

PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XIX N°2, pp. 26-37, Julio–Diciembre 2016

Estudio del Punto Libre de Infección de un Modelo Matemático de la Dinámica de Transmisión del VIH/SIDA en una Población Heterosexual Activa en el Perú con Aplicación a la Salud Pública

*Roxana López*¹

*Neisser Pino*²

(Recibido: 02/06/2016 - Aceptado: 22/06/2016)

Resumen: Se presenta el análisis de un modelo matemático aplicado a la Epidemiología que explica la dinámica de transmisión de la enfermedad del Síndrome de Inmunodeficiencia Adquirida (SIDA) entre parejas heterossexualmente activas donde se considera el uso de protección por medios naturales y no naturales. Se estudia la sensibilidad del modelo con respecto a su estabilidad local para el Punto Libre de Infección complementando mediante Simulaciones Computacionales. Esto brinda un entendimiento dinámico del modelo con lo cual permitirá tomar decisiones en el área de Salud Pública teniendo en cuenta el aspecto social y económico.

Palabras Claves: Epidemiología Matemática, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Puntos Estacionarios, Estabilidad Local, Simulación Computacional, Salud Pública.

Study about The Infection-Free Equilibrium Point of a Mathematical Model Dynamics of Transmission HIV/AIDS in a Active Heterosexual Population in Peru with Application to Public Health

Abstract: We present the analysis of a mathematical model applied to Epidemiology. It explains the dynamics of transmission of the disease of the Acquired Immunodeficiency Syndrome (AIDS) among heterosexually active people using natural and non natural protection. We study the sensitivity of the model with respect to its local stability to the Infection-Free Equilibrium Point and Computational Simulations. This provides an understanding of the dynamic of the model to take decisions in the area of Public Health, taking into account the social and economical aspects.

Key Words: Mathematical Epidemiology, Ordinary Differential Equations, Stationary Points, Local Stability, Computacional Simulation, Public Health.

1 Introducción

La situación problemática que se vive en el Perú con respecto al VIH/SIDA es un tema complicado debido a las consecuencias que conlleva afrontar a las personas que conviven con la enfermedad; esta enfermedad es una de las más globales que existen en el mundo y que afecta en un nivel casi integral a la sociedad de los países en la condición que estén. La diferencia de los países del mundo es la perspectiva que tienen de la enfermedad y cómo se intenta contrarrestarla debido que hasta la actualidad no existe un cura total para la enfermedad, solamente medicamentos

¹UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: rlopezc@unmsm.edu.pe

²UNMSM, Facultad de Ciencias Matemática, e-mail: neisser.pino@unmsm.edu.pe

antivirales que intentan controlar el avance de la enfermedad. Esta enfermedad no solamente afecta a las personas, a las familias, sino a la sociedad misma en su perspectiva de persona en sí misma más que como individuo, pues no solamente afecta en el sentido económico, sino también en un sentido antropológico social por la concepción que se tiene de la enfermedad en el país. La epidemia de VIH en el Perú permanece sobretodo concentrada en Hombres que tienen Sexo con Hombres (HSH). Casi todos los estudios serológicos disponibles muestran una prevalencia de 5 % o más en HSH, mientras que en casi todas las otras poblaciones ésta es menor a 1 %, incluyendo los estudios en Trabajadoras Sexuales Femeninas (TSF). [5,6,7,10].

Los expertos a nivel internacional han señalado que la pobreza, la vulnerabilidad, la exclusión social, el estigma, la discriminación, la inequidad de género y la homofobia son fenómenos que se encuentran íntimamente relacionadas con el avance de la epidemia, y todo esto se complica aún más cuando hace falta educación sexual y persisten tabúes sociales respecto de la sexualidad humana. Para atender esta gran complejidad social, todas la respuestas a la epidemia del VIH deben plantearse desde un marco multisectorial, donde el sector salud puede jugar un papel fundamental y de liderazgo que debe utilizarse fundamentalmente para involucrar a otros actores en la respuesta, ya sean públicos, privados, académicos. [7,14].

Los modelos matemáticos se usan frecuentemente como instrumento para evaluar y analizar diversas actividades de gestión en relación a las enfermedades, y a la respectiva toma de decisiones que conlleva. En relación a los modelos matemáticos relacionados al VIH/SIDA hay una cantidad considerable, pero un punto débil es, que los modelos son enfocados para una dinámica, lo que reflejaría para una población en particular y por consiguiente brindaría las conclusiones para esa población. En relación a la enfermedad del VIH/SIDA se ha formulado varios modelos matemáticos epidemiológicos, teniendo en cuenta la situación actual de la enfermedad y cómo se va desarrollando en las personas. [1,4,8].

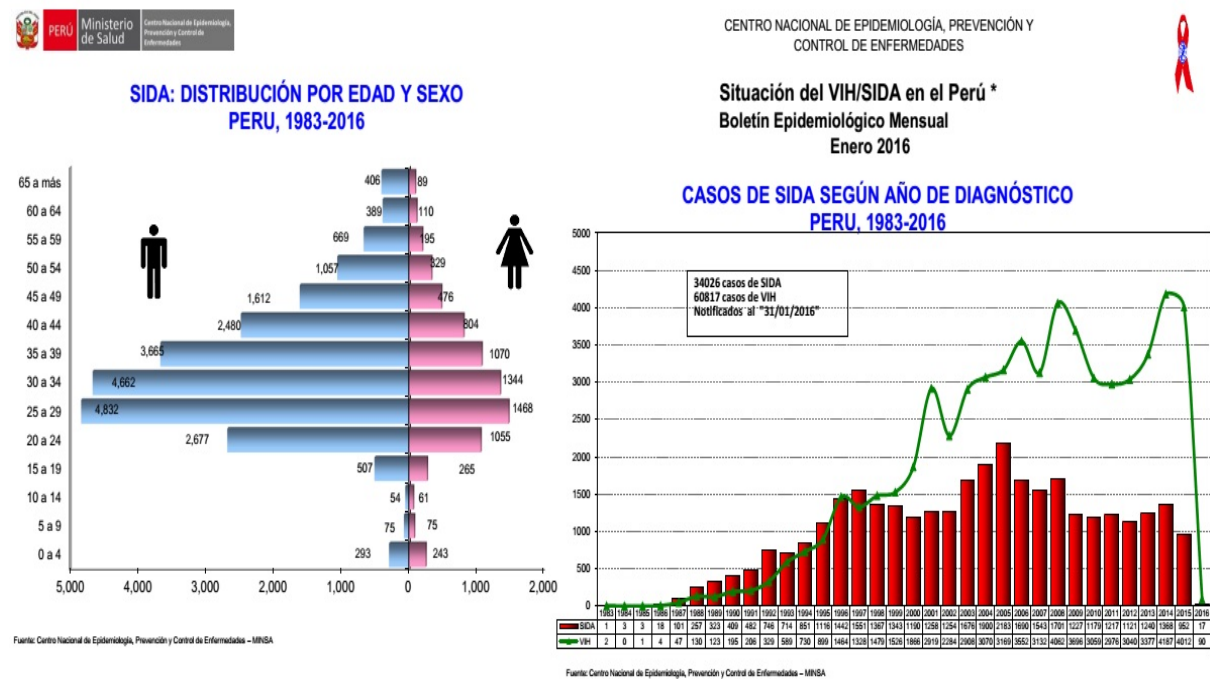


Figura 1: Fuente: Centro Nacional de Epidemiología, Prevención y Control de Enfermedad - MINSa

2 Metodología

Las bases teóricas que se utilizarán en el presente trabajo, son las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.) como un instrumento matemático adecuado para el modelamiento de la enfermedad debido que estamos suponiendo que la dinámica de la enfermedad es continua; y las funciones que representan el modelo matemático también lo son; teniendo en cuenta también la validez del Modelo, por lo tanto se establecerá la estabilidad del Modelo, con su respectivo análisis cualitativo garantizando lo necesario para una adecuada formulación y aplicación del modelo matemático. El sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias representará dinámicamente la interacción de las poblaciones a través del tiempo que se evaluará expresando la relación directa con la realidad que intentamos modelar matemáticamente, para lo cual las funciones que representan las poblaciones serán específicamente positivas tomando el valor cero (o nulo) siendo interpretado cuando la población está ausente (o extinta). [1].

2.1 Modelo Matemático

Las dinámicas de la enfermedad VIH/SIDA ha considerar, serían la entrada de la población no susceptible a ser sexualmente activos tanto hombres como mujeres, que en los últimos años ha ido incrementándose, es decir, la edad en que se ingresa a ser sexualmente activos es aún más temprana actualmente, aproximadamente 15 años de edad. También hay que considerar que cuando los individuos pasar a ser sexualmente activos se considerarán incluidos de la población susceptible, es decir, son individuos que están expuestos a contraer el virus del VIH tanto hombres como mujeres teniendo en cuenta que el medio de transmisión de la enfermedad es vía sexual en relaciones heterosexuales. Este modelo no se centrará en la transmisión sexual de los otros medios que sus índices son menores que el 4%. [10,14].

Por otro lado hay que tener en cuenta la disminución de la población susceptible por la interacción entre individuos susceptibles con individuos infectados para ambos sexos, también se considerará la tasa de mortalidad natural de los individuos tanto susceptibles como infectados, debido que los individuos infectados pueden fallecer no por la enfermedad del VIH/SIDA sino por algún otro motivo. También hay que considerar la tasa de mortalidad por la enfermedad tanto en la población tanto masculina y femenina debido a su propia resistencia corporal. Las tasas de cada interacción serán determinantes para acercar el modelo hacia la realidad. [10,15].

2.1.1 Variables Modelo del Matemático

Poblaciones

Las variables que se utilizarán serán enteramente no negativas incluyendo el cero, por estar representando una población de individuos. [1].

- H_{NS} : Hombres No Susceptibles
- M_{NS} : Mujeres No Susceptibles
- S_h : Hombres Susceptibles
- S_m : Mujeres Susceptibles
- I_h : Hombres Infectados
- I_m : Mujeres Infectados

Tasas

Los valores de las tasas (parámetros) utilizadas para el modelo tendrán un valor normalizado por considerarse datos estadísticos, es decir, los valores se encontrarán únicamente entre cero y uno abierto, $(0; 1)$

σ_h : Tasa de hombres que entran a la población sexualmente activa.

σ_m : Tasa de mujeres que entran a la población sexualmente activa.

μ : Tasa de mortalidad natural

α : Tasa de mortalidad por VIH/SIDA (hombres)

ε : Tasa de mortalidad por VIH/SIDA (mujeres)

β_m : Tasa de infección de hombres por contagio con mujeres infectadas

β_h : Tasa de infección de mujeres por contagio con hombres infectados.

p : Coeficiente de Protección

Unidades del Modelo

Consideraremos en la siguiente Tabla 1, las variables (Tasas y Poblaciones) con su respectivo Valor que se utilizará en la sección correspondiente a la Simulación Computacional.

Variabes	Descripción	Valor
H_{NS}	Cantidad de Individuos Hombres NO Susceptibles	2 (miles)
S_h	Cantidad de Individuos Hombres Susceptibles	1 (miles)
I_h	Cantidad de Individuos Hombres Infectados	0.05 (Miles)
$S'_h = \frac{\partial S_h}{\partial t}$	Cantidad de Susceptibles Hombres por unidad de Tiempo	
$I'_h = \frac{\partial I_h}{\partial t}$	Cantidad de Infectados Hombres por unidad de Tiempo	
Parámetros	Descripción	Valor (%)
σ_h	Tasa de ingreso de Hombres No Susceptibles por unidad de Tiempo	0.03
β_m	Tasa de contagio de Hombre Susceptible por Mujer Infectada por Unidad de Tiempo	0.35
μ	Tasa de mortalidad natural por unidad de Tiempo	0.04
α	Tasa de mortalidad por la Epidemia en Hombres Infectados por Unidad de Tiempo	0.02

Variables	Descripción	Valor
M_{NS}	Cantidad de Individuos Mujeres NO Susceptibles	2(miles)
S_m	Cantidad de Individuos Mujeres Susceptibles	1(miles)
I_m	Cantidad de Individuos Mujeres Infectados	0.03(miles)
$S'_m = \frac{\partial S_m}{\partial t}$	Cantidad de Susceptibles Mujeres por unidad de Tiempo	
$I'_m = \frac{\partial I_m}{\partial t}$	Cantidad de Infectados Mujeres por unidad de Tiempo	
Parámetros	Descripción	Valor (%)
σ_m	Tasa de ingreso de Mujeres No Susceptibles por unidad de Tiempo	0.02
β_h	Tasa de contagio de Mujer Susceptible por Hombre Infectado por Unidad de Tiempo	0.35
μ	Tasa de mortalidad natural por unidad de Tiempo	0.04
ε	Tasa de mortalidad por la Epidemia en Mujeres Infectadas por Unidad de Tiempo	0.02

2.2 Consideraciones Matemáticas

Como se está considerando poblaciones de susceptibles e infectados tanto para hombres como para mujeres, estas poblaciones serán representadas como funciones continuas. [11].

Sean $S_h, S_m, I_h, I_m \in C^1$, es decir, $S_h, S_m, I_h, I_m : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ continuas en todo el dominio \mathbb{R}_0^+ . Y como las funciones S_h, S_m, I_h, I_m son continuas, también las operaciones elementales entre ellas también son continuas. Y también los parámetros $\sigma_h, \sigma_m, \mu, \alpha, \varepsilon, \beta_m, \beta_h \in]0, 1[\subset \mathbb{R}^+$ con lo cual la interacción con las funciones siguen manteniéndose continuas. La diferenciabilidad de las funciones es de vital importancia para una adecuada existencia y unicidad del sistema de E.D.O. lo cual ya se ha considerado. Un detalle importante, en el presente sistema se ha adimensionalizado las unidades correspondientes a las variables. [8].

$$\begin{cases}
 S'_h &= \sigma_h H_{NS} - w\beta_m I_m S_h - \mu S_h \\
 I'_h &= w\beta_m I_m S_h - \alpha I_h - \mu I_h \\
 S'_m &= \sigma_m M_{NS} - \beta_h I_h S_m - \mu S_m \\
 I'_m &= \beta_h I_h S_m - \varepsilon I_m - \mu I_m \\
 S_h(0) &= S_o^h \geq 0 \\
 I_h(0) &= I_o^h \geq 0 \\
 S_m(0) &= S_o^m \geq 0 \\
 I_m(0) &= I_o^m \geq 0
 \end{cases} \quad (1)$$

Donde: $0 \leq \alpha, \beta_m, \beta_h, \varepsilon, \mu, \sigma_m, \sigma_h, w, p \leq 1$

Donde: $w = 1 - p$ (p : Coeficiente de Protección)

2.3 Existencia y Unicidad

Para garantizar la Existencia y Unicidad del Sistema de E.D.O. (1) se utilizará un lema y un teorema de la Teoría Matemática de las E.DO. [9].

Lema 2.1. Sea $F : \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}_+^4$, $F(X) = (F_1(X), \dots, F_4(X))$ con $X = (S_h, S_m, I_h, I_m)$ son continuas y existen $\frac{\partial F_j}{\partial x_k}$ continuas en $\mathbb{R}_+^4 \forall j, k = \overline{1, 4}$. Entonces, F localmente lipschitz continua en \mathbb{R}_+^4 . (Ver Prueba en [15]).

Teorema 2.2. Sea $F : \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}_+^4$ localmente lipschitz continua para cada $j = \overline{1,4}$ y satisface $F_j(X) \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}_+^4$, $x_j = 0$. Entonces para cada $x_o \in \mathbb{R}_+^4$, existe una única solución de $X' = F(X)$ con $X(0) = X_o$ en \mathbb{R}_+^4 donde está definida en algún intervalo $(0, b]$ con $b \in (0, +\infty)$. (Ver Demostración en [15]).

2.4 Estado de Equilibrio del Modelo

Para garantizar la estabilidad del modelo matemático, en primer lugar se hallará los puntos críticos del Modelo matemático, representado por un sistema de ecuaciones igualados a cero.

2.4.1 Puntos Críticos

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{cases} \sigma_h H_{NS} - w\beta_m I_m S_h - \mu S_h & = 0 \\ w\beta_m I_m S_h - \alpha I_h - \mu I_h & = 0 \\ \sigma_m M_{NS} - \beta_h I_h S_m - \mu S_m & = 0 \\ \beta_h I_h S_m - \varepsilon I_m - \mu I_m & = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Desarrollando el sistema (2) obtenemos los siguientes puntos críticos.

$$\begin{aligned} \star \quad S_h &= \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu} ; \quad I_h = 0 ; \quad S_m = \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu} ; \quad I_m = 0 \\ \star \quad S_h &= \frac{\sigma_h \beta_h (\varepsilon + \mu) H_{NS} + \mu (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)}{\beta_h (w\sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu))} & I_h &= \frac{w\sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)}{\beta_h (\alpha + \mu) (w\sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu))} \\ S_m &= \frac{w(\alpha + \mu) (\sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu))}{\beta_m (\sigma_h \beta_h H_{NS} + \mu (\alpha + \mu))} & I_m &= \frac{w\sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)}{w(\varepsilon + \mu) (\sigma_h \beta_h H_{NS} + \mu (\alpha + \mu))} \end{aligned}$$

Sea la siguiente consideración:

$$\begin{aligned} R_1 &= w\sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu) \\ R_2 &= w\sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu) > 0 \\ R_3 &= w\sigma_m \beta_m M_{NS} (\alpha + \mu) + \mu (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu) > 0 \\ U_4 &= \sigma_h \beta_h H_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu) > 0 \end{aligned}$$

luego los puntos críticos serán:

$$\overline{q}_1 = \left(\frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}; 0; \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}; 0 \right) \quad (3)$$

$$\overline{q}_2 = \left(\frac{(\varepsilon + \mu) U_4}{\beta_h R_2}; \frac{R_1}{\beta_h R_3}; \frac{R_3}{\beta_m U_4}; \frac{R_1}{w(\varepsilon + \mu) U_4} \right) \quad (4)$$

Para garantizar la existencia adecuada al modelo matemático propuesto.

Los puntos críticos tienen que ser necesariamente no negativos.

En primer lugar, el punto crítico $\overline{q}_1 > 0$ (*trivial*)

En segundo lugar, el punto crítico \overline{q}_2 tiene que ser no negativo.

Para lo cual se debe cumplir: $R_1 > 0$

Sean las Tasas de Supervivencia:

- $R_S^H = \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}$: Tasa de Supervivencia de Susceptibles Hombres.
- $R_S^M = \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}$: Tasa de Supervivencia de Susceptibles Mujeres.
- $R_I^H = \frac{\beta_h}{\alpha + \mu}$: Tasa de Supervivencia de Infectados Hombres.
- $R_I^M = \frac{\beta_m}{\varepsilon + \mu}$: Tasa de Supervivencia de Infectadas Mujeres.

Teorema 2.3. Sea el Sistema (2), y también sean sus puntos críticos expresados en (3) y (4).

1. La expresión (3), el **Punto Libre de Infección**, no tiene restricción alguna. (trivial)
2. Si $w \cdot R_S^H \cdot R_I^H \cdot R_S^M \cdot R_I^M > 1$, entonces la expresión (4), el **Punto Endémico**, estará bien definido epidemiológicamente. (Ver Demostración en [15]).

De esta manera, las expresiones (3), (4) que representan los puntos críticos del Sistema (2) son no negativos, lo cual epidemiológicamente es correcto debido que no hay valores negativos en una Población de personas.

2.5 Matriz de la Siguiete Generación

Estudiaremos la Estabilidad Local del Sistema (1) mediante el Método de la Matriz de la Siguiete Generación, con el objetivo de hallar el Número Básico de Reproducción Efectiva que es un indicador importante para el análisis epidemiológico del Modelo. El estudio se centrará en el Punto Libre de Infección, buscando la situación más idónea para la Sociedad en que la cantidad de Infectados descienda considerablemente hasta que no haya individuos infectados, por mientras que la población susceptible se incremente hasta mantenerse en un situación estable con respecto a la enfermedad. [3,4].

Como la expresión (1) es un sistema no lineal de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, en primer lugar se va a linealizar el sistema. Para lo cual el Jacobiano del Sistema sería:

Sea $X = (S_h, I_h, S_m, I_m)$

$$J(X) = \begin{bmatrix} -w\beta_m I_m - \mu & 0 & 0 & -w\beta_m S_h \\ w\beta_m I_m & -\alpha - \mu & 0 & w\beta_m S_h \\ 0 & -\beta_h I_m & -\beta_h I_h - \mu & 0 \\ 0 & \beta_h I_m & \beta_h I_h & -\varepsilon - \mu \end{bmatrix} \quad (5)$$

Mediante el Método de la Matriz de la Siguiete Generación, la matriz Jacobiana se expresará de la siguiente manera.

$$T = \begin{bmatrix} -w\beta_m I_m & 0 & 0 & -w\beta_m S_h \\ w\beta_m I_m & 0 & 0 & w\beta_m S_h \\ 0 & -\beta_h S_m & -\beta_h I_h - \mu & 0 \\ 0 & \beta_h S_m & \beta_h I_h & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon - \mu \end{bmatrix} \quad (7)$$

luego, $K = T \cdot \Sigma^{-1}$

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{w\beta_m Y_m}{\mu} & 0 & 0 & -\frac{w\beta_m X_h}{\varepsilon + \mu} \\ \frac{w\beta_m Y_m}{\mu} & 0 & 0 & \frac{w\beta_m X_h}{\varepsilon + \mu} \\ 0 & -\frac{\beta_h X_m}{\alpha + \mu} & -\frac{\beta_h Y_h}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_h X_m}{\alpha + \mu} & \frac{\beta_h Y_h}{\mu} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

- $|K| = 0$
- $Rango(K) = 2$
- $Traza(K) = -\left(\frac{w\beta_m Y_m}{\mu} + \frac{\beta_h Y_h}{\mu}\right) < 0$

Como $|K| = 0$, no se podrá analizar mediante NGM con dominio grande, sino se reformulará mediante NGM con dominio pequeño de la siguiente manera:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$R = \begin{bmatrix} w\beta_m I_m & 0 & 0 & w\beta_m S_h \\ 0 & \beta_h S_m & \beta_h I_h & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

así, $K_S = -R \cdot \Sigma^{-1} \cdot C$

$$K_S = - \begin{bmatrix} w\beta_m Y_m & 0 & 0 & w\beta_m X_h \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha+\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon+\mu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

luego,

$$K_S = \begin{bmatrix} -\frac{w\beta_m Y_m}{\mu} & \frac{w\beta_m X_h}{\varepsilon+\mu} \\ \frac{\beta_h X_m}{\alpha+\mu} & -\frac{\beta_h Y_h}{\mu} \end{bmatrix} \tag{11}$$

- $traza(K_S) = -\frac{w\beta_m Y_m}{\mu} - \frac{\beta_h Y_h}{\mu} = -\left(\frac{w\beta_m Y_m + \beta_h Y_h}{\mu}\right) < 0$
- $\det(K_S) = \frac{w\beta_m \beta_h Y_m Y_h}{\mu^2} - \frac{w\beta_m \beta_h X_m X_h}{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)}$

Se buscará garantizar que $|K_S| \neq 0$, en caso que, $|K_S| = 0$, no se podría utilizar el Método de la Matriz de la Siguiente Generación.

Teorema 2.4. Si $\frac{R_1^2}{\mu^2 w U_4} \neq \frac{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)U_4^2}{\beta_h \beta_m R_2}$, entonces $|K_S| \neq 0$. (Ver Demostración en [15]).

Luego, se puede hallar el Número Básico de Reproducción Efectiva:

$$\mathfrak{R}_e = \sqrt{\left(\frac{w\beta_m I_m + \beta_h I_h}{2\mu}\right)^2 - \left(\frac{w\beta_m \beta_h I_m I_h}{\mu^2} - \frac{w\beta_m \beta_h S_m S_h}{(\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu)}\right)} - \frac{w\beta_m I_m + \beta_h I_h}{2\mu}$$

Ahora, teniendo el valor de \mathfrak{R}_e , lo analizaremos en el Punto Libre de Infección. [16].

$$\mathfrak{R}_e = \sqrt{w \cdot R_S^H \cdot R_S^M \cdot R_I^H \cdot R_I^M}$$

Teorema 2.5. Sea $w, R_S^H, R_S^M, R_I^H, R_I^M > 0$. (Ver Demostración en [15]).

1. Si $w \cdot R_S^H \cdot R_S^M \cdot R_I^H \cdot R_I^M < 1$, entonces $\mathfrak{R}_e < 1$, por ende el Sistema es Estable localmente para el Punto Libre de Infección.
2. Si $w \cdot R_S^H \cdot R_S^M \cdot R_I^H \cdot R_I^M > 1$, entonces $\mathfrak{R}_e > 1$, por ende el Sistema es Inestable localmente para el Punto Libre de Infección.

INTERPRETACIÓN: Si se puede condicionar la interacción de las tasas de supervivencias tanto de susceptibles como infectados al entrar en contacto con las poblaciones no susceptibles conjuntamente con el coeficiente de protección que representa la estrategia de control que intenta disminuir el contagio de susceptibles al entrar en contacto con los infectados, de tal manera que el Número Básico de Reproducción, \mathfrak{R}_e , sea menor que uno esto implicará que el Modelo Matemático Epidemiológico sea estable localmente, y así la infección de la enfermedad se podría mantenerse sin algún cambio considerable y no se propague sin ningún control. En cambio, cuando \mathfrak{R}_e , sea mayor que uno esto implicará que el Modelo Matemático Epidemiológico sea inestable localmente, y así la infección de la enfermedad se propagará de tal manera que no se pueda controlar, sobre todo que este Modelo no tuviera ninguna estrategia de control. [12,16].

Simulación Computacional

Las simulaciones computacionales del Modelo Matemático, permiten poder ver el comportamiento que tiene el modelo en un tiempo determinado, para lo cual se apoyará en el cálculo numérico, como se había mencionado el Modelo Matemático en esencia es un Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; mediante los Métodos Numéricos se podrá aproximar la solución que tiene el Sistema para saber cuál es su representación grafica generada por los parámetros que se introduzca. Se utilizará el Método de Runge Kutta orden cuatro para realizar las simulaciones, el cual ha sido codificado en MATLAB. [35,36].

Teniendo en cuenta este detalle, se procederá a simular computacionalmente el Modelo, variando los parámetros respectivos para su respectiva comparación, y a la vez con mucho más detalle su interpretación matemática y epidemiológica del Modelo Matemático. Como se había mencionado, las tasas que se incluyen en el Modelo son la esencia de la interacción de la Problemática que se tiene de la Epidemia, como también se ha incluido un coeficiente de Protección esto permitirá generar una disminución en el impacto de la efectividad del contagio que se realiza entre los individuos susceptibles con los individuos infectados. Teniendo en cuenta el formalismo matemático, y el conocimiento que se debe tener para comprender la interacción de las variables que se mostró en la ecuación (1), se implementó una Interfaz Gráfica para poder ayudar la comprensión del Modelo, y así, hacerlo una manera más accesible a los especialistas. Esto permite, una gran percepción al bosquejo de las gráficas que se pueden hallar después de realizar la simulación computacional, brindando un mejor conocimiento de lo que sucede en la epidemia bajo ciertas circunstancias e intervenciones representadas en las tasas incluidas en el Modelo. [2].

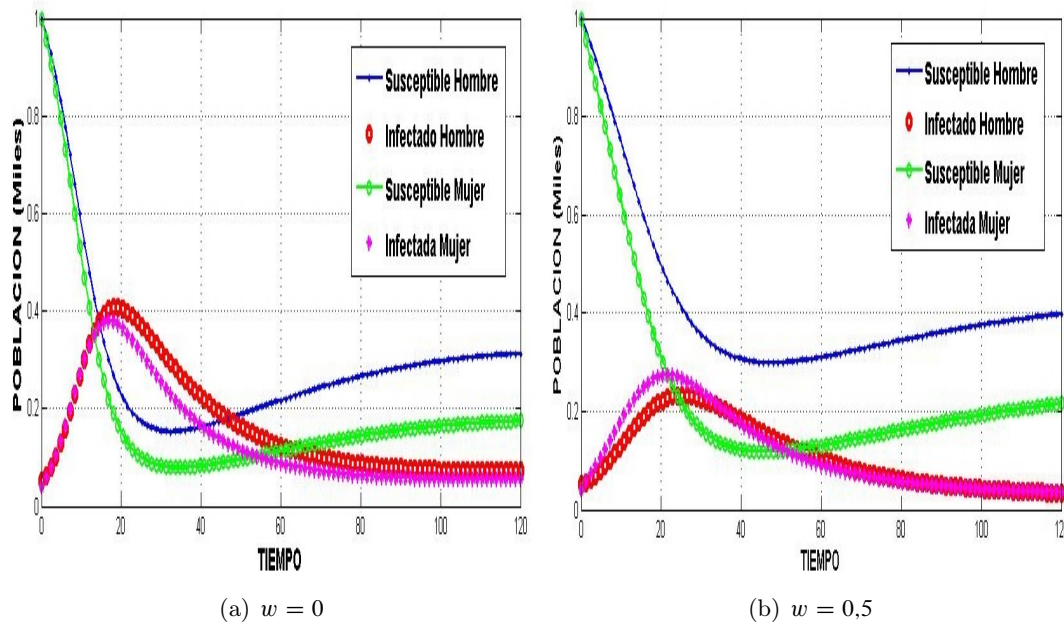
The image shows a MATLAB GUI window titled "Modelo Epidemiologico Susceptible - Infectado". The window contains several input fields for parameters, organized into two columns. The left column includes: "Ingreso Sex. Activo : Hombres", "Ingreso Sex. Activa : Mujeres", "Tasa de Contagio : M -> H", "Tasa de Contagio : H -> M", "Tasa Mortalidad Enf. Hombre", "Tasa Mortalidad Enf. Mujer", "Tasa Mortalidad Natural", "Coef. de Proteccion", and "TIEMPO". The right column includes: "Hombres No Suscept.", "Mujeres No Suscept.", "Hombres Susceptibles.", "Mujeres Susceptibles.", "Hombres Infectados", and "Mujeres Infectados". A large green button labeled "SIMULAR" is positioned at the bottom right of the parameter input area.

Figura 2: Fuente: Creación Propia

Ahora, se procederá a realizar la Respectiva Simulación Computacional con las Tasas y las

Poblaciones Iniciales pertenecientes al Modelo, que se ha indicado en la Tabla 1.

Para dos casos específicos se realizará las Simulaciones, el primer caso cuando No hay protección de por medio ($w = 0$), con un tiempo de 50 años, y en el segundo caso cuando hay un coeficiente de protección promedio ($w = 0,5$) con un tiempo de 100 años. De tal manera podremos visualizar el comportamiento de la Enfermedad en estas dos diferentes situaciones seleccionadas.



INTERPRETACIÓN: Como se puede apreciar en las dos gráficas, el decrecimiento de la población susceptible tanto de los Hombres como las Mujeres es mayor cuando no hay un medio de protección ante la enfermedad, mientras la población de los Infectados crece en ese momento. A mediano plazo las poblaciones se estabilizan de tal modo que que no hay grandes cambios a través del tiempo. Por lo cual la prevalencia del VIH, es decir, el porcentaje de personas infectadas por el virus se ha mantenido en el mismo nivel, aunque el número general de personas con este virus se ha incrementado por la acumulación continua de nuevas infecciones con periodos cada vez más prolongados de supervivencia, medidos en una población que está en constante crecimiento.

3 Conclusiones

Una de las metas del Modelo intentar predecir la dinámica de la transmisión heterosexual tanto sin control para ver qué sucedería si no se interviene, y como con una estrategia de control, y ver en cuanto se reduce de acuerdo a la tasa de protección hacia los hombres permitiendo que la población susceptible pueda mantenerse en mayor medida que la infectada a través del tiempo que se considere, y así, poder tomar decisiones con respecto a la enfermedad en cuanto a su dinámica y como evitar el contagio en la manera que fuera posible. [13,15].

- La comparación de los datos descriptivos recogidos por la muestra que ha sido elaborada por el MINSA, tiene una referencia similar al Modelo Matemático para dos poblaciones, hombres y mujeres infectados, teniendo en cuenta el análisis de la población infectada (casos con VIH/SIDA). La grafica del Modelo muestra la aproximación a los datos descriptivos indicando como sería el comportamiento para los siguientes años, y notando que a partir de los 50 años la población infectada comienza a decrecer; un detalle muy importante es

la diferencia de los datos descriptivos y de un Modelo Matemático en cuanto a sus graficas que representan el comportamiento de las poblaciones infectadas; en el caso de los datos se analiza de las muestras realizadas en cada año, lo cual permite realizar estrategias para el año siguiente y así variar la tasa de protección, las tasas de contagio y de mortalidad también que una debilidad es que después del último año no se puede saber cómo es el comportamiento hasta que se recoja y analice los datos correspondientes; por otro lado, en cuanto al Modelo Matemático su gran fortaleza es la simulación a una cierta cantidad de tiempo que se determina para analizar su comportamiento durante ese tiempo, pero una debilidad es que cuando se utiliza el Modelo se usa condiciones iniciales, es decir, tiene tasas iniciales que se supondrán que se mantendrán constantes durante toda la simulación. [10,14,15].

