ISSN 1816-0301 (print)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING

УДК 517.958:537.8

Поступила в редакцию 04.05.2018
Received 04.05.2018

В. Т. Ерофеенко[1], А. И. Урбанович[2]

[1]Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем математики и информатики», Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КОМПОЗИТНЫХ СРЕДАХ СО СФЕРОИДАЛЬНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Аннотация. Разработана математическая модель, которая описывает распространение монохроматических электромагнитных волн в среде с пространственной дисперсией, содержащей вытянутые вдоль заданного направления сфероидальные частицы. Исходная классическая интегро-дифференциальная модель для электромагнитных полей в среде с пространственной дисперсией преобразована с точностью до величин третьего порядка малости в дифференциальную модель, в которой интегро-дифференциальные уравнения Максвелла представлены в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка. При этом электрическая и магнитная поляризации среды представлены через операторы Лапласа. Система уравнений решена аналитически, и построена полная система четырех прямых и четырех обратных, распространяющихся в противоположных направлениях электромагнитных волн. Аналитическое представление полей содержит вектор, определяющий направление распространения плоских волн. Волновые числа полей также зависят от направления их распространения, что указывает на анизотропный характер разработанной математической модели.

Ключевые слова: математические модели, интегро-дифференциальная модель, электромагнитные монохроматические волны, плоские поля, сфероидальные частицы, анизотропные среды, пространственная дисперсия, аналитическое моделирование

Для цитирования. Ерофеенко, В. Т. Математическая модель распространения электромагнитных волн в композитных средах со сфероидальными частицами/ В. Т. Ерофеенко, А. И. Урбанович // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 3. – С. 102–112.

V. T. Erofeenko[1], A. I. Urbanovich[2]

[1]Institution of the Belarusian State University
"Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics", Minsk, Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Belarus

MATHEMATICAL MODEL OF PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN COMPOSITE MEDIA WITH SPHEROIDAL PARTICLES

Abstract. A mathematical model describing the propagation of monochromatic electromagnetic waves in a medium with spatial dispersion containing spheroidal particles of the along prescribed direction has been developed. The initial classical integro-differential model for electromagnetic fields in a medium with spatial dispersion is transformed, within the third-order infinitesimal, to the differential model, where the integro-differential Maxwell equations are represented as a system of second-order differential equations. In this case electrical and magnetic polarizations of the medium are given in the Laplace operators. This system of equations is analytically solved; a complete system of four forward and four backward counter-propagating electromagnetic waves is formed. The analytical representation of the fields includes a vector determining the propagation direction of plane waves. Wave numbers of the fields also depend on their propagation directions pointing to anisotropic character of the developed mathematical model.

Keywords: mathematical models, integro-differential model, electromagnetic monochromatic waves, plane fields, spheroidal particles, anisotropic medium, space dispersion, analytical modeling

For citation. Erofeenko V. T., Urbanovich. A. I. Mathematical model of propagation of electromagnetic waves in composite media with spheroidal particles. *Informatics*, 2018, vol. 15, no. 3, pp. 102–112 (in Russian).

Введение. Разработка математических методов моделирования распространения излучений электромагнитных волн в композитных материалах является актуальным направлением исследований в математической физике [1]. Как правило, композиты представляют собой однородные матрицы, содержащие материальные неоднородности (частицы) различных типов, разнообразие которых велико [2–6]. Анализ таких материалов требует применения специальных математических моделей, адекватно описывающих электрические и магнитные свойства композитных материалов. При этом существенную роль в моделях играют отношения между размерами частиц и длинами волн в вакууме, в материале матрицы и материале неоднородностей. В статьях [2, 3] разработаны модели киральной и биизотропной сред, содержащих сферические частицы со спиральной проводимостью поверхности. В работе [4] исследована среда, содержащая случайно распределенные идеально проводящие спирали, в [6] изучаются среды с биизотропными сферическими частицами. Для исследования электродинамических свойств композитных материалов рассчитываются коэффициенты эффективностей экранов из композитов [4, 7, 8].

Одним из классов композитных материалов являются среды с пространственной дисперсией [9–12]. Для них электромагнитные свойства в точке зависят от значений напряженностей электрического и магнитного полей в окрестности рассматриваемой пространственно-временной точки. В данном случае электрическая и магнитная поляризации среды выражаются через интегральные операторы [1, 11], входящие в уравнения электродинамики. Аналитическое решение уравнений Максвелла с интегральными членами требует разработки специальных методов. В связи с этим строятся дифференциальные модели сред, которые позволяют исследовать уравнения и получать их аналитические решения. В статье [12] разработана модель, описывающая распространение электромагнитных волн в материале с пространственной дисперсией, который содержит сферические частицы.

Учитывая влияние размеров формы частиц композитов [5] на свойства анизотропии, в настоящей работе строится математическая модель, описывающая распространение электромагнитных волн в среде с пространственной дисперсией со сфероидальными частицами. В случае вытянутых сфероидальных ориентированных вдоль оси *Oz* частиц, размеры которых значительно меньше по сравнению с длиной электромагнитной волны, распространяющейся в среде, поля представлены в виде разложений Тейлора. В разработанной модели использовано конечное число слагаемых рядов и опущены относительно малые члены бесконечных рядов. В результате интегро-дифференциальные уравнения Максвелла преобразованы к системе уравнений Максвелла, содержащих дифференциальные операторы второго порядка. Для полученных уравнений построена система аналитических решений в виде плоских электромагнитных полей, распространяющихся в среде.

Интегро-дифференциальная модель биизотропной среды с пространственной дисперсией. Рассмотрим пространство R^3 с декартовой системой координат *Oxyz*, заполненное однородной матрицей с материальными параметрами: $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0, \mu = \mu_r \mu_0 -$ диэлектрическая и магнитная проницаемости; $\varepsilon_0, \mu_0 -$электрическая и магнитная постоянные. В матрице случайным образом распределены частицы двух сортов в виде вытянутых сфероидов $\left(x^2 + y^2\right)/a_j^2 + z^2/b_j^2 = 1,$ направленных вдоль координаты *Oz*; $a_j, b_j -$малая и большая оси сфероидов $\left(j = 1, 2\right)$. Среду из матрицы со сфероидальными частицами будем называть анизотропной средой с пространственной дисперсией. Для математического моделирования такой среды используется эквивалентная однородная среда с пространственной дисперсией. Комплексные амплитуды $\vec{E}, \vec{H}$ электромагнитного поля с временной зависимостью $\exp\left(-i\omega t\right)$ в такой среде подчиняются уравнениям

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\left(\varepsilon\vec{E} + \vec{P}\right), \quad \operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\left(\mu\vec{H} + \vec{m}\right), \tag{1}$$

где $\omega-$ круговая частота. Электрическая и магнитная поляризации среды с пространственной дисперсией определяются объемными интегралами по пространственным переменным $\vec{r}_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$:

$$\vec{P}\left(\vec{r}\right) = \frac{\varepsilon_0}{V_1}\int\limits_{D_{1M}} P\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\vec{E}\left(\vec{r}_0\right)d\vec{r}_0; \tag{2}$$

$$\vec{m}\left(\vec{r}\right) = \frac{\mu_0}{V_2}\int\limits_{D_{2M}} m\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\vec{H}\left(\vec{r}_0\right)d\vec{r}_0, \tag{3}$$

где D_{jM} – вытянутый сфероид с осями a_j, b_j и центром в точке $M\left(x, y, z\right)$, точка $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right) \in D_{jM}$, $\vec{r} = \left(x, y, z\right)$; $V_j = \frac{4}{3}\pi b_j a_j^2 -$ объем сфероида D_{jM}.

Воспользуемся системой вытянутых сфероидальных координат $O\xi\eta\varphi$ [13, с. 39]:

$$x = f\left[\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cos\varphi, \quad y = f\left[\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\sin\varphi,$$
$$z = f\xi\eta, \quad 1<\xi<\infty, \quad -1<\eta<1, \quad 0\le\varphi<2\pi. \tag{4}$$

Для аналитического задания сфероида D_{jM} введем вытянутые сфероидальные координаты $M\ \xi_j\eta_j\varphi_j$ с началом координат *M*, которые связаны с декартовыми координатами формулами

$$x_0 = x + f_j\left[\left(\xi_j^2-1\right)\left(1-\eta_j^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cos\varphi_j, \quad y_0 = y + f_j\left[\left(\xi_j^2-1\right)\left(1-\eta_j^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\sin\varphi_j,$$
$$z_0 = z + f_j\,\xi_j\eta_j, \quad f_j = \sqrt{b_j^2-a_j^2}, \ 1<\xi_j<\infty, \quad -1<\eta_j<1, \quad 0\le\varphi_j<2\pi. \tag{5}$$

Поверхность сфероида S_j в сфероидальных координатах определяется уравнением

$$\xi_j = c_j = \frac{b_j}{\sqrt{b_j^2-a_j^2}}.$$

Дифференциальная модель биизотропной среды с пространственной дисперсией специального вида. Система интегро-дифференциальных уравнений (1)–(3) описывает распространение электромагнитных волн в произвольной анизотропной среде с пространственной дисперсией. Для частного случая среды преобразуем интегро-дифференциальную модель к более простой дифференциальной модели уравнений с частными производными второго порядка.

