УДК 517.977.58

DOI 10.21778/2413-9599-2017-4-62-67

Ю. П. Корнюшин, Д. В. Мельников, А. В. Мазин

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Калужский филиал, Калуга, Россия

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

В статье приведен алгоритм синтеза оптимальных управлений для нелинейных аффинных по управлению объектов по критерию максимального быстродействия. Используемый математический аппарат – линеаризация Ньютона-Канторовича и аппарат матричных операторов. Структура алгоритма включает следующие этапы: на первом выполняется линеаризация нелинейной математической модели объекта по методу Ньютона-Канторовича; на втором осуществляется редукцию задачи синтеза по критерию минимального времени при наличии ограничений на энергию управления к задаче синтеза по критерию минимума энергии для нахождения (оптимального) минимального значения искомого времени; на третьем выполняется параметризация математической модели объекта управления и нового критерия качества с использованием аппарата матричных операторов с последующим построением оптимального управления. Четвертый, заключительный этап состоит в реализации итерационного процесса, предписанного методом Ньютона-Канторовича, – находится оптимальное (минимальное) значение времени. Алгоритм синтеза иллюстрируется примером.

Ключевые слова: *синтез, оптимальный, быстродействие, нелинейный, матричный, оператор.*

Для цитирования: Корнюшин Ю. П., Мельников Д. В., Мазин А. В. Синтез оптимальных управлений для нелинейных объектов по критерию максимального быстродействия // Радиопромышленность. 2017. № 4. С. 62–67.

Yu. P. Korniushin, D. V. Melnikov, A. V. Mazin

Bauman Moscow State Technical University, Kaluga branch, Kaluga, Russia

SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROLS FOR NONLINEAR OBJECTS BY THE CRITERION OF MAXIMUM SPEED

The article presents an algorithm for synthesizing optimal program controls for nonlinear control-affine objects by the criterion of maximum speedy. The mathematical apparatus used is the linearization of Newton-Kantorovich and the apparatus of matrix operators. The structure of the algorithm includes the following steps at the first stage, the linearization of the nonlinear mathematical model of the object is performed by the Newton-Kantorovich method; at the second stage, we carry out the reduction of the synthesis problem by the criterion of minimum time in the presence of constraints on the control energy to the synthesis problem by the energy minimum criterion for finding the (optimal) minimum value of the sought time; at the third stage we perform parametrization of the mathematical model of the control object and a new quality criterion using the apparatus of matrix operators with the subsequent construction of the optimal control. The fourth final stage consists in realizing the iterative process prescribed by the Newton-Kantorovich method-there is an optimal (minimal) time value. The synthesis algorithm is illustrated by an example.

Keywords: *synthesis, optimal, speedy, nonlinear, matrix, operator.*

For citation: Korniushin Ye. P., Melnikov D. V., Mazin A. V. Synthesis of optimal controls for nonlinear objects by the criterion of maximum speed. Radiopromyshlennost, 2017, no. 4, pp. 62–67 (In Russian).

DOI 10.21778/2413-9599-2017-4-62-67

Введение

Критерий оптимальности – минимум времени на выполнение операций управления – нашел широкое применение при проектировании следящих систем, используемых, например, в производственных процессах, поскольку быстродействие их выполнения определяет их эффективность. К настоящему времени накоплен достаточно большой опыт синтеза оптимальных регуляторов и оптимального управления преимущественно линейными объектами по данному критерию. Существуют различные подходы для решения указанной задачи и для нелинейных объектов управления [1–5], однако задача является во многом нерешенной.

В работе одного из авторов [6] был предложен алгоритм синтеза оптимальных по быстродействию управлений для нелинейных объектов, использующий методы теории оптимального управления [7] и проблемы моментов [8]. Данная работа является своеобразным продолжением предыдущей работы [6], в ней используется аналогичная постановка задачи, частично те же математические инструменты [9]. Однако алгоритм синтеза отличается от рассмотренного, а именно находится управление, которое переводит объект из начального состояния в конечное; минимальное время процесса находится для заданного значения нормы в пространстве $L^2[t_0,T]$.

