

Оценка мощности полного множества альтернатив паретовских подграфов в графе

Юрий В. Бугаев¹ y_bugaev52@mail.ru
Сергей В. Чикунов¹ chiksv@rambler.ru

¹ Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия

Реферат. На практике часто встречаются задачи построения оптимального подграфа определённого вида в заданном графе. В качестве возможных приложений используются задачи поиска оптимальной структуры технологических сетей, проектирования архитектуры вычислительных устройств, моделирования искусственного интеллекта и многие другие. Всё более актуальными становятся многокритериальные варианты указанных задач. Существенным сдерживающим фактором совершенствования методов многокритериальной оптимизации на графах является проблема их экспоненциальной вычислительной сложности, вызванной большой размерностью задачи. Ряд данных свидетельствует, что теоретическая оценка сложности, построенная для методов полного перебора, не соответствует действительности, и сделанные выводы не имеют достаточного обоснования. Среди эффективных решений наибольший интерес представляет так называемое полное множество альтернатив, мощность которого может быть на порядки ниже, чем мощность множества Парето. С учётом перечисленных фактов в данной работе изложен результат исследований, состоящий в построении оценки сверху для мощности полного множества альтернатив задачи нахождения парето-оптимальных подграфов для заданного графа.

Ключевые слова: граф, подграф, множество Парето, полное множество альтернатив

Power estimation of the full set of alternatives to Paret's subgraphs in a graph

Yurii V. Bugaev¹ y_bugaev52@mail.ru
Sergei V. Chikunov¹ chiksv@rambler.ru

¹ Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia

Summary. In practice problems of creation of an optimum subgraph of a certain look in a given graph count often meet. As possible annexes problems of search of optimum structure of technological networks, design of architecture of computers, modeling of artificial intelligence and many others are used. More and more relevant are multicriteria options of the specified tasks. An essential limiting factor of improvement of methods of multicriteria optimization on graphs is the problem of their exponential computing complexity caused by big dimension of a task. A number of data demonstrates that the theoretical assessment of complexity constructed for methods of full search isn't true, and the drawn conclusions have no sufficient justification. Among effective decisions the so-called complete set of alternatives which power can be lower on orders, than the power of the Pareto set is of the greatest interest. Taking into account the listed facts in this work the result of researches consisting in creation of assessment from above for the power of a complete set of alternatives of a problem of stay is stated pareto-optimal subgraphs for a given graph.

Keywords: graph, subgraph, Pareto set, complete set of alternatives

Введение

На практике задачи построения оптимального подграфа определённого вида в заданном графе встречаются достаточно часто [1–8]. В качестве возможных приложений используются задачи поиска оптимальной структуры технологических сетей, проектирования архитектуры вычислительных устройств, моделирования искусственного интеллекта и многие другие. С формализованной точки зрения наиболее популярны задачи поиска кратчайшего пути и остова минимального веса.

В последние десятилетия всё более актуальными становятся многокритериальные варианты указанных задач. Однако существенным сдерживающим фактором совершенствования методов многокритериальной оптимизации на графах является проблема их вычислительной сложности, вызванной большой размерностью

задачи. Полученные оценки [4, 5] свидетельствуют об экспоненциальном возрастании числа эффективных решений.

Однако мощность множества Парето-оптимальных вариантов редко имеет близкую оценку с числом всех допустимых вариантов решений задачи. Ряд данных свидетельствует, что теоретическая оценка сложности, построенная для методов полного перебора, не соответствует действительности, и сделанные выводы не имеют достаточного обоснования.

Поясним сказанное. С любой задачей многокритериальной оптимизации ассоциируется множество эффективных решений X^* . Оно состоит из таких допустимых вариантов решения x , для каждого из которых не существует элемента u , лучшего, чем x по всем критериям одновременно, то есть такого, что $q_j(u) \leq q_j(x)$

Для цитирования

Бугаев Ю.В., Чикунов С.В. Оценка мощности полного множества альтернатив паретовских подграфов в графе // Вестник ВГУИТ. 2018. Т. 79. № 2. С. 1–2. doi:10.20914/2310-1202-2018-2-1-2

For citation

Bugaev Ju.V., Chikunov S.V. Power estimation of the full set of alternatives to Paret's subgraphs in a graph. *Vestnik VGUIT* [Proceedings of VSUET]. 2018. vol. 79. no. 2. pp. 1–2. (in Russian). doi:10.20914/2310-1202-2018-2-1-2

сразу для всех j , причём, хотя бы одно неравенство является строгим. Среди эффективных решений наибольший интерес представляет так называемое *полное множество альтернатив* (ПМА) [9] – подмножество $X^\circ \subseteq X^*$ минимальной мощности, такое, что образы $q(X^*)$ и $q(X^\circ)$ совпадают. Часто мощность множества эффективных решений может быть на порядки выше, чем мощность ПМА.

Кроме того, в практически важных задачах значения оценок по критериям ограничены, а этот факт при теоретическом анализе мощности множества Парето не учитывается.

С учётом перечисленных фактов в данной работе изложен результат исследований по построению приемлемой оценки сверху для мощности ПМА задачи построения парето-оптимальных подграфов для некоторого графа.

Получение оценки

Пусть задан граф $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$ произвольного вида, на рёбрах которого заданы значения s критериев $q_i = q_i(e)$, $i = 1, \dots, s$; $e \in E$. Значения q_j будем полагать целыми неотрицательными числами из конечного диапазона $[0; d]$. Требуется построить множество Парето-оптимальных подграфов, принадлежащих некоторому определённом виду. В качестве критериев эффективности подграфа предполагается минимум суммы значений критериев рёбер, входящих в подграф, так называемый критерий вида $\min\text{sum}$ [10].

Предположим также, что количество рёбер каждого допустимого подграфа не превосходит некоторого k , $k \leq m$.

Теорема 1. При сделанных предположениях мощность ПМА задачи поиска Парето-оптимальных подграфов не превосходит

$$N = (d \cdot k + 1)^s - (d \cdot k)^s. \quad (1)$$

Доказательство. Покажем, что мощность ПМА паретовских подграфов не больше, чем число целочисленных точек на s ближайших к началу координат гранях гиперкуба $[0, k \cdot d]^s$.

Обозначим это множество точек Γ . Оно имеет следующий вид:

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in E^s \mid 0 \leq \lambda_i \leq k \cdot d, \lambda_i - \text{целые,} \\ i = 1, \dots, s; \min \lambda_j = 0 \end{array} \right\}.$$

Пусть P – множество достижимых критерийных оценок эффективных подграфов. Построим отображение $\phi: P \rightarrow \Gamma$ следующего вида:

$$\forall p \in P \phi(p)_i = p_i - \min_j p_j.$$

Очевидно, что все $\phi(p)$, как и p будут иметь целочисленные координаты, причём $\min_j \phi(p)_j = 0$. Следовательно, $\phi(p) \in \Gamma$.

Покажем, что ϕ инъективно, т. е. двум произвольным различающимся точкам p и r соответствуют разные образы. Предположим противное, т. е. элементам $p, r \in P$ соответствует один образ $\lambda = \phi(p) = \phi(r)$. Из этого сразу следует, что $p_i - \min p_i = r_i - \min r_i$. То есть $p_i - r_i = \min p_i - \min r_i = a = \text{const}$ для всех i .

Тогда при $a \leq 0$ получим $p_i \leq r_i \forall i$. Поскольку p не совпадает с q , то это должно означать, что точка p доминирует по Парето над r . При $a \geq 0$ получим обратное отношение. Так или иначе, получаем противоречие с предположением, что обе точки оптимальны по Парето.

В итоге получаем, что, отображение ϕ между P и Γ инъективно, из чего следует $|P| \leq |\Gamma|$.

Оценим значение $|\Gamma|$. Количество точек вдоль каждой из координат равно $(k \cdot d + 1)$. Тогда количество точек, заполняющих весь s -мерный куб равно $(d \cdot k + 1)^s$. Для оценки мощности Γ от этого числа надо отнять количество узлов, заполняющих вложенный куб, из $d \cdot k$ точек по каждой координате, т. е. $(d \cdot k)^s$. Окончательно $|\Gamma| = N = (d \cdot k + 1)^s - (d \cdot k)^s$. Теорема доказана.

Предположим, что количество критериев s ограничено некоторой константой. Тогда из (1) вытекает, что мощность ПМА паретовских подграфов ограничено некоторым полиномом.

Оценку (1) можно уточнить, если есть возможность определить диапазоны значений по каждому частному критерию $[q_i^{\min}, q_i^{\max}]$. Парето-оптимальных подграфов данного вида. Используя результаты теоремы 1, несложно показать, что в этом случае мы имеем следующую верхнюю оценку мощности ПМА Парето-оптимальных подграфов

$$N = \prod_{i=1}^s (q_i^{\max} - q_i^{\min} + 1) - \prod_{i=1}^s (q_i^{\max} - q_i^{\min}). \quad (2)$$

Пример

Рассмотрим следующий ориентированный граф, на дугах которого заданы два критерия (их численные значения указаны в скобках).

В качестве подграфов будем рассматривать стягивающие остовы графа. Найдём в этом графе все Парето-оптимальные остовы. Для их компактного представления перенумеруем дуги графа согласно таблице 1.

Согласно известной оценке [10], основанной на матрице инцидентий исходного графа, легко определить, что граф, представленный на рисунке 1 имеет 101 остовое дерево. Отсюда полным перебором несложно найти его Парето-оптимальные остовы, список которых приведен в таблице 2. В данном случае ПМА паретовских остовов совпадает со списком всех тринадцати Парето-оптимальных остовов.

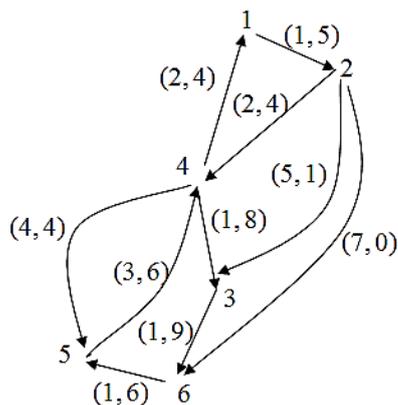


Рисунок 1. Пример графа с заданными двумя критериями на его дугах

Figure 1. An example of a graph with two given criteria on its arcs

Таблица 1.
Список дуг графа
Table 1.
The list of arcs of the graph

No	Начальная вершина Initial vertex	Конечная вершина Final vertex	Значение Value q_1	Значение Value q_2
1	1	2	1	5
2	2	3	5	1
3	2	4	2	4
4	2	6	7	0
5	3	6	1	9
6	4	1	2	4
7	4	3	1	8
8	4	5	4	4
9	5	4	3	6
10	6	5	1	6

ЛИТЕРАТУРА

1 Мелькумов В.Н., Кузнецов И.С., Кобелев В.Н. Задача поиска оптимальной структуры тепловых сетей // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2011. № 2. С. 37–42.
 2 Ильясова Н.Ю., Корепанов А.О., Чукулаев П.М. Метод выделения центральных линий кровеносных сосудов на диагностических изображениях // Компьютерная оптика. 2006. № 29. С. 146–150.
 3 Попов А.Ю. О реализации алгоритма Форда-Фалкерсона в вычислительной системе с многими потоками команд и одним потоком данных // Наука и образование. 2014. № 9. С. 162–180.
 4 Williams J., Massie Ch., George A.D., Richardson J. et al. Characterization of Fixed and Reconfigurable Multi-Core Devices for Application Acceleration // ACM Transactions on Reconfigurable Technology and Systems. 2010. V. 3, №. 4. Art. №. 19.
 5 Nguyen Q.H., Ong Y.S., Krasnogor N.A. Study on the Design Issues of Memetic Algorithm // IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC 2007). 2007. P. 2390–2397.

Таблица 2.
Список Парето-оптимальных островов
Table 2.
List of Pareto-optimal Islands

No	Номера дуг, составляющих остов Numbers of arcs that make up the skeleton						Значение 1-го критерия Value of the 1st criterion	Значение 2-го критерия Value of the 2nd criterion
1	1	2	3	4	8	19	14	
2	1	2	3	4	10	16	16	
3	1	2	3	5	10	10	25	
4	1	2	3	8	10	13	20	
5	1	2	3	9	10	12	22	
6	1	3	5	7	10	6	32	
7	1	3	7	8	10	9	27	
8	1	3	7	9	10	8	29	
9	2	3	4	6	8	20	13	
10	2	3	4	5	10	17	15	
11	2	3	5	6	10	11	24	
12	2	3	6	8	10	14	19	
13	3	5	6	7	10	7	31	

Сравним реальное количество островов с оценкой (2). Имеем следующие диапазоны, которые несложно найти, например, посредством алгоритма Краскала [10]:

$$[q_1^{\min}, q_1^{\max}] = [6, 20],$$

$$[q_2^{\min}, q_2^{\max}] = [14, 32].$$

Отсюда по формуле (2) получаем $N = 33 > 13$. Следовательно, оценка (2) справедлива.

6 Ong Y.S., Lim M.H., Zhu N., Wong K.W. Classification of adaptive memetic algorithms: A comparative study // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B: Cybernetics. 2006. V. 36. № 1. P. 141–152.
 7 Jie J., Zeng J. Improved Mind Evolutionary Computation for Optimizations // Proceedings of 5th World Congress on Intelligent Control and Automation. 2004. V. 3. P. 2200–2204.
 8 Liang J.J., Qu B.Y., Suganthan P.N. Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2014 Special Session and Competition on Single Objective Real-Parameter Numerical Optimization. Technical Report 201311. Computational Intelligence Laboratory, Zhengzhou University, Zhengzhou, China; Technical Report. Singapore: Nanyang Technological University, 2013. 32 p.
 9 Бугаев Ю.В., Музалевский Ф.А. Полиномиальная оценка мощности множества паретовских путей в графе // Вестник Нижегородского университета. 2013. № 2–1. С. 168–170.
 10 Костюкова Н.И. Графы и их применение. Комбинаторные алгоритмы для программистов: Учеб. пособие. М. БИНОМ: Лаборатория знаний, 2010. 311 с.

REFERENCES

1 Melkumov V.N., Kuznetsov I.S., Kobelev V.N. The problem of finding the optimal structure of heat networks. *Nauchnyi vestnik VGASU* [Scientific Bulletin of the Voronezh state University of architecture and construction. Construction and architecture] 2011. no. 2. pp. 37-42. (in Russian)

2 Ilyasova N. Yu., Korepanov A.O., Chikulaev P.M. Method of selection of Central lines of blood vessels on diagnostic images. *Komp'yuternaya optika* [Computer optics] 2006. no. 29. pp. 146-150. (in Russian)

3 Popov A. Yu. On the implementation of the algorithm of Ford-Fulkerson in a computing system, with many streams of commands and a single data stream. *Nauka I obrazovanie* [Science and education] 2014. no. 9. pp. 162-180. (in Russian)

4 Williams J., Massie Ch., George A.D., Richardson J. et al. Characterization of Fixed and Reconfigurable Multi-Core Devices for Application Acceleration. *ACM Transactions on Reconfigurable Technology and Systems*. 2010. vol. 3, no. 4. art.no. 19.

5 Nguyen Q.H., Ong Y.S., Krasnogor N.A. Study on the Design Issues of Memetic Algorithm. *IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC 2007)*. 2007. pp. 2390–2397.

6 Ong Y.S., Lim M.H., Zhu N., Wong K.W. Classification of adaptive memetic algorithms: A comparative study. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B: Cybernetics*. 2006. vol. 36. no. 1. pp. 141–152.

7 Jie J., Zeng J. Improved Mind Evolutionary Computation for Optimizations. *Proceedings of 5 th World Congress on Intelligent Control and Automation*. 2004. vol. 3. pp. 2200–2204.

8 Liang J.J., Qu B.Y., Suganthan P.N. Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2014 Special Session and Competition on Single Objective Real-Parameter Numerical Optimization. *Technical Report 201311*. Computational Intelligence Laboratory, Zhengzhou University, Zhengzhou, China; *Technical Report*. Singapore: Nanyang Technological University, 2013. 32 p.

9 Bugaev Yu.V., Muzalevsky F.A. Polynomial estimation of power of the set of Pareto paths in the graph. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta* [Proceedings of Nizhny Novgorod University] 2013. no. 2-1. pp. 168-170. (in Russian)

10 Kostyukova N.I. Graphs and their application. *Kombinatornye algoritmy dlya programistov* [Combinatorial algorithms for programmers: Studies. benefit] Moscow, BINOM, 2010. 311 p. (in Russian)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Юрий В. Бугаев д.ф.-м.н., профессор, кафедры высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, y_bugaev52@mail.ru

Сергей В. Чикунов к.т.н., доцент, кафедры высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, chiksv@rambler.ru

КРИТЕРИЙ АВТОРСТВА

Все авторы в равной степени принимали участие в написании рукописи и несут ответственность за плагиат

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ПОСТУПИЛА 02.04.2018

ПРИНЯТА В ПЕЧАТЬ 03.05.2018

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Yurii V. Bugaev Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor, higher mathematics and information technology department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia, y_bugaev52@mail.ru

Sergei V. Chikunov Cand. Sci. (Engin.), associate professor, higher mathematics and information technology department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia, chiksv@rambler.ru

CONTRIBUTION

All authors equally participated in writing the manuscript and responsible for the plagiarism

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no conflict of interest.

RECEIVED 4.2.2018

ACCEPTED 5.3.2018