Выразим координату ξ сфероидальной системы координат $O\xi\eta\varphi$ через декартовы координаты *x*, *y*, *z* системы $Oxyz$, используя (4). Получим

$$\xi = F\left(x, y, z; f\right) = \frac{1}{f\sqrt{2}}\left[x^2+y^2+z^2+f^2+\left[\left(x^2+y^2+z^2+f^2\right)^2+4\left(x^2+y^2\right)z^2\right]^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

В случае специальной среды подынтегральные функции для поляризаций (2), (3) положим равными $P(\vec{r}-\vec{r}_0)=\bar{K}_1\left(F\left(\vec{r}-\vec{r}_0;f_1\right)\right)$, $m(\vec{r}-\vec{r}_0)=\bar{K}_2\left(F\left(\vec{r}-\vec{r}_0;f_2\right)\right)$, где $\bar{K}_j(\xi)=K_j\left(\xi/c_j\right)$, $K_j(p)-$ заданные функции, $0\le p\le 1$. В итоге получим формулы

$$\vec{P}(\vec{r})=\frac{\varepsilon_0}{V_1}\int\limits_{D_{1M}}\bar{K}_1\left(F\left(x-x_0,y-y_0,z-z_0;f_1\right)\right)\vec{E}(\vec{r}_0)d\vec{r}_0,$$
$$\vec{m}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{V_2}\int\limits_{D_{2M}}\bar{K}_2\left(F\left(x-x_0,y-y_0,z-z_0;f_2\right)\right)\vec{H}(\vec{r}_0)d\vec{r}_0. \quad (7)$$

Методику построения дифференциальной модели опишем с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. *С точностью до величины третьего порядка малости система интегро-дифференциальных уравнений (1)–(3) с поляризациями (7) эквивалентна системе дифференциальных уравнений*

$$\operatorname{rot}\vec{H}=-i\omega\left(\varepsilon_\Pi\vec{E}+P_1\Delta\vec{E}+P_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{E}\right),$$
$$\operatorname{rot}\vec{E}=i\omega\left(\mu_\Pi\vec{H}+m_1\Delta\vec{H}+m_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{H}\right), \quad (8)$$

где $\Delta-$ *оператор Лапласа,*

$$\varepsilon_\Pi=\varepsilon_0\left(\varepsilon_r+F_1\int\limits_1^{c_1}\bar{K}_1(\xi)\left(3\xi^2-1\right)d\xi\right),\quad \mu_\Pi=\mu_0\left(\mu_r+F_2\int\limits_0^{c_2}\bar{K}_2(\xi)\left(3\xi^2-1\right)d\xi\right),$$

$$P_2=\frac{1}{10}\varepsilon_0\, f_1^2F_1\int\limits_1^{c_1}\bar{K}_1(\xi)\left(3\xi^2-1\right)d\xi,\qquad F_j=\frac{f_j^3}{b_ja_j^2},$$

$$P_1=\frac{1}{2}\varepsilon_0\, f_1^2F_1\int\limits_1^{C_1}\bar{K}_1(\xi)\left(\xi^2-1\right)\left(\xi^2-\frac{1}{5}\right)d\xi,$$

$$m_2=\frac{1}{10}\mu_0\, f_2^2F_2\int\limits_1^{c_2}\bar{K}_2(\xi)\left(3\xi^2-1\right)d\xi,$$

$$m_1=\frac{1}{10}\mu_0\, f_2^2F_2\int\limits_1^{c_2}\bar{K}_2(\xi)\left(\xi^2-1\right)\left(\xi^2-\frac{1}{5}\right)d\xi.$$

Доказательство. Компоненты векторов

$$\vec{E}(\vec{r}_0)=E_x\vec{r}(r_0)\vec{e}_x+E_y(\vec{r}_0)\vec{e}_y+E_z(\vec{r}_0)\vec{e}_z,$$

$$\vec{H}(\vec{r}_0)=H_x(\vec{r}_0)\vec{e}_x+H_y(\vec{r}_0)\vec{e}_y+H_z(\vec{r}_0)\vec{e}_z$$

разложим в ряды Тейлора в окрестности точки M. Для построения простой модели ограничимся слагаемыми ряда до второго порядка включительно, пренебрегая величинами третьего порядка малости [12]:

$$
\begin{gathered}
E_\alpha(\vec{r}_0)=E_\alpha(\vec{r})+\frac{\partial E_\alpha(\vec{r})}{\partial x}(x_0-x)+\frac{\partial E_\alpha(\vec{r})}{\partial y}(y_0-y)+\frac{\partial E_\alpha(\vec{r})}{\partial z}(z_0-z)+\\
+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial x^2}(x_0-x)^2+\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial y^2}(y_0-y)^2+\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial z^2}(z_0-z)^2\right]+\\
+\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial x\partial y}(x_0-x)(y_0-y)+\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial x\partial z}(x_0-x)(z_0-z)+\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial y\partial z}(y_0-y)(z_0-z),\\
H_\alpha(\vec{r}_0)=H_\alpha(\vec{r})+\frac{\partial H_\alpha(\vec{r})}{\partial x}(x_0-x)+\frac{\partial H_\alpha(\vec{r})}{\partial y}(y_0-y)+\frac{\partial H_\alpha(\vec{r})}{\partial z}(z_0-z)+\\
+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial x^2}(x_0-x)^2+\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial y^2}(y_0-y)^2+\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial z^2}(z_0-z)^2\right]+\\
+\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial x\partial y}(x_0-x)(y_0-y)+\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial x\partial z}(x_0-x)(z_0-z)+\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial y\partial z}(y_0-y)(z_0-z),
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где $\alpha=x,\ y,\ z$.

Вычислим компоненты P_α электрической поляризации (7). Подставляя (9) в (7), получим

$$
\begin{gathered}
P_\alpha(\vec{r})=\varepsilon_0\left(I_0^{(1)}E_\alpha(\vec{r})+I_1^{(1)}\frac{\partial E_\alpha(\vec{r})}{\partial x}+I_2^{(1)}\frac{\partial E_\alpha(\vec{r})}{\partial y}+I_3^{(1)}\frac{\partial E_\alpha(\vec{r})}{\partial z}+\right.\\
+I_{11}^{(1)}\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial x^2}+I_{22}^{(1)}\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial y^2}+I_{33}^{(1)}\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial z^2}+\\
\left.+I_{12}^{(1)}\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial x\partial y}+I_{13}^{(1)}\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial x\partial z}+I_{23}^{(1)}\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial y\partial z}\right);
\end{gathered}
\tag{10}
$$

$$
\begin{gathered}
I_0^{(j)}=\frac{1}{V_j}\int\limits_{D_{jM}}\overline{K}_j\left(F\left(\vec{r}-\vec{r}_0;\,f_j\right)\right)d\vec{r}_0,\qquad I_1^{(j)}=\frac{1}{V_j}\int\limits_{D_{jM}}\overline{K}_j\left(F\left(\vec{r}-\vec{r}_0;\,f_j\right)\right)(x_0-x)d\vec{r}_0,\\
I_2^{(j)}=\frac{1}{V_j}\int\limits_{D_{jM}}\overline{K}_j\left(F\left(\vec{r}-\vec{r}_0;\,f_j\right)\right)(y_0-y)d\vec{r}_0,\\
I_3^{(j)}=\frac{1}{V_j}\int\limits_{D_{jM}}\overline{K}_j\left(F\left(\vec{r}-\vec{r}_0;\,f_j\right)\right)(z_0-z)d\vec{r}_0,
\end{gathered}
\tag{11}
$$

$$I_{11}^{(j)} = \frac{1}{2V_j} \int\limits_{D_{jM}} \overline{K}_j \left(F\left(\vec{r} - \vec{r}_0;\, f_j\right)\right)\left(x_0 - x\right)^2 d\vec{r}_0,$$

$$I_{22}^{(j)} = \frac{1}{2V_j} \int\limits_{D_{jM}} \overline{K}_j \left(F\left(\vec{r} - \vec{r}_0;\, f_j\right)\right)\left(y_0 - y\right)^2 d\vec{r}_0,$$

$$I_{33}^{(j)} = \frac{1}{2V_j} \int\limits_{D_{jM}} \overline{K}_j \left(F\left(\vec{r} - \vec{r}_0;\, f_j\right)\right)\left(z_0 - z\right)^2 d\vec{r}_0, \tag{11}$$

$$I_{12}^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int\limits_{D_{jM}} \overline{K}_j \left(F\left(\vec{r} - \vec{r}_0;\, f_j\right)\right)\left(x_0 - x\right)\left(y_0 - y\right) d\vec{r}_0,$$

$$I_{13}^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int\limits_{D_{jM}} \overline{K}_j \left(F\left(\vec{r} - \vec{r}_0;\, f_j\right)\right)\left(x_0 - x\right)\left(z_0 - z\right) d\vec{r}_0,$$

$$I_{23}^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int\limits_{D_{jM}} \overline{K}_j \left(F\left(\vec{r} - \vec{r}_0;\, f_j\right)\right)\left(y_0 - y\right)\left(z_0 - z\right) d\vec{r}_0.$$

Для вычисления интегралов (11) введем две сфероидальные системы координат $M\ \xi_j \eta_j \varphi_j$ с началом в точке M (5). Интегралы (11) вычислим в сфероидальных координатах, подставляя (5) в (11), учитывая (6) и полагая $d\vec{r}_0 = f_j^3\left(\xi_j^2 - \eta_j^2\right) d\xi_j d\eta_j d\varphi_j$.

Получим следующие значения интегралов:

$$I_0^{(j)} = \frac{f_j^3}{V_j} \int\limits_1^{c_j} \overline{K}_j\left(\xi_j\right) \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(\xi_j^2 - \eta_j^2\right) d\eta_j\, d\varphi_j\, d\xi_j =$$

$$= \kappa_j = \frac{f_j^3}{b_j a_j^2} \int\limits_1^{c_j} \overline{K}_j\left(\xi\right)\left(3\xi^2 - 1\right) d\xi,$$

$$I_1^{(j)} = I_2^{(j)} = I_3^{(j)} = 0, \qquad I_{12}^{(j)} = I_{13}^{(j)} = I_{23}^{(j)} = 0,$$

$$I_{11}^{(j)} = \frac{f_j^5}{2V_j} \int\limits_1^{c_j} \overline{K}_j\left(\xi_j\right) \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(\xi_j^2 - \eta_j^2\right)\left(\xi_j^2 - 1\right)\left(1 - \eta_j^2\right) \cos^2\phi_j\, d\eta_j\, d\phi_j\, d\xi_j = \tag{12}$$

$$= \frac{\pi f_j^5}{2V_j} \int\limits_1^{c_j} \overline{K}_j\left(\xi_j\right)\left(\xi_j^2 - 1\right) \int\limits_{-1}^{1} \left(\xi_j^2 - \eta_j^2\right)\left(1 - \eta_j^2\right) d\eta_j\, d\xi_j = g_j =$$

$$= \frac{f_j^5}{2b_j a_j^2} \int\limits_1^{c_j} \overline{K}_j\left(\xi\right)\left(\xi^2 - 1\right)\left(\xi^2 - \frac{1}{5}\right) d\xi, \quad I_{22}^{(j)} = g_j,$$

$$I_{33}^{(j)} = \frac{f_j^5}{2V_j} \int\limits_1^{c_j} \overline{K}_j\left(\xi_j\right)\xi_j^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(\xi_j^2 - \eta_j^2\right)\eta_j^2\, d\eta_j\, d\varphi_j\, d\xi_j = g_j + \tau_j, \quad \tau_j = \frac{1}{10}\kappa_j\, f_j^2.$$

Подставив значения интегралов (12) в (10), получим формулы для декартовых компонент вектора электрической поляризации

$$P_\alpha(\vec{r}) = \varepsilon_0\left(\kappa_1 E_\alpha(\vec{r}) + \tau_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_\alpha(\vec{r}) + g_1 \Delta E_\alpha(\vec{r})\right).$$

Тогда вектор электрической поляризации будет определяться формулой

$$\vec{P} = \varepsilon_0\left(\kappa_1 \vec{E} + \tau_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{E} + g_1 \Delta\vec{E}\right). \tag{13}$$

После аналогичных преобразований получим формулу для вектора магнитной поляризации

$$\vec{m} = \mu_0\left(\kappa_2 \vec{H} + \tau_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{H} + g_2 \Delta\vec{H}\right). \tag{14}$$

Подставляя выражения (13), (14) в уравнения (1), придем к требуемой дифференциальной модели. ■

Аналитическое построение базисных плоских электромагнитных полей. Построим систему плоских электромагнитных полей, распространяющихся в среде с пространственной дисперсией, т. е. полей $\vec{E}, \vec{H}$, удовлетворяющих уравнениям (8). Плоские поля представляют собой электромагнитные поля вида

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left(A_1\vec{e}_x + B_1\vec{e}_y + C_1\vec{e}_z\right)\Phi(x,y)e^{vz}, \\ \vec{H} &= \left(A_2\vec{e}_x + B_2\vec{e}_y + C_2\vec{e}_z\right)\Phi(x,y)e^{vz}, \end{aligned} \tag{15}$$

где $\Phi(x,y) = \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y)$; $\alpha_1, \alpha_2, \nu, A_j, B_j, C_j$ – постоянные.

Для аналитического описания полей (15) воспользуемся волновыми полями [11, с. 96]

$$\begin{aligned} \vec{W}^{(\mp1)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k) &= \frac{i}{\lambda}\left(\alpha_2\vec{e}_x - \alpha_1\vec{e}_y\right)\Phi(x,y)\exp(\mp vz), \\ \vec{W}^{(\mp2)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k) &= \frac{1}{k}\left(\mp\frac{iv}{\lambda}\left(\alpha_1\vec{e}_x + \alpha_2\vec{e}_y\right) + \lambda\vec{e}_z\right)\Phi(x,y)\exp(\mp vz), \end{aligned} \tag{16}$$

где α_1, α_2, k – произвольные комплексные постоянные,

$$\lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2},\ 0 \le \arg\lambda < \pi, \quad v = \sqrt{\lambda^2 - k^2},\ -\frac{\pi}{2} \le \arg v < \frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что для полей (16) выполнены формулы [11, с. 98]

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\vec{W}^{(\mp1)} = k\vec{W}^{(\mp2)}, \qquad \operatorname{rot}\vec{W}^{(\mp2)} = k\vec{W}^{(\mp1)}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{W}^{(\mp1)} = v^2\vec{W}^{(\pm1)}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{W}^{(\mp2)} = v^2\vec{W}^{(\pm2)}, \\ \operatorname{div}\vec{W}^{(\mp1)} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{W}^{(\mp2)} = 0,\ \Delta\vec{W}^{(\mp j)} = -k^2\vec{W}^{(\mp j)}. \end{gathered} \tag{17}$$

Решение системы уравнений (8) вида (15) представим через волновые поля (16).

Теорема 2. *Электромагнитные поля, распространяющиеся в среде с пространственной дисперсией со сфероидальными частицами, определяются формулами*

$$\vec{E} = E_0\vec{W}^{(\mp 1)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_+\right),\ \vec{H} = E_0\,\gamma_+\,\vec{W}^{(\mp 2)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_+\right); \tag{18}$$

$$\vec{E} = E_0\vec{W}^{(\mp 2)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_+\right),\ \vec{H} = E_0\,\gamma_+\,\vec{W}^{(\mp 1)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_+\right); \tag{19}$$

$$\vec{E} = E_0\vec{W}^{(\mp 1)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_-\right),\quad \vec{H} = E_0\,\gamma_-\,\vec{W}^{(\mp 2)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_-\right); \tag{20}$$

$$\vec{E} = E_0\vec{W}^{(\mp 2)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_-\right),\ \vec{H} = E_0\,\gamma_-\,\vec{W}^{(\mp 1)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_-\right), \tag{21}$$

где поля (18) – (21) с верхними индексами –1, –2 определяют прямые волны, а с индексами +1, +2 – обратные волны; поля (18), (20) определяют ТЕ-поляризованные электромагнитные поля, поля (19), (21) – ТН-поляризованные электромагнитные поля; E_0 *– постоянная, физическая размерность* $\left[E_0\right] = \frac{\text{В}}{\text{м}}$;

$$\alpha_1 = k_0 \sin\theta_0 \cos\varphi_0,\ \alpha_2 = k_0 \sin\theta_0 \sin\varphi_0,\ k_0 = \frac{\omega}{c},\ \lambda = k_0 \sin\theta_0,\ \ 0 \le \theta_0 < \frac{\pi}{2},$$

c *– скорость света в вакууме,*

$$\gamma_\pm = \sqrt{\frac{-B \pm C}{2m\mu_\lambda}},\qquad 0 \le \arg\gamma_\pm < \pi,$$

$$k_\pm = 2i\omega\gamma_\pm\mu_\lambda\,\frac{\left(P\mu_\lambda - m\varepsilon_\lambda\right)}{\left(2P\mu_\lambda - B \pm C\right)},$$

$$C = \sqrt{B^2 - 4mP\mu_\lambda\varepsilon_\lambda},\quad 0 \le \arg C < \pi, \tag{22}$$

$$B = m\varepsilon_\lambda + P\mu_\lambda + \omega^2\left(m\varepsilon_\lambda - P\mu_\lambda\right)^2,$$

$$m = m_1 + m_2,\quad P = P_1 + P_2,\quad \varepsilon_\lambda = \varepsilon_\Pi + P_2\lambda^2,\quad \mu_\lambda = \mu_\Pi + m_2\lambda^2.$$

Доказательство. Систему уравнений (8) запишем в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} &= \bar{\delta}_1\vec{E} + \bar{\delta}_2\Delta\vec{E} + \bar{\delta}_0\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{E}, \\ \operatorname{rot}\vec{E} &= \bar{\beta}_1\vec{H} + \bar{\beta}_2\Delta\vec{H} + \bar{\beta}_0\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{H}, \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_1 &= -i\,\omega\varepsilon_\Pi,\quad \bar{\delta}_2 = -i\,\omega P_1,\quad \bar{\delta}_0 = -i\,\omega P_2, \\ \bar{\beta}_1 &= i\,\omega\mu_\Pi,\quad \bar{\beta}_2 = i\,\omega m_1,\quad \bar{\beta}_0 = i\,\omega m_2. \end{aligned} \tag{24}$$

В качестве решения уравнений (23) выберем поля (16)

$$\vec{E} = E_0 \vec{W}^{(\mp 1)}\left(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k\right), \quad \vec{H} = E_0\, \gamma \vec{W}^{(\mp 2)}\left(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k\right). \tag{25}$$

Для определения неизвестных постоянных k и γ поля (25) подставим в уравнения (23). Учитывая формулы (17), для определения величин k, γ получим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \gamma k &= \bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2 k^2 + \bar{\delta}_0\left(\lambda^2 - k^2\right), \\ k &= \gamma\left(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2 k^2 + \bar{\beta}_0\left(\lambda^2 - k^2\right)\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Введем обозначения

$$\delta_1 = \bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_0 \lambda^2, \quad \delta_2 = \bar{\delta}_2 + \bar{\delta}_0, \quad \beta_1 = \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_0\, \lambda^2, \quad \beta_2 = \bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_0\,. \tag{27}$$

Тогда система уравнений примет вид

$$\delta_2 k^2 + \gamma k - \delta_1 = 0, \quad \beta_2 \gamma k^2 + k - \beta_1 \gamma = 0. \tag{28}$$

В статье [12] система (28) разрешена аналитически в радикалах и получены решения $k = k_+, \quad \gamma = \gamma_+$ и $k = k_-, \quad \gamma = \gamma_-$, которые определяются формулами

$$\gamma_\pm = \sqrt{\frac{b \mp c}{2\beta_1 \beta_2}}, \quad 0 \le \arg \gamma_\pm < \pi, \quad k_\pm = \gamma_\pm \frac{\delta_1 \beta_2 - \beta_1 \delta_2}{\beta_2 \gamma_\pm^2 - \delta_2},$$

$$c = \sqrt{b^2 - 4\delta_1 \delta_2 \beta_1 \beta_2}\,, \quad 0 \le \arg c < \pi, \tag{29}$$

$$b = \left(\delta_1 \beta_2 - \beta_1 \delta_2\right)^2 + \delta_1 \beta_2 + \beta_1 \delta_2.$$

Подставив выражения (27), (24) в формулы (29), получим требуемые формулы. ■

Заключение. В настоящей работе интегро-дифференциальная модель, описывающая распространение электромагнитных волн в среде с пространственной дисперсией, которая содержит вытянутые сфероидальные частицы, ориентированные вдоль оси *Oz*, преобразована с точностью до величин третьего порядка малости в дифференциальную математическую модель. Интегро-дифференциальные уравнения Максвелла монохроматической электродинамики представлены в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка. Уравнения решены аналитически, и построена система четырех прямых и четырех обратных *TE*- и *TH*-поляризованных плоских электромагнитных волн, распространяющихся в однородной среде. Число построенных независимых волн вдвое больше, чем число волн, распространяющихся в обычных магнитодиэлектрических средах. Поля представлены через классические базисные электромагнитные поля. Разработанная модель описывает анизотропную среду, так как волновые числа полей зависят от направления распространения волн.

Список использованных источников

1. Виноградов, А. П. Электродинамика композитных материалов / А. П. Виноградов. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 206 с.

2. Костин, М. В. К теории киральной среды на основе сферических спирально проводящих частиц / М. В. Костин, В. В. Шевченко // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т. 43, № 8. – С. 921–926.

3. Шатров, А. Д. Модель биизотропной среды из резонансных сферических частиц с идеальной смешанной проводимостью поверхности вдоль спиральных линий / А. Д. Шатров // Радиотехника и электроника. – 2000. – Т. 45, № 10. – С. 1168–1170.

4. Проникновение электромагнитных волн через композитные экраны, содержащие идеально проводящие спирали / В. Т. Ерофеенко [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 4. – С. 740–746.

5. Балагуров, Б. Я. О влиянии формы включений на проводимость двумерных моделей композитов / Б. Я. Балагуров // Журнал технической физики. – 2011. – Т. 81, вып. 5. – С. 5–8.

6. Ерофеенко, В. Т. Электродинамическая модель расчета эффективных параметров композитов из сферических биизотропных частиц / В. Т. Ерофеенко // Информатика. – 2014. – № 1(41). – С. 45–58.

7. Ерофеенко, В. Т. Экранирование электромагнитных волн плоским однослойным экраном из материалов с пространственной дисперсией / В. Т. Ерофеенко, В. Ф. Бондаренко // Информатика. – 2017. – № 4(56). – С. 5–15.

8. Ерофеенко, В. Т. Экранирование электромагнитных полей экранами из матричных композитов, содержащих биизотропные частицы / В. Т. Ерофеенко, В. Ф. Бондаренко // Информатика. – 2014. – № 3(43). – С. 28–43.

9. Агранович, В. М. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов / В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург. – М. : Наука, 1979. – 432 с.

10. Силин, Р. А. Обратные волны и пространственная дисперсия / Р. А. Силин, И. Р. Тимошина // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 7. – С. 725–733.

11. Ерофеенко, В. Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В. Т. Ерофеенко, И. С. Козловская. – Минск : БГУ, 2010. – 304 с.

12. Ерофеенко, В. Т. Моделирование распространения электромагнитных волн в средах с пространственной дисперсией / В. Т. Ерофеенко // Информатика. – 2017. – № 3(55). – С. 5–12.

13. Иванов, Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е. А. Иванов. – Минск : Наука и техника, 1968. – 584 с.

References

1. Vinogradov A. P. Jelektrodinamika kompozitnyh materialov. *Electrodynamics of Composite Materials*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2001, 206 p. (in Russian).

2. Kostin M. V., Schevchenko V. V. K teorii kiralnoj sredy na osnove sfericheskikh spiralno provodyaschih chastits [The theory of the chiral medium on the spherical helically conductive particles basis]. Radiotehnika i elektronika [*Radio Engineering and Electronics*], 1998, vol. 43, no. 8, pp. 921–926 (in Russian).

3. Shatrov A. D. Model biizotropnoj sredy iz rezonansnyh sfericheskih chastits s idealnoj smeshannoj provodimostju poverhnosti vdol spiralnyh linij [Biisotropic medium model of resonant spherical particles with ideal mixed surface conductivity along helical line]. Radiotehnika i elektronika [*Radio Engineering and Electronics*], 2000, vol. 45, no. 10, pp. 1168–1170 (in Russian).

4. Erofeenko V. T., Demidchik V. I., Malyi S. V., Kornev R. V. Proniknovenie jelektromagnitnyh voln cherez kompozitnye ekrany, soderzhashhie ideal'no provodjashhie spirali [Penetration of electromagnetic waves through composite screens containing ideally conducting spirals]. Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal [*Journal of Engineering Physics and Thermophysics*], 2011, vol. 84, no. 4, pp. 740–746 (in Russian).

5. Balagurov B. Y. O vliyanii formy vkluchenij na provodimost dvumernih modelej kompozitov [The inclusion forms influence on the two-dimensional composites models conductivity]. Zhurnal tehnicheskoj fiziki [*Technical Physics Journal*], 2011, vol. 81(5), pp. 5–8 (in Russian).

6. Erofeenko V. T. Electrodinamicheskaya model rascheta effektivnyh parametrov kompozitov iz sfericheskih biizotropnyh chastits [Electrodynamic model of calculation of effective parameters of composites from spherical isotropic particles]. Informatika [*Informatics*], 2014, no. 1(41), pp. 45–58 (in Russian).

7. Erofeenko V. T., Bondarenko V. F. Ekranirovanie elekrtomagnitnyh voln ploskim odnoslojnym ekranom iz materialov s prostranstvennoj dispersiej [Shielding of electromagnetic waves by a flat single-layer screen of materials with spatial dispersion]. Informatika [*Informatics*], 2017, vol. 4(56), pp. 5–15 (in Russian).

8. Erofeenko V. T., Bondarenko V. F. Ekranirovanie elektromagnitnyh polej ekranami iz matrichnyh kompozitov, soderzhashhih biizotropnye chasticy [Screening of electromagnetic fields by screens from matrix composites containing bi-isotropic particles]. Informatika [*Informatics*], 2014, no. 3(43), pp. 28–43 (in Russian).

9. Agranovich V. M., Ginzburg V. L. Kristallooptika s uchetom prostranstvennoj dispersii i teorija jeksitonov. *Crystal Optics with Allowance for Spatial Dispersion and the Theory of Excitons*. Moscow, Nauka Publ., 1979, 432 p. (in Russian).

10. Silin R. A., Timoshina I. R. Obratnye volny i prostranstvennaja dispersija [Reverse waves and spatial dispersion]. Radiotekhnika i elektronika [*Radio Engineering and Electronics*], 2012, vol. 57, no. 7, pp. 725–733 (in Russian).

11. Erofeenko V. T., Kozlovskaja I. S. Analiticheskoe modelirovanie v jelektrodinamike. *Analytical Modeling in Electrodynamics*. Minsk, BGU, 2010, 304 p. (in Russian).

12. Erofeenko V. T. Modelirovanie rasprostranenija jelektromagnitnyh voln v sredah s prostranstvennoj dispersiej [Modeling the propagation of electromagnetic waves in media with spatial dispersion]. Informatika [*Informatics*], 2017, no. 3(55), pp. 5–12 (in Russian).

13. Ivanov E. A. Difraktsiya electromagnitnyh voln na dvuh telah. *Diffraction of Electromagnetic Waves on Two Bodies.* Minsk, Nauka i tehnika Publ., 1968, 584 p. (in Russian).

Информация об авторах

Ерофеенко Виктор Тихонович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории математических методов защиты информации, Учреждение Белорусского государственного университета «НИИ прикладных проблем математики и информатики» (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: bsu_erofeenko@tut.by

Урбанович Александр Иосифович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования и управления, факультет прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: urbanovich@gmail.com

Information about the authors

Viktor T. Erofeenko – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Research Associate of the Research Laboratory of Mathematical Methods of Information Security, Institution of the Belarusian State University “Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics” (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bsu_erofeenko@tut.by

Aleksandr I. Urbanovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor at the Department of Mathematical Modeling and Control, Docent, Faculty of Applied mathematics and computer science, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: urbanovich@gmail.com