Постановка задачи

Задан аффинный по управлению объект, описываемый уравнением

$$\dot{X}(t)=F(X(t),t)+B(t)u(t), \tag{1}$$

где $X(t)\in R^n,\ u(t)\in R^1$.

Требуется синтезировать управление $u(t)$, переводящее объект из начального состояния $X(t_0)$ в конечное состояние $X(T)$ и минимизирующее следующий критерий:

$$J(u)=\int_{t_0}^{T}dt\rightarrow\min_{u(t)}. \tag{2}$$

Будем предполагать, что нелинейный объект (1) является вполне управляемым.

При синтезе оптимального управления по данному критерию необходимо, чтобы управление $u(t)$ было некоторым образом ограничено. Наиболее часто это ограничение по силе $|u(t)|\leqslant C$, ограничение по энергии $\int_{t_0}^{T}|u(\tau)|^2d\tau\le C_2^2$ или ограничение по площади

$$\int_{t_0}^{T}|u(\tau)|d\tau\le C_1. \tag{3}$$

Как видно, левая часть указанных неравенств есть норма управления в пространстве $L^p[t_0,T]$, $1\le p\le\infty$.

Задача относится к классу задач минимизации при наличии ограничения типа нестрогого неравенства. Минимум достигается, если ограничение является активным, то есть переходит в равенство. Будем решать задачу синтеза по критерию (2) при ограничении на энергию $(p=2)$, поскольку в дальнейшем можно получить управление по принципу обратной связи.

Алгоритм синтеза

Алгоритм состоит из следующих основных этапов:

1. Линеаризация нелинейной математической модели объекта по методу Ньютона-Канторовича.
2. Новая формулировка задачи синтеза по критерию (2) при ограничении (3) как задачи синтеза по критерию минимума энергии для подбора (оптимального) минимального значения времени
3. Параметризация математической модели объекта управления и нового функционала качества; построение оптимального управления по критерию минимума энергии.
4. Реализация итерационного процесса, предписанного методом Ньютона-Канторовича, – находится оптимальное (минимальное) значение времени T.

Линеаризация математической модели объекта управления методом Ньютона-Канторовича

Данный вид линеаризации неоднократно использовался в работах автора [6, 9]. В результате линеаризации уравнение (1) редуцируется в последовательность уравнений вида

$$\begin{gathered}\dot{X}_{k+1}(t)=A^k(t)X_{k+1}(t)+B(t)u(t)+Z^k(t);\\ X_{k+1}(t_0)=X(t_0),\ k=0,1,2,\ldots,\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered}A^k(t)=F_x'(X_k(t),t);\\ Z^k(t)=-F_x'(X_k(t),t)X_k(t)+F(X_k(t),t).\end{gathered} \tag{5}$$

Матрица $F_x'(X_k(t),t)$ определяется так:

$$F_x'=\{f_{ij}\}=\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\}_{i,j=\overline{1,n}}. \tag{6}$$

Линеаризованное уравнение (4) является дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами.

Новая формулировка задачи синтеза

Задачу сформулируем следующим образом. Для объекта, описываемого уравнением (4), необходимо найти управление $u(t)$, которое за фиксированное время T переводит его из начального в конечное состояние и обеспечивает минимальное значение нормы $\|u(t)\|_{L^2[t_0,T]}$ или нового критерия оптимальности

$$J=\int_{t_0}^{T}\left|u(\tau)\right|^2 d\tau. \qquad (7)$$

Тогда решение, обеспечивающее максимальное быстродействие, определяется по решению задачи в данной постановке, и минимальное время $T_{\min}$ соответствует случаю, когда минимальная норма $\left\|u(t)\right\|_{L^2[t_0,T]}=C_2$.

