Soluciones Maxmin en Juegos de Negociación n-Personales

Mármol A.M., Monroy L., Rubiales V.
Departamento de Economía Aplicada III
Universidad de Sevilla

Avda. Ramón y Cajal nº 1, Sevilla 41018
Tfno. 954557562. Fax 954551667
E-mail: vrubiales@us.es

Resumen

En este trabajo proponemos utilizar el criterio maxmin para obtener soluciones equilibradas en juegos de negociación de n agentes. Se analizan las relaciones existentes entre las soluciones obtenidas al utilizar un criterio consistente en la maximización del mínimo de las utilidades obtenidas por los agentes en relación al punto de desacuerdo, y algunas soluciones axiomáticas clásicas, como son la solución de Kalai-Smorodinsky, la solución igualitaria y en general, la familia de soluciones proporcionales o α-igualitarias.

Palabras clave: Juegos de negociación. Soluciones α-igualitarias. Criterio maxmin.

1. INTRODUCCIÓN

Un modelo de negociación es un juego en el cuál dos o más jugadores tienen la oportunidad de cooperar para beneficiarse conjuntamente, pero deben negociar un procedimiento aceptable para repartir los beneficios de dicha cooperación. El modelo de negociación especifica si se alcanzará un acuerdo, cuándo se alcanzará y cómo se repartirán las ganancias obtenidas, dependiendo de las reglas de la negociación y las características de los negociadores. En este contexto, un problema de negociación se describe mediante un conjunto de pagos o utilidades posibles y un punto que representa las consecuencias del desacuerdo. Una solución para este problema especifica el pago en el que jugadores racionales se pondrían de acuerdo si se enfrentaran al problema de negociación.

En la literatura se han propuesto muchos conceptos de solución. Entre las soluciones clásicas que se han planteado, la solución de Nash, Nash (1950), es la más conocida y asigna el punto del conjunto de pagos posibles que maximiza el producto de las utilidades obtenidas desde el punto de desacuerdo. Kalai y Smorodinsky (1975) consideraron como solución el punto que establece utilidades proporcionales a las expectativas más optimistas de los agentes, es decir, el punto maximal factible sobre la recta que une el punto de desacuerdo y el punto ideal. La solución igualitaria es aquella que proporciona las mismas ganancias de utilidad a todos los agentes. Kalai (1977) introduce el concepto de solución proporcional, también denominada α-igualitaria, que es aquella que asigna el punto maximal factