0,5271	0,6041
Unacem	0,3844	1,0000	0,3098	0,3112
Edegel	0,5271	0,3098	1,0000	0,4835
Luz del Sur	0,6041	0,3112	0,4835	1,0000

Cuadro 2. Matriz de covarianzas

	Edelnor	Unacem	Edegel	Luz del Sur
Edelnor	0,0005	0,0002	0,0003	0,0002
Unacem	0,0002	0,0008	0,0002	0,0001
Edegel	0,0003	0,0002	0,0007	0,0002
Luz del Sur	0,0002	0,0001	0,0002	0,0003

Hallamos el retorno y el riesgo por cada empresa y luego al portafolio

Acción	Edelnor	Unacem	Edegel	Luz del Sur
Retorno Promedio	0.14 %	-0.22 %	0.27 %	0.19 %
Desv. EStándar	2.21 %	2.75 %	2.60 %	1.74 %

Cuadro Del portafolio

Acción	Edelnor	Unacem	Edegel	Luz del Sur
Pesos	30 %	10 %	30 %	30 %
Retorno Promedio	0.16 %			
Varianza	0.03 %			
Desv. Promedio	1.7647 %			

Generamos los pesos aletorios y hallamos el retorno y el riesgo de cada portafolio, obteniendo así una nube de puntos y graficando nuestra parábola conformada por posibles portafolios.

Pesos de cada acción en el portafolio

Edelnor	Unacem	Edegel	Luz del Sur		Desv. Portafolio	Retorno Portafolio
0.1873	0.3679	0.2299	0.2149	1	1.81 %	0.05 %
0.2137	0.1990	0.2963	0.2909	1	1.75 %	0.12 %
0.0588	0.4326	0.3062	0.2024	1	1.90 %	0.04 %
0.0944	0.3939	0.2349	0.2768	1	1.81 %	0.04 %
0.0622	0.2746	0.1113	0.5519	1	1.65 %	0.08 %
0.4648	0.0141	0.2991	0.2220	1	1.87 %	0.19 %
0.3004	0.4448	0.1789	0.0759	1	1.94 %	0.01 %
0.2878	0.2689	0.1656	0.2777	1	1.74 %	0.08 %
0.2494	0.2977	0.3232	0.1297	1	1.86 %	0.08 %
0.3776	0.1658	0.0974	0.3592	1	1.70 %	0.11 %
0.0727	0.1508	0.3732	0.4033	1	1.75 %	0.16 %
⋮						

Graficando los retornos promedios y la desviación estándar:

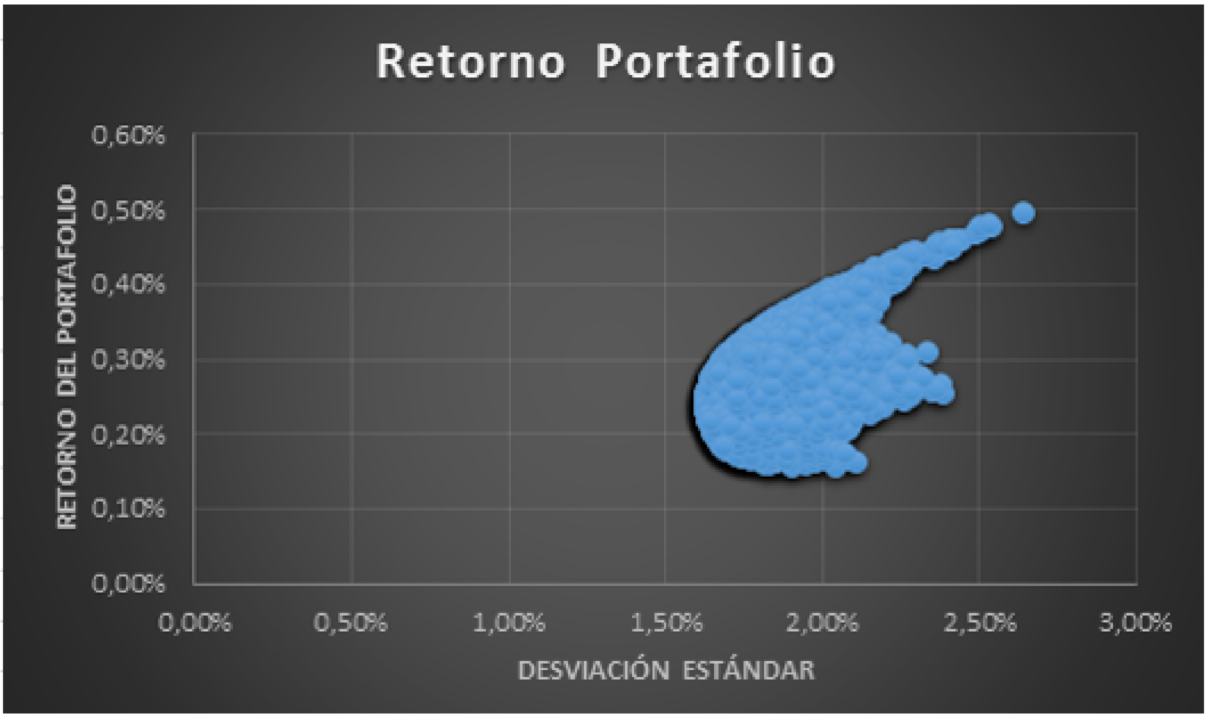

Figura 8. Conjunto posible de portafolios

Del ‘Cuadro del Portafolio’ y mediante el complemento de Excel (**Solver**), se obtuvieron los resultados finales.

Cuadro 3. Resultados de la curva Eficiente

Desv. Estándar	Retorno	Edelenor	Unacem	Edegel	Luz del Sur
1,64 %	0,1627 %	10 %	8 %	13 %	70 %
1,70	0,2045	4 %	0 %	22 %	74 %
1.80 %	0,2228 %	0 %	0 %	41 %	59 %
1.90 %	0.2324 %	0 %	0 %	52 %	48 %
2.00 %	0.2402 %	0 %	0 %	61 %	39 %
2.10 %	0.2469 %	0 %	0 %	68 %	32 %
2.14 %	0.25 %	0 %	0 %	71 %	29 %
2.18 %	0.25 %	0 %	0 %	74 %	26 %
2.26 %	0.26 %	0 %	0 %	79 %	21 %
2.40 %	0.264 %	0 %	0 %	88 %	12 %
2.50 %	0.270 %	0 %	0 %	94 %	6 %
2.60 %	0.275 %	0 %	0 %	100 %	0 %

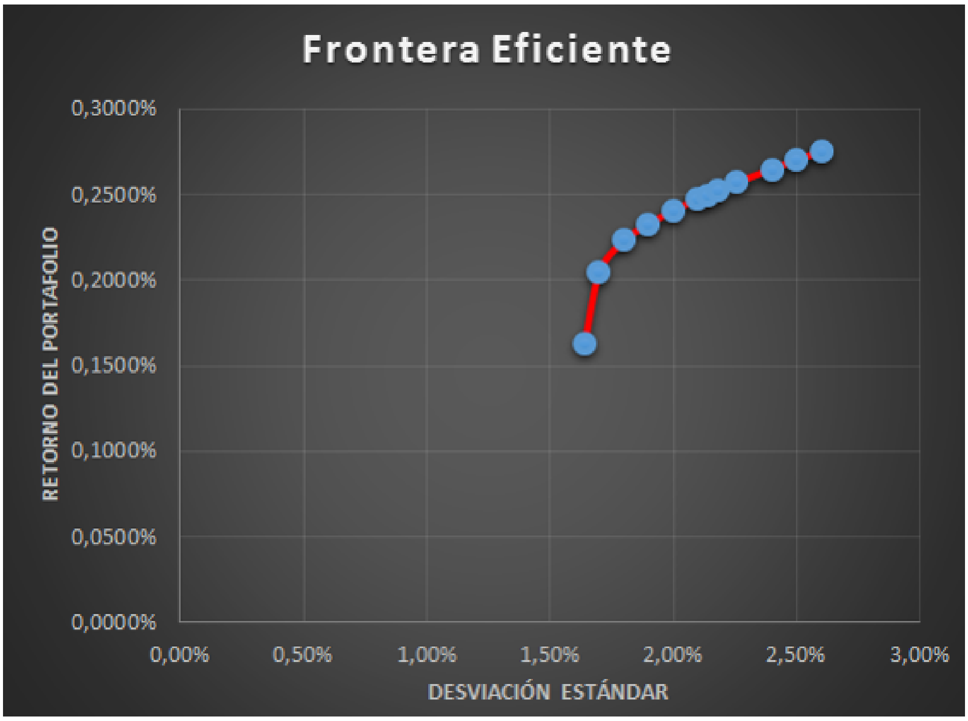

Figura 9. Frontera Eficiente: portafolios óptimos conformado por acciones de Edelnor, Unacem, Edegel y Luz del Sur
Fuente: Bolsa de Valores de Lima.

Se ha generado la curva eficiente del portafolio tomado por dichas empresas. De la misma forma, se tomará 2 portafolios más, siguiendo el mismo análisis oobtenemos el siguiente resultado.

Mostraremos los 3 posibles portafolios.

PORTAFOLIO	EMPRESAS
Portafolio 1	Luz del Sur, Edegel, Pacasmayo, Graña y Montero, Alicorp, BBVA
Portafolio 2	Alicorp, Edelnor, Edegel, Unacem
Portafolio 3	Edelnor, Unacem, Edegel, Luz del Sur

Cuadro 4. Resultados de la curva eficiente

Desv. Portafolio	Retorno Portafolio1	Retorno Portafolio2	Retorno Portafolio3
2.10 %	0.0800 %	0.1057 %	0.2469 %
2.14 %	0.1252 %	0.1252 %	0.2494 %
2.18 %	0.1375 %	0.1375 %	0.2519 %
2.26 %	0.1546 %	0.1546 %	0.2566 %
2.40 %	0.1717 %	0.1717 %	0.2643 %
2.50 %	0.1759 %	0.1759 %	0.2695 %
2.60 %	0.1790 %	0.1790 %	0.2746 %
2.70 %	0.1822 %	0.1822 %	0.2769 %
2.80 %	0.1858 %	0.1858 %	0.2798 %
3.00 %	0.1883 %	0.1883 %	0.2822 %

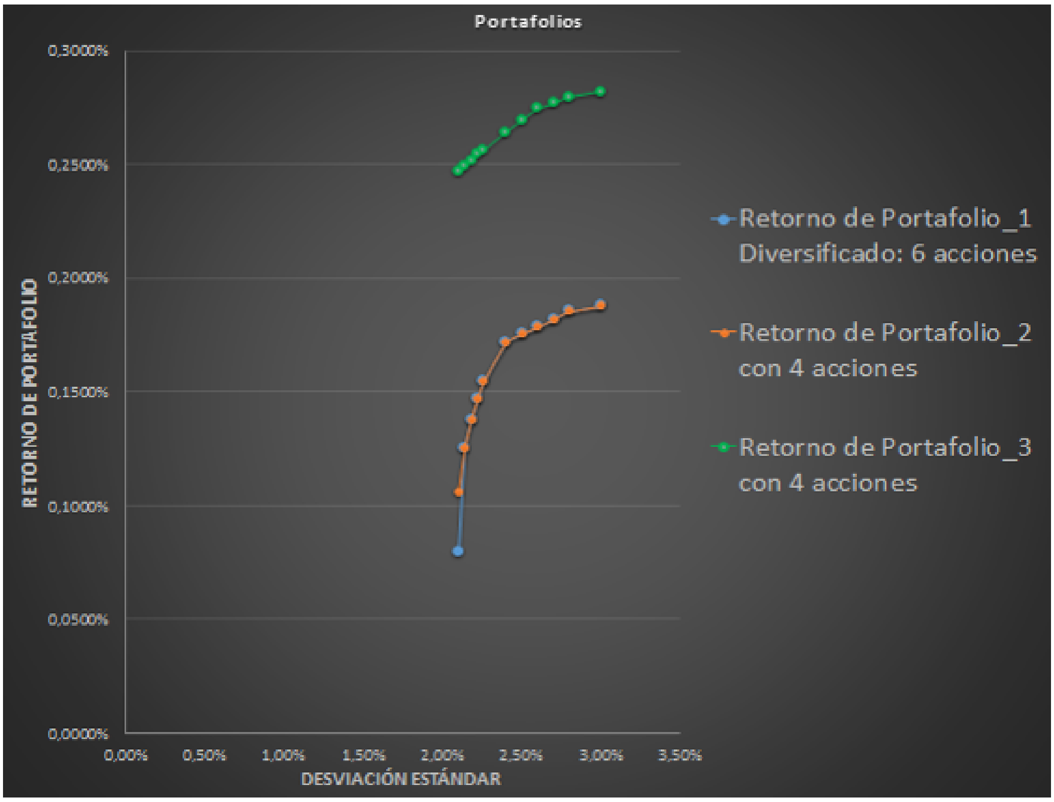

Figura 10. Fronteras eficientes, según el cuadro 4.

Como se puede observar el portafolio con mayor rendimiento y menor riesgo respecto de los otros es el **Portafolio 3**, lo cual sería el portafolio óptimo, en donde me convendría invertir.

7. Conclusión

- El modelo real presentado en esta investigación, nos permite ofrecer una metodología clara del diseño de inversión dependiendo de la rentabilidad que se espera ganar y el riesgo que uno está dispuesto a asumir. A partir de la obtención de los portafolios óptimos que conforman la frontera eficiente y el análisis matemático de la evolución de las rentabilidades de los diferentes activos.

- La perfecta distribución de un portafolio es aquella que reparte el riesgo de nuestras inversiones en acciones, bonos, depósitos, etc.
- La diversificación es muy importante dado que el riesgo debe ser un factor que más detalle necesita, porque si los riesgos se controlan entonces los ingresos fluyen.
- El análisis de los resultados obtenidos por cada uno de los portafolios de inversión realizados con el modelo de Markowitz, evidencia que el desempeño de los portafolios obtenidos, conforman una buena guía de búsqueda para los inversionistas que no conocen mucho el mercado, combinando activos de diferentes especies y que tienen buenas referencias en el mercado en cuanto a la liquidez y la capitalización.
- Los modelos presentados nos ayudan a visualizar que la estadística es una herramienta potente en el mundo de las finanzas y por consiguiente dominarlas es necesario, ya que necesitamos tener un amplio conocimiento para poder aplicarla a nuestros modelos.
- El ratio de Sharpe nos indican la rentabilidad, esto nos va a permitir tomar buenas decisiones para elegir las mejores carteras de activos de renta variable.
- Es conveniente elegir carteras con activos cuyas covarianzas sean negativas (si son negativas, los activos se mueven en relación opuesta), de esta forma se podrá minimizar el riesgo del portafolio, el cual se ha de reflejar en el resultado de la desviación típica. Con esta elección se podrá lograr estructurar carteras con elevados ratios de Sharpe, recalcando que mientras más grande sea el ratio de Sharpe habrá un mayor rendimiento.

Referencias bibliográficas

[1] Fabozzi, F., Kolm, P., Pschamanova, D., y Focardi, S. (2007). *Robust Portafolio Optimization and Management*. New Jersey, USA: Jhon Wiley and Sons.

[2] Coria, D. (2015). Modelo de portafolio para fondos de inversión a través del análisis cluster y la teoría de Markowitz. Recuperado de https://www.bcb.gob.bo/eeb/sites/default/files/8eeb/docs/Diego_Coria.pdf

[3] Franco, L., Avendaño, C. y Barbutín, H. (2011). Modelos de Markowitz y Modelo de Black-Litterman en la Optimización de Portafolios de Inversión. *Tecno Lógicas*, 26(1), 71-88.

[4] Gutiérrez, M., y Salgado, M. (2012). Construcción de una cartera de inversión usando modelos GARCH. *Industria Data*, 15(1), 84-99.

[5] Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2012). Glosario de estadística básica. Recuperado de https://www.yumpu.com/es/document/view/41411102/glosario-de-estadistica-basica-inegi/36

[6] Rodríguez C. (2013). Diccionario de economía: etimológico, conceptual y procedimental (Edición especial para Estudiantes). Recuperado de http://bibliotecadigital.uca.edu.ar/repositorio/libros/diccionario-economia-etimologico-conceptual.pdf

[7] Villarreal, J. (2008). Administración financiera II. Recuperado de http://www.eumed.net.