Параметризация математической модели объекта управления, нового функционала качества и формирование новой целевой функции. Построение оптимального управления

Параметризацию можно выполнить, используя конечномерное разложение в заданном ортонормированном базисе $\Phi=\left\{\varphi_i(t): i=\overline{1,N},\ t\in[t_0,T]\right\}$ $X_{k+1}(t)$, $Z_k(t)$ и $u(t)$:

$$X_{k+1}(t)=\widehat{FT_n}(t)\hat{C}^X;\ Z^k(t)=\widehat{FT_n}(t)\hat{C}^Z;\ u(t)=\widehat{FT_1}(t)\hat{C}^u, \qquad (8)$$

где $\widehat{FT_n}(t)$, $\widehat{FT_1}(t)$ – блочные матрицы, построенные на основе элементов ортонормированного базиса Φ. Матрицы $\hat{C}^X$, $\hat{C}^u$ – спектральные характеристики функций $X(t)$ и $u(t)$ [6, 9].

Параметризация математической модели объекта управления состоит из двух этапов. Вначале осуществляется переход от дифференциального уравнения объекта (4) к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода

$$\begin{gathered}X_{k+1}(t)-X(t_0)=\int_{t_0}^{T}K_A(t,\tau)X_{k+1}(t)d\tau+\\+\int_{t_0}^{T}K_B(t,\tau)u(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{T}K_Z(t,\tau)Z^k(\tau)d\tau,t\in[t_0,T],\end{gathered} \qquad (9)$$

где ядра определяются следующей зависимостью:

$$K_A(t,\tau)=1(t-\tau)\left(A^k(\tau)\right);$$
$$K_B(t,\tau)=1(t-\tau)B(\tau);K_Z(t,\tau)=1(t-\tau),$$

а затем используется конечномерное разложение указанных функций, которое позволяет получить следующую форму описания уравнения объекта относительно спектральных характеристик [6, 9]:

$$\hat{C}^X-\hat{C}^{X_0}=K^A\hat{C}^X+K^B\hat{C}^u+K^Z\hat{C}^Z, \qquad (10)$$

где K^A, K^B, K^Z, – спектральные характеристики ядер $K_A(t,\tau)$, $K_B(t,\tau)$, $K_Z(t,\tau)$ – интегрального уравнения определяются по известным формулам [6].

Параметризованный критерий оптимальности в соответствии с (8) будет иметь вид

$$J=\left(\hat{C}^u\right)^T\hat{C}^u. \qquad (11)$$

Свяжем начальное и конечное состояния с динамикой объекта (подставим вместо $X_{k+1}(t)$, и $u(t)$ в уравнение (9) их представление в форме рядов Фурье), получим

$$\begin{gathered}X_{k+1}(t)-X(t_0)=\int_{t_0}^{t}A^k(\tau)\widehat{FT_n}(\tau)\hat{C}^X d\tau+\\+\int_{t_0}^{t}B(\tau)\widehat{FT_1}(\tau)\hat{C}^u d\tau+\int_{t_0}^{t}\widehat{FT_n}(\tau)\hat{C}^Z d\tau.\end{gathered}$$

Полагая $t=T$ и вводя обозначения

$$AT=\int_{t_0}^{T}A^k(\tau)\widehat{FT_n}(\tau)d\tau;$$
$$BT=\int_{t_0}^{T}B(\tau)\widehat{FT_1}(\tau)d\tau;\ ZT=\int_{t_0}^{T}\widehat{FT_n}(\tau)d\tau,$$

имеем

$$X_{k+1}(T)-X(t_0)=AT\hat{C}^X+BT\hat{C}^u+ZT\hat{C}^Z. \qquad (12)$$

По отношению к функционалу (11) соотношение (10), связывающее спектральные характеристики входных и выходных сигналов через динамику объекта управления (4), а также соотношение (12), связывающее начальное и конечное состояния объекта с его динамикой, являются ограничениями типа равенства. Таким образом, имеем задачу на условный экстремум по отношению к спектральным характеристикам сигналов $X_{k+1}(t)$ и $u(t)$. Функция Лагранжа, сводящая ее к задаче на безусловный экстремум, имеет вид

$$\begin{gathered}\mathrm{Lag}\left(\hat{C}^X,\hat{C}^u,\Lambda_1,\Lambda_2\right)=\\=\left(\hat{C}^u\right)^T\hat{C}^u+\Lambda_1^T\left(\hat{C}^X-\hat{C}^{X_0}-K^A\hat{C}^X-K^B\hat{C}^u-K^Z\hat{C}^Z\right)+\\+\Lambda_2^T\left(X_{k+1}(T)-X(t_0)-AT\hat{C}^X-BT\hat{C}^u-ZT\hat{C}^Z\right),\end{gathered} \qquad (13)$$

где векторы Λ_1, Λ_2 – неопределенные множители Лагранжа.

Необходимые условия минимума функции $\mathrm{Lag}\left(\hat{C}^X,\hat{C}^u,\Lambda_1,\Lambda_2\right)$ по отношению к ее переменным определяются следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial Lag}{\partial\hat{C}^u}=0;\ \frac{\partial Lag}{\partial\hat{C}^X}=0;\ \frac{\partial Lag}{\partial\Lambda_1}=0;\ \frac{\partial Lag}{\partial\Lambda_2}=0,$$

или

$$\begin{cases}2\hat{C}^u-\left(K^B\right)^T\Lambda_1-\left(BT\right)^T\Lambda_2=0;\\ \Lambda_1-\left(AT\right)^T\Lambda_2-\left(K^A\right)^T\Lambda_1=0;\\ \hat{C}^X-\hat{C}^{X_0}-K^A\hat{C}^X-K^B\hat{C}^u-K^Z\hat{C}^Z=0;\\ X_{k+1}(T)-X(t_0)-AT\cdot\hat{C}^X-BT\cdot\hat{C}^u-ZT\cdot\hat{C}^Z=0.\end{cases} \qquad (14)$$

Система (15) есть система линейных алгебраических уравнений

$$SP=Q \qquad (15)$$

относительно вектора $P=\left[\hat{C}^X\ \hat{C}^u\ \Lambda_1\ \Lambda_2\right]^T$, где

$$S=\begin{bmatrix} O_{N\times nN} & 2I_{N\times N} & -\left(K^{B}\right)^{T} & -\left(BT\right)^{T} \\ O_{nN\times nN} & O_{nN\times N} & I_{nN\times nN}-\left(K^{A}\right)^{T} & -\left(AT\right)^{T} \\ I_{nN\times nN}-K^{A} & -K^{B} & O_{nN\times nN} & O_{nN\times 1} \\ -AT & -BT & O_{1\times nN} & O_{1\times 1} \end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix} O_{N\times 1} \\ O_{nN\times 1} \\ \hat{C}^{X_0}+K^{Z}\hat{C}^{Z} \\ X\left(t_0\right)-X_{k+1}\left(T\right)+ZT\hat{C}^{Z} \end{bmatrix},$$

где $I_{p\times q}$ – единичная матрица; $O_{p\times q}$ – нулевая матрица; индексы внизу матриц показывают ее размерность. Матрица, обратная ей, является блочной:

$$S^{-1}=\begin{bmatrix} A^{11}_{nN\times nN} & A^{12}_{nN\times N} & A^{13}_{nN\times nN} & A^{14}_{nN\times n} \\ A^{21}_{N\times nN} & A^{22}_{N\times N} & A^{23}_{N\times nN} & A^{24}_{N\times n} \\ A^{31}_{nN\times nN} & A^{32}_{nN\times N} & A^{33}_{nN\times nN} & A^{34}_{nN\times n} \\ A^{41}_{n\times nN} & A^{42}_{n\times N} & A^{43}_{n\times nN} & A^{44}_{n\times n} \end{bmatrix}.$$

Из системы (15) можно выразить спектральные характеристики $\hat{C}^{u}$ и $\hat{C}^{X}$ через спектральные характеристики, определяющие динамические свойства объекта управления и начальное и конечное состояния объекта:

$$\hat{C}^{u}=A^{23}_{N\times nN}\hat{C}^{X_0}+A^{24}_{N\times n}\left(X\left(t_0\right)-X_{k+1}\left(T\right)\right)+V, \quad (16)$$

где

$$V=\left(A^{24}_{N\times n}ZT+A^{23}_{N\times nN}K^{Z}\right)C^{Z};$$
$$C^{X}=\left[A^{13}_{nN\times nN}\left(C^{X_0}+K^{Z}C^{Z}\right)+ZTC^{Z}\right]+ \quad (17)$$
$$+A^{14}_{nN\times n}\left(X\left(t_0\right)-X_{k+1}\left(T\right)\right).$$

Матрицы $A^{13}_{nN\times nN}$, $A^{14}_{nN\times n}$, $A^{23}_{N\times nN}$ и $A^{24}_{N\times n}$ определяются выражениями

$$A^{13}_{nN\times nN}=\left[I_{nN\times nN}O_{nN\times N}O_{nN\times nN}O_{nN\times n}\right]S^{-1}\begin{bmatrix} O_{nN\times nN} \\ O_{N\times nN} \\ I_{nN\times nN} \\ O_{n\times nN} \end{bmatrix},$$

$$A^{14}_{nN\times nN}=\left[I_{nN\times nN}O_{nN\times N}O_{nN\times nN}O_{nN\times n}\right]S^{-1}\begin{bmatrix} O_{nN\times n} \\ O_{mN\times n} \\ O_{nN\times n} \\ I_{n\times n} \end{bmatrix},$$

$$A^{23}_{nN\times nN}=\left[O_{nN\times nN}I_{nN\times nN}O_{nN\times nN}O_{nN\times n}\right]S^{-1}\begin{bmatrix} O_{nN\times nN} \\ O_{N\times nN} \\ I_{nN\times nN} \\ O_{n\times nN} \end{bmatrix},$$

$$A^{24}_{nN\times nN}=\left[O_{nN\times nN}\ I_{nN\times nN}\ O_{nN\times nN}\ O_{nN\times n}\right]S^{-1}\begin{bmatrix} O_{nN\times n} \\ O_{mN\times n} \\ O_{nN\times n} \\ I_{n\times n} \end{bmatrix}.$$

Поскольку спектральная характеристика $\hat{C}^{u}$ определена, можно найти выражение для оптимального управления во временной области. Соответствующее выражение имеет вид

$$u_{k+1}\left(t\right)=A^{23}\left(t,T,t_0\right)X\left(t_0\right)+ \quad (18)$$
$$+A^{24}\left(t\right)\left(X\left(t_0\right)-X_{k+1}\left(T\right)\right)+V\left(t\right),$$

где

$$A^{23}\left(t,T,t_0\right)=\int_{t_0}^{T}\widehat{FT}_n\left(t\right)A^{23}_{N\times nN}\widehat{F}_n\left(\tau\right)d\tau,$$
$$A^{24}\left(t\right)=\widehat{FT}_n\left(t\right)A^{24}_{N\times n};\ V\left(t\right)=\widehat{FT}_n\left(t\right)V.$$

Выражение (18) определяет оптимальное управление, осуществляющее перевод объекта из начального фазового состояния $X(t_0)$ в конечное состояние $X(T)$.

Реализация итерационного процесса по схеме Ньютона-Канторовича и подбор (оптимального) минимального значения времени *T*

Выражение (18), определяющее оптимальное управление, записано для $k+1$ итерации. На каждом шаге итерационного процесса находится оптимальное значение времени T. Функционал (7) является функцией не только управления, но и зависит от времени T, т.е. $J=J(T)$. Минимальное время T находится при выполнении условия

$$\int_{t_0}^{T}\left(u\left(\tau\right)\right)^2 d\tau=C_2^2, \text{ или } \left(\mathbf{\hat{C}}^{u}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{\hat{C}}^{u}=C_2^2.$$

Таким образом, задача нахождения оптимального значения T может быть определена как задача минимизации функции $J(T)$ при ограничении типа равенства $(\hat{C}^{u})^{T}\hat{C}^{u}-C_2^2=0$, и соответствующая функция Лагранжа имеет вид

$$f\left(T,\lambda\right)=J\left(T\right)+\lambda\left[\left(\hat{C}^{u}\right)^{T}\hat{C}^{u}-C_2^2\right].$$

Минимум функции может быть найден любым численным методом.