- El Modelo Matemático que se ha presentado tiene un mejor análisis, debido que considera las cuatro poblaciones cada uno con su propio comportamiento epidemiológico, permitiendo una perspectiva más general de la situación de cada población de individuos. [13].
- Las Tasas de Ingreso a la Población Sexualmente Activa, de Contagio por personas Infectadas y de Mortalidad por la enfermedad son la esencia del Modelo, debido que son las consideraciones fundamentales para que el Modelo represente la dinámica de la enfermedad entre susceptibles e infectados.
- Cuanto más sea la tasa de Ingreso, habrá más probabilidad de que haya contagio con personas infectadas, y a la vez si las tasas de contagio son altas permitirá que la población infectada con la enfermedad sea mayor de la población susceptible y con el tiempo disminuirla considerablemente.
- Cuanta más alta sea la tasa de mortalidad por la enfermedad ayudaría a la estabilidad de la población susceptible, aún si las tasas de ingreso y de contagio son de un nivel medio en las poblaciones susceptibles e infectadas, pero la idea no es que la tasa de mortalidad por la enfermedad sea alta debido que se intenta defender la vida de los individuos.
- En el coeficiente de protección que incluye los medios de protección tanto para prevenir el contagio como los medicamentos que se indican en el tratamiento con antirretrovíricos por lo cual, si se consiguen integrar estos cambios en las políticas nacionales de lucha contra el VIH/SIDA, y respaldarlos con los recursos necesarios, el país podría obtener importantes beneficios desde el punto de vista tanto de la Salud Pública como de la Salud individual. Esta concepción se ve reflejada en la gráfica que el coeficiente de protección ayuda considerablemente a la disminución del contagio.

Referencias Bibliográficas

- [1] Barrios Ginart J., Marrero Severo A., Baguer Díaz-Romañach M., De Arazoza Rodríguez H. (2010). *Estimación de parámetros en modelos epidemiológicos de VIH/SIDA*. Revista de Matemática: Teoría y aplicaciones. CIMPA - UCR.
- [2] Burden L. R., Faires D. (2011). *Análisis Numérico*. 9va. Edición. Thomson Learning. México.
- [3] Castillo Chavez C., Zhilan F., Wenzhang H. (2000). *On the Computacion of \mathcal{R}_0 and its role on Global Stability*. Math. Biol. 28, 365-382.
- [4] Diekmann O., Heesterbeek J.A.P., Roberts M. G. (2010). *The Construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models*. Journal of Royal Soc. Interface 7(47): 873-885.
- [5] Estrada B. H., Manilla P. I. (1994). *Estudio de un Modelo Matemático para la Propagación del SIDA*. Rev. Colombia Ciencias. 19(72): 107-116.
- [6] Gala González, Ángela, et al. (2007). *Dinámica de adquisición del VIH en su dimensión social, ambiental y cultural*. Revista Cubana de Medicina Tropical 59.2: 10-14.
- [7] Instituto Nacional de Salud Pública. (2006). *VIH/SIDA y Salud Pública*. 1ra Edición. Centro Nacional para la Prevención y el Control del VIH/SIDA. México.
- [8] Kuang Yang. (2002). *Basic Properties of Mathematical Population Models*. Department of Mathematics and Statistics, Arizona State University.
- [9] López Cruz R. (2006). *Structured SI Epidemic Models with Applications to HIV Epidemic*. Arizona State University. pp. 27-45.
- [10] Mendoza W., Kelika K., Lescano A. (2007). *Nuevas evidencias para las políticas y programas de salud en VIH/SIDA e infecciones de transmisión sexual en el Perú*. Universidad Peruana Cayetano Heredia, Facultad de Salud Pública y Administración Carlos Vidal Layseca.
- [11] Mesa Mazo M, Vergaño Salazar J., Sanchez Botero C., Muñoz Loaiza A. (2010). *Modelo matemático para la dinámica de transmisión del VIH/SIDA en una población sexualmente activa*. Universidad de Quindío, Armenia, Colombia. Rev. salud pública 12(2): 308-316.
- [12] Ministerio de Salud. (2006). *Análisis de la Situación Epidemiológica del VIH /SIDA en el Perú*. Ministerio de Salud. pp. 25-27, 42-47.
- [13] Ministerio de Salud, Fondo de Población de las Naciones Unidas-UNFPA. (2009). *PERÚ: Análisis situacional y diagnóstico de necesidades en torno al acceso a condones masculinos y femeninos*. . Ministerio de Salud.
- [14] ONUSIDA. (2015). *Informe de ONUSIDA para el día mundial del SIDA*. UNAIDS. pp.6-12.
- [15] Pino Romero N. (2013). *Modelo matemático para la dinámica de transmisión del VIH/SIDA en una población heterosexual activa en el Perú*. Facultad de Ciencias Matemáticas, UNMSM.
- [16] Van den Driessche P., James Watmough J. (2001). *Further Notes on the Basic Reproduction*. Department of Mathematics and Statistics. Canada.