Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 16, No 1, p. 25–31, enero–junio de 1998

Sobre el comportamiento de las trayectorias de un sistema de ecuaciones no autónomo con pequeño parámetro

Antonio Manuel Otero Diéguez[‖]
Antonio Iván Ruiz Chaveco[**]

Resumen

En el presente trabajo se estudia un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, no autónomo y analítico respecto a las funciones desconocidas y a un pequeño parámetro del cual depende el segundo miembro.

En el trabajo se hace un estudio del comportamiento de las trayectorias del sistema una vez reducido este a la FCNG (Forma Cuasi-Normal Generalizada), investigándose en particular la bifurcación de las soluciones periódicas.

1. Introducción

En el trabajo [3] de Bíbikov Y.N. se estudian sistemas autónomos dependientes de un pequeño parámetro, los cuales tienen un par de raíces imaginarias puras, siendo el mismo formalmente equivalente a su FNSI (Forma Normal Sobre Superficie Invariante), dándose una condición suficiente de convergencia. Bíbikov obtiene para el sistema antes mencionado la correspondiente ecuación de bifurcación.

En [4] se generaliza el resultado anterior al caso en que la matriz del sistema inicial presenta n pares de valores propios imaginarios puros, dándose la correspondiente ecuación de bifurcación para la FN (Forma Normal) formalmente equivalente al sistema inicial.

En [6] Básov B. y Repilado J.A. construyen la ecuación de bifurcación para un sistema real analítico en el origen de coordenadas y dependiente de un pequeño parámetro vectorial, bajo la existencia de raíces imaginarias puras conmensurables dos a dos.

[‖]Departamento de Matemática-Computación, Universidad de Holguín, Cuba.
[**]Departamento de Matemática, Universidad de Oriente, Cuba.

El objeto de estudio del presente trabajo es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, no autónomo y analítico respecto a las funciones desconocidas y a un pequeño parámetro del cual depende el segundo miembro.

En el trabajo se hace un estudio del comportamiento de las trayectorias del sistema una vez reducido este a la FCNG, investigándose en particular la bifurcación de las soluciones periódicas.

Sea dado el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{x} = Ax + X(x,t,\mu), \tag{1}$$

donde

$$\begin{aligned} &A \in K^{n\times n}(\Re),\\ &x = col(x_1, x_2, ..., x_n),\\ &X(x,t) = col(X_1, X_2, ..., X_n). \end{aligned}$$

Las X_i $(i = 1, 2, ..., n)$ representan series de potencias respecto a $x_1, x_2, ..., x_n$ y μ, convergentes en una vecindad del origen de coordenadas, cuyos coeficientes son funciones analíticas respecto a μ (μ representa un pequeño parámetro, $\mu \in \Re^n$) y 2π periódicas respecto a t, por lo cual admiten la representación

$$\begin{aligned} &X_i(x,t,\mu) = \sum_{|p+p_0|\geq 2} X_i^{(p,p_0)}(t) x^p \mu^{p^0}, \qquad x^p = x_1^{p_1}, x_2^{p_2}, ..., x_n^{p_n},\\ &|p+p^0| = p_1 + ... + p_n + p_1^0 + \ldots + p_n^0, \; p_i \in Z_+, \, p_i^0 \in Z_+. \end{aligned}$$

El sistema (1) tiene la solución trivial $x = 0$.

Consideremos que los valores propios de A están dados de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{Re}\lambda_s = 0, & s = 1, 2, \ldots, L & \lambda' \quad , \\ \operatorname{Re}\lambda_j < 0, & j = L+1, \ldots, m & \lambda'' \quad , \\ \operatorname{Re}\lambda_k > 0, & k = m+1, \ldots, n & \lambda''' \quad . \end{array}$$

El caso en que $L = n$ fue tratado por Bíbikov en [4].

Supongamos que existe $L^* \leq \frac{L}{2}$, L^* pares de valores propios imaginarios puros, $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2, ..., \pm i\omega_{L^*}$, donde los ω_i son racionalmente independientes $(i = 1, ..., L)$.

El sistema (1) puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= J'x' + X'(x,t,\mu),\\ \dot{x}'' &= J''x'' + X''(x,t,\mu),\\ \dot{x}''' &= J'''x''' + X'''(x,t,\mu), \end{aligned} \tag{2}$$

donde J', J'', J''' representan celdas de Jordan de dimensión $L \times L$, $m - L \times m - L$ y $m \times n - m$, respectivamente.

Supongamos que existe la transformación

$$\begin{aligned} x' &= y' + h'(y',t,\mu) + \widehat{h}'(y',y'',t,\mu) + \widetilde{h}(y',y''',t,\mu),\\ x'' &= y'' + h''(y',t,\mu) + \widetilde{h}(y',y''',t,\mu),\\ x''' &= y''' + h'''(y',t,\mu) + \widehat{h}'''(y',y'',t,\mu), \end{aligned} \tag{3}$$

que reduce el sistema (2) al sistema

$$\begin{aligned} \dot{y}' &= J'y' + \widetilde{Y}'(y,\mu), \\ \dot{y}'' &= J''y'' + \widetilde{Y}''(y,t,\mu), \\ \dot{y}''' &= J'''y''' + \widetilde{Y}'''(y,t,\mu), \end{aligned} \tag{4}$$

donde, en el caso no resonante los coeficientes de las series de la transformación (3) se determinan de forma única, y los coeficientes de las series del sistema (4) se eligen arbitrariamente; en el caso resonante se procede de forma inversa.

Definición 1 *El sistema* (4), *donde la primera ecuación define una forma normal l-dimensional y*

$$\begin{aligned} \tilde{Y}''(y',0,y''',t,\mu) = 0, \\ \tilde{Y}'''(y',y'',0,t,\mu) = 0, \end{aligned}$$

define una Forma Cuasi-Normal Generalizada(FCNG).

Los sistemas (2), (3) y (4) están relacionados por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{h}' + \dot{\hat{h}}' + \dot{\tilde{h}}' + \delta_{p',\lambda'}h' + \delta_{p',p'',\lambda'}\hat{h}' + \delta_{p',p''',\lambda'}\tilde{h}' = \\ &\tau'h' + \tau'\hat{h}' + \tau'\tilde{h}' + X' - Y' - p'\tau'h' - p'\tau'\hat{h}' - p''\tau''\hat{h}'' - p'\tau'\tilde{h}' \\ &-p'''\tau'''\tilde{h}' - p'h'^{(p'-e',p_o)}Y' - p'\hat{h}'^{(p'-e',p'',p_o)}Y' - p''\hat{h}'^{(p',p''-e'',p_o)}\tilde{Y}'' \\ &-p'\tilde{h}'^{(p'-e',p''',p_o)}Y' - p'''\tilde{h}'^{(p',p'''-e''',p_o)}\tilde{Y}'''; \\[2ex] &\dot{h}'' + \dot{\tilde{h}}'' + \delta_{p',\lambda''}h'' + \delta_{p',p''',\lambda''}\tilde{h}'' = \\ &\tau''h'' + \tau''\tilde{h}'' + X'' - \tilde{Y}'' - p'\tau'h'' - p'\tau'\tilde{h}'' - \\ &p'''\tau'''\tilde{h}'' - p'h''^{(p'-e',p_0)}Y' - p'\tilde{h}''^{(p'-e',p''',p_0)} - p'''\tilde{h}''^{(p',p'''-e''',p_0)}\tilde{Y}'''; \\[2ex] &\dot{h}''' + \dot{\hat{h}}''' + \delta_{p',\lambda'''}h''' + \delta_{p',p'',\lambda'''}\hat{h}''' = \\ &\tau'''h''' + \tau'''\hat{h}''' + X''' - \tilde{Y}''' - p'\tau'h''' - p'\tau'\hat{h}''' - \\ &-p''\tau''\hat{h}''' - p'h'''^{(p'-e',p_0)}Y' - p'\hat{h}'''^{(p'-e',p'',p_0)} - p''\hat{h}'''^{(p',p''-e'',p_0)}\tilde{Y}''. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Tomemos los coeficientes de grado p de las series de forma que respondan a los siguientes casos:

a. Si $p = (p', 0, 0, p_0)$ las ecuaciones del sistema (5) tienen la forma

$$\begin{aligned} \dot{h}'^{(p)}(t,\mu) + \delta_{p',\lambda'}h'^{(p)}(t,\mu) &= \Phi'^{(p)}(y,\mu) - y'^{(p)}(\mu), \\ \dot{h}''^{(p)}(t,\mu) + \delta_{p',\lambda'}h''^{(p)}(t,\mu) &= \Phi''^{(p)}(t,\mu), \\ \dot{h}'''^{(p)}(t,\mu) + \delta_{p',\lambda'''}h'''^{(p)}(t,\mu) &= \Phi'''^{(p)}(t,\mu). \end{aligned} \tag{6}$$

Resolviendo la primera ecuación de (6) y diferenciando los casos resonantes y no resonantes, llegamos a los siguientes resultados:

A) $\delta_{p',\lambda'} \neq ik_0\,, \quad k_0 \in \mathbb{Z}.$
La única solución $2\pi-$periódica viene dada por

$$h'^{(p)}(t,\mu) = (Exp(2\pi\delta_{p',\lambda'})-1)^{(-1)} \int_t^{t+2\pi} \Phi'^{(p)}(\tau,\mu)\, Exp(\delta_{p',\lambda'}(\tau-t))\, d\tau. \qquad (7)$$

B) $\delta_{p',\lambda'} = ik_0, \quad k_0 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\,.$

$$h'^{(p)}(t,\mu) = CExp(-ik_0t) + \int_0^t \Phi'^{(p)}(\tau,\mu)\, Exp(ik_0(\tau-t))\, d\tau - \frac{Y'^{(p)}(\mu)}{ik_0} Exp(-ik_0t).$$

Para que la solución sea $2\pi-$periódica es necesario y suficiente que

$$\int_0^{2\pi} \Phi'^{(p)}(\tau,\mu) Exp(ik_0\,\tau)\, d\tau = 0.$$

C) $\delta_{p',\lambda'} = 0.$

$$h'(t,\mu) = \int_0^t \Phi'^{(p)}(\tau,\mu)\, d\tau - t\, Y'^{(p)};\; t \in [0,2\pi]. \qquad (8)$$

Para que esta solución sea $2\pi-$periódica es necesario y suficiente que se satisfaga

$$Y'^{(p)}(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi'^{(p)}(t,\mu)\, dt. \qquad (9)$$

Las soluciones de las dos restantes ecuaciones del sistema (7), se obtienen por medio de expresiones similares a (7) pues por la característica de los valores propios no existe resonancia.

b. Si $p = (p', p'', 0, p_0)$ las ecuaciones del sistema (7) tienen la forma

$$\dot{\hat{h}}'^{(p)}(t,\mu) + \delta_{p',p'',\lambda'} \hat{h}'^{(p)}(t,\mu) = \hat{\Phi}'^{(p)}(t,\mu), \qquad (10)$$
$$\dot{\hat{h}}'''^{(p)}(t,\mu) + \delta_{p',p'',\lambda'''} \hat{h}'''^{(p)}(t,\mu) = \hat{\Phi}'''^{(p)}(t,\mu).$$

c. Si $p = (p', 0, p''', p_0)$, las ecuaciones del sistema (5) tienen la forma

$$\dot{\tilde{h}}'^{(p)}(t,\mu) + \delta_{p',p''',\lambda'} \tilde{h}'^{(p)}(t,\mu) = \tilde{\Phi}'^{(p)}(t,\mu), \qquad (11)$$
$$\dot{\tilde{h}}''^{(p)}(t,\mu) + \delta_{p',p''',\lambda''} \tilde{h}''^{(p)}(t,\mu) = \tilde{\Phi}''^{(p)}(t,\mu).$$

d. Si $p = (p', p'', p''', p_0)$, las ecuaciones del sistema (5) tienen la forma

$$\begin{aligned} \tilde{Y}''^{(p)} &= X''^{(p)} - p'''\tilde{h}''^{(p',p'',p'''-s'''+e''',p_0)}\tilde{Y}'''^{(p',p'',s''',p_0)}, \\ \tilde{Y}'''^{(p)} &= X'''^{(p)} - p''\hat{h}'''^{(p',p''-s''+e'',p''',p_0)}\tilde{Y}''^{(p',s'',p''',p_0)}. \end{aligned}$$

Las soluciones de las ecuaciones correspondientes a los casos b. y c. se obtienen por expresiones similares a (7) , pues en estos no se presenta el caso resonante.

Los resultados obtenidos conducen al siguiente teorema:

Teorema 1 *El sistema analítico*(2) *y la FCNG* (4) *son formalmente equivalentes.* ∎

A continuación consideraremos el caso $L^* = \frac{L}{2}$, y por consiguiente,

$$Y_{S'}(y', \mu) = \begin{cases} y_{2S'-1}P_{2S'-1}(y_1y_2, \ldots, y_{L^*-1}y_{L^*}, \mu), \\ y_{2S'}P_{2S'}(y_1y_2, \ldots, y_{L^*-1}y_{L^*}, \mu), \end{cases}$$

donde $P_{2S'}$ es el conjugado de $P_{2S'}$-1, $(s' = 1, ..., L^*)$.
Las series $P_{S'}(y_1y_2, \ldots, y_{L^*-1}y_{L^*}, \mu)$ admiten ser representadas así:

$$P_{S'}(y_1y_2, \ldots, y_{L^*-1}y_{L^*}, \mu) = G_{S'}(y_1y_2, \ldots, y_{L^*-1}y_{L^*}, \mu) + iH_{S'}(y_1y_2, \ldots, y_{L^*-1}y_{L^*}, \mu),$$

donde $G_{S'}$ y $H_{S'}$ son series de coeficientes reales, los cuales se determinan por medio de expresiones similares a (9).
Para continuar el estudio analizaremos los siguientes casos (ver [3]):

1. Caso trascendente $G_{S'} = 0$.

   El sistema (4) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{y}_{S'} &= i\delta_{S'}y_{S'}[\omega_{S'} + H_{S'}(y_1y_2, \ldots, y_{L^*-1}y_{L^*}, \mu)], \qquad (12) \\ \dot{y}'' &= J''y'' + \tilde{Y}''(y, t, \mu), \\ \dot{y}''' &= J'''y''' + \tilde{Y}'''(y, t, \mu), \end{aligned}$$

   para la cual se definen las trayectorias cerradas expresadas por

$$\begin{aligned} y_{2S'}y_{2S'-1} &= \tilde{c}_{S'}, \\ y'' &= 0, \\ y''' &= 0, \end{aligned}$$

   donde

$$y_{2S'} = \bar{c}_{2S'}Exp(i(\omega_{2S'} + H_{2S'}(\bar{c}, \mu))),$$

$$y_{2S'-1} = \bar{c}_{2S'-1}Exp(i(\omega_{2S'-1} + H_{2S'-1}(\tilde{c}, \mu))).$$

Las mismas expresiones, en correspondencia con (3) , definen las soluciones periódicas del sistema (2).

Bajo el cumplimiento de la condición

$$P_{2S'}(y_1y_2,\dots,y_{L^*-1}y_{L^*},\mu)+P_{2S'-1}(y_1y_2,\dots,y_{L^*-1}y_{L^*},\mu)=0$$

(ver [3]) , se garantiza la equivalencia analítica entre los sistemas (2) y (4).

Si tomamos la superficie invariante definida por $y''=0$, las trayectorias del sistema (12) son estables.

En caso de que tomemos la superficie invariante $y'''=0$, las trayectorias son inestables.

2. Caso algebraico $G_{S'}\neq 0$.

Supongamos el término de G de grado inferior de orden N y consideremos en la transformación (3) polinomios que no sobrepasan los términos de grado mayores que N, los cuales se obtienen de las series de la transformación mediante un truncamiento en su desarrollo, por lo que el sistema (3) asume la forma

$$\begin{aligned} x' &= y'+h'^N(y',t,\mu)+\hat{h}'^N(y',y'',t,\mu)+\tilde{h}'^N(y',y''',t,\mu), \\ x'' &= y''+h''^N(y',t,\mu)+\tilde{h}''^N(y',y''',t,\mu), \\ x''' &= y'''+h'''^N(y',t,\mu)+\hat{h}'''^N(y',y'',t,\mu). \end{aligned} \tag{13}$$

Es evidente que la transformación (13) es convergente, obteniéndose un sistema que coincide con su FCNG hasta los términos de orden N.

Por tanto el sistema (3) queda expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{S'} &= J'y_{S'}+i\delta_{S'}y_{S'}H^N_{S'}(y_{2S'-1}y_{2S'},\mu)+y_{S'}G^N_{S'}(y_{2S'-1}y_{2S'},\mu) \\ &\quad +Y^*_{S'}(y_{2S'-1}y_{2S'}), \\ \dot{y}'' &= J''y''+\tilde{Y}''^N(y,t,\mu)+\tilde{Y}''^*(y,t,\mu), \\ \dot{y}''' &= J'''y'''+\hat{Y}'''^N(y,t,\mu)+\tilde{Y}'''^*(y,t,\mu), \\ \delta_{S'} &= \begin{cases} 1 & si \quad s'=2n-1, \\ -1 & si \quad s'=2n \qquad n=1,2,3,\dots \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

Aplicando el cambio de variable

$$\begin{aligned} y_{2S'-1} &= \rho_{2S''-1}Exp(i\varphi_{2S'-1}), \\ y_{2S'} &= \rho_{2S''}Exp(i\varphi_{2S'}), \\ y'' &= z, \\ y''' &= v, \end{aligned} \tag{15}$$

el sistema (14) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{S'} &= \rho_{S'} G^N_{S'}(\rho^2 . \mu) + 0(\rho^2 \mu)^{N+1}, \\ \dot{\varphi}_{S'} &= \omega_{S''} + \delta_{S'} H^N_{S'}(\rho^2, \mu) + 0(\rho^2 \mu)^{N+1}, \\ \dot{z} &= J'' z + Z^N(\rho^2, \varphi, z, v, t, \mu) + 0(\rho^2 \mu)^{N+1}, \\ \dot{v} &= J''' v + V^N(\rho^2, \varphi, z, v, t, \mu) + 0(\rho^2 \mu)^{N+1}. \end{aligned} \tag{16}$$

De la expresión (16) se determina la ecuación de bifurcación (ver [2, 3])

$$G^N_{S'}(\rho^2, \mu) = 0, \tag{17}$$

la cual satisface las condiciones del teorema de las funciones implícitas:

$$\begin{aligned} 1.\quad G_{S'}(0,0) &= 0, \\ 2.\quad \frac{\partial G(0,0)}{\partial \mu} &\neq 0. \end{aligned}$$

Cada solución $\rho = \rho_0\, \mu = \mu_0$ de (17) representa una solución periódica del sistema (16), y por consiguiente a (2) le corresponden trayectorias cerradas.

Referencias

[1] ARNOLD V.I. *Capítulos complementarios de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias* (en ruso). Moscú, Naúka, 1978.

[2] BÍBIKOV Y.N. *Curso general de las ecuaciones diferenciales ordinarias.* Universidad de Leningrado, 1981 (en ruso).

[3] BÍBIKOV Y.N. "Local theory of nonlinear Analytic ordinary differenrial equations". *Lectures Notes in Mathematics,* New York, 1979.

[4] BÍBIKOV Y.N. Bifurcación de Hopf para movimientos cuasi-periódicos". *Colloquia Mathematica.* Societatis János Bolyai, 30, Vol I. Budapest, Hungría, 1981.

[5] SALVODORI L. "Generalized Hopf Bifurcation and related stability problems". *Colloquia Mathematica.* Societatis János Bolyai, 30, Vol II. Budapest, Hungría, 1981.

[6] BÁSOV V.V., REPILADO J.A., SARO A.J. "Ecuación de bifurcación para los sistemas autónomos con frecuencias conmensurables dos a dos". *Revista Ciencias Matemáticas,* Vol IX, No1. Universidad de La Habana, 1989.