Зная оптимальное время T, формируем оптимальное по быстродействию управление, подставляя в приведенные выше формулы его конкретное значение.

Пример

Объект управления описывается уравнением

$$\dot{X}\left(t\right)=F\left(X\left(t\right),t\right)+B_1\left(t\right)U\left(t\right),$$

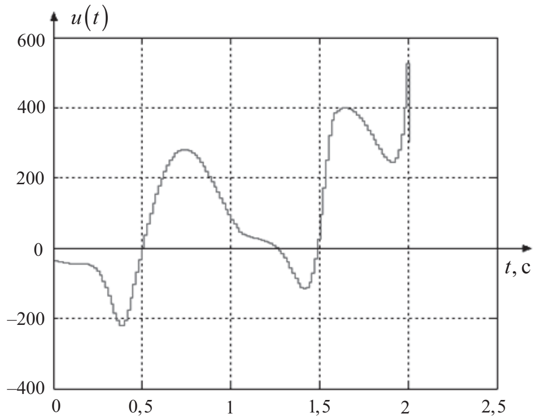

Рисунок 1. Управление $u(t)$

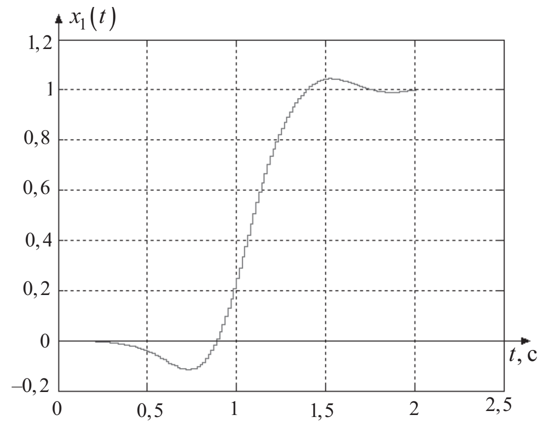

Рисунок 2. Изменение координаты $x_1(t)$

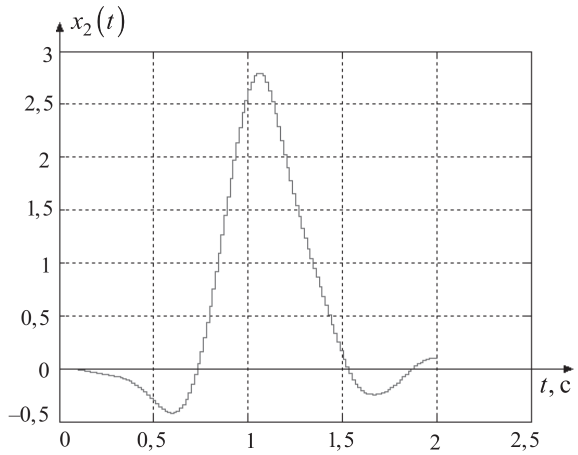

Рисунок 3. Изменение координаты $x_2(t)$

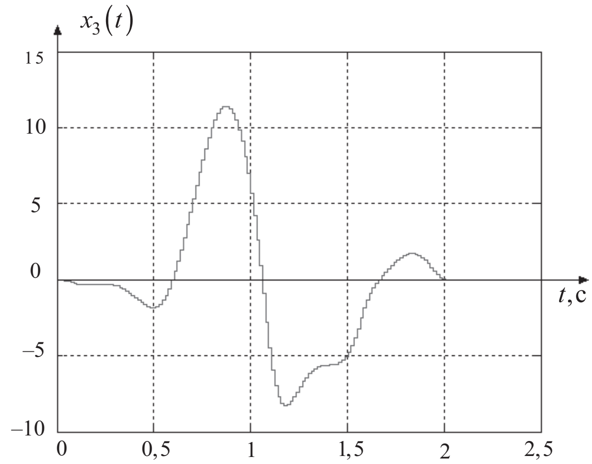

Рисунок 4. Изменение координаты $x_3(t)$

где

$$F\left(X\left(t\right),t\right)=\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ -1680\sin\left(x_1\right)-1066x_2-251\left(x_3+\left|x_3\right|\right)-26x_4 \end{bmatrix},$$

$$B_1\left(t\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Функция $f\left(x\right)=\left|x\right|$ не является аналитической, как того требует линеаризация Ньютона-Канторовича, поэтому заменяем ее аналитической функцией вида $f_1\left(x\right)=2/\pi x\arctan\left(\lambda x\right)$. При значении $\lambda\geq 1\cdot 10^5$ отличие в вычислительном плане между функциями $f(x)$ и $f_1(x)$ не наблюдается.

Для данного объекта было синтезировано управление, переводящее его из состояния $X(0)=[0\ 0\ 0\ 0]^T$ в состояние $X(T)=[1\ 0{,}1\ 0\ 0]^T$. В качестве базиса использовались функции Уолша (N = 128). Ограничение по энергии составило величину C_2 = 100 000. Оптимальное (минимальное) время составило величину $T_{\min}$ = 2,0156 с.

На рис. 1 приведен график текущего управления, а на рис. 2–4 – графики изменения первых трех фазовых координат.

Заключение

Как видно из графиков изменения фазовых координат, синтезированное управление обеспечивает перевод объекта из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. Поставленная задача решена. Предложен достаточно конструктивный алгоритм синтеза оптимальных по быстродействию управлений для нелинейных объектов.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) и Правительства Калужской области (грант № 16–41–400701).

ACKNOWLEDGEMENT

The work was performed with the support of the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Kaluga Region ((grant no. 16–41–400701).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Медведев М.Ю. Синтез замкнутых оптимальных по быстродействию управлений каскадными нелинейными динамическими системами с ограничениями на координаты // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 7 (100). С. 2–6.
2. Соловьев А.Э., Ловчаков Е.В. Метод синтеза квазиоптимальных систем управления по критериям быстродействия и энергосбережения [Электронный ресурс] // Известия ТулГУ. Технические науки. 2011. № 5. С. 220–230. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metod-sinteza-kvazioptimalnyh-sistem-upravleniya-po-kriteriyam-bystrodeystviya-i-energosberezheniya (дата обращения: 30.08.2017)
3. Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление нелинейными объектами технологической теплофизики // Автометрия. 2012. Т. 48. № 5. С. 3–13.
4. Нейдорф Р.А., Чан Н.Н. Рекуррентно-диффеоморфный синтез квазиоптимальных по быстродействию ограниченных законов управления [Электронный ресурс] // Информатика и системы управления. 2006. № 2 (12). 2006. С. 119–128. URL: http://ics.khstu.ru/media/2010/N12_15.pdf (дата обращения: 07.09.2017)
5. Hangos K.M., Bokor J., Szederkényi G. Analysis and Control of Nonlinear Process Systems. London, 2004. URL: http://inis.jinr.ru/sl/M_Mathematics/MOc_Optimal%20control/Hangos%20Analysis.pdf (дата обращения 07.09.2017)
6. Корнюшин Ю.П., Егупов Н.Д., Корнюшина Е.Ю. Синтез оптимальных по быстродействию программных управлений для нелинейных объектов // Вопросы радиоэлектроники. 2013. Т. 1. № 4. С. 148–156.
7. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
8. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 551 с.
9. Синтез дополнительного регулятора для стабилизации угловой скорости ротора паровой турбины / Ю.П. Корнюшин, Д.В. Мельников, Н.Д. Егупов, П.Ю. Корнюшин // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Естественные науки». 2015. № 5 (62). С. 100–112. DOI: 10.18698/1812-3368-2015.

REFERENCES

1. Medvedev M. Yu. Synthesis of closed minimum time controls for cascade nonlinear dynamic systems with the constraints on coordinates. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie,* 2009, no. 7 (100), pp. 2–6 (In Russian).
2. Solovev A. E., Lovchakov E.V. [The method of synthesis of quasi-optimal control systems by the criteria of speed and energy saving] (In Russ.). Izvestija TulGU. Tehnicheskie nauki, 2011, no. 5, pp. 220–230 Available at: https://cyberleninka.ru/article/n/metod-sinteza-kvazioptimalnyh-sistem-upravleniya-po-kriteriyam-bystrodeystviya-i-energosberezheniya (accessed 30.08.2017)
3. Pleshivceva Yu. E., Rapoport E. Ya. The optimum control on nonlinear objects of technological thermophysics. *Avtometriya,* 2012, vol. 48, no. 5, pp. 3–13 (In Russian).
4. Neydorf R.A., Chan N.N. [Recurrent-diffeomorphic synthesis of quasioptimal bounded control laws In terms of speed] (In Russ.). Informatika i sistemy upravleniya, 2006, no. 2 (12), 2006, pp. 119–128. Available at: http://ics.khstu.ru/media/2010/N12_15.pdf (accessed 07.09.2017)
5. Hangos K.M., Bokor J., Szederkényi G. [Analysis and Control of Nonlinear Process Systems]. London, Springer, 2004, 308 p. Available at: http://inis.jinr.ru/sl/M_Mathematics/MOc_Optimal%20control/Hangos%20Analysis.pdf (accessed 07.09.2017)
6. Kornyushin Yu. P., Egupov N.D., Kornyushina E. Yu. Synthesis of time-optimal programmed controls for non-linear objects. *Voprosy radioelektroniki,* 2013, vol. 1, no. 4, pp. 148–156 (In Russian).
7. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaja teorija optimalnyh processov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 384 p. (In Russian).
8. Kreyn M.G., Nudelman A.A. *Problema momentov Markova i jekstremalnye zadachi* [Markov moment problem and extremal problems]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 551 p. (In Russian).
9. Kornyushin Yu. P., Melnikov D.V., Egupov N.D., Kornyushin P. Yu. Synthesis of additional regulator to stabilize the angular velocity of the rotor of a steam turbine. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana.* 2015, no. 5 (62), pp. 100–112, DOI 10.18698/1812-3368-2015 (In Russian).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Корнюшин Юрий Петрович, д.т.н., профессор, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Калужский филиал, 248000, Калуга, ул. Баженова, д.2, тел.: 8 (906) 813-28-19, 8 (4842) 54-78-36, e-mail: theroland@yandex.ru.
Мельников Дмитрий Владимирович, к.т.н., доцент, зав. кафедрой, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Калужский филиал, 248000, Калуга, ул. Баженова, д.2, тел.: 8 (920) 613-85-74, 8 (4842) 77-45-11, e-mail: melnikov-dv@yandex.ru.
Мазин Анатолий Викторович, д.т.н., профессор, зав. кафедрой ЭИУ6-КФ, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Калужский филиал, 248000, Калуга, ул. Баженова, д.2, тел.: 8 (910) 915-58-25, e-mail: mazinav@yandex.ru.

AUTHORS

Korniushin Yuriy, Dr., professor, Bauman Moscow State Technical University, Kaluga branch, 2, ulitsa Bazhenova, Kaluga, 248000, Russian Federation, tel.: +7 (906) 813-28-19, +7 (4842) 54-78-36, e-mail: theroland@yandex.ru.
Melnikov Dmitriy, PhD, associate professor, head of the Department, Bauman Moscow State Technical University, Kaluga branch, 2, ulitsa Bazhenova, Kaluga, 248000, Russian Federation, tel.: +7 (920) 613-85-74, +7 (4842) 77-45-011, e-mail: melnikov-dv@yandex.ru.
Mazin Anatoliy, professor, head of the Department EIU6-KF, Bauman Moscow State Technical University, Kaluga branch, 2, ulitsa Bazhenova, Kaluga, 248000, Russian Federation, tel.: +7 (910) 915-58-25, e-mail: mazinav@yandex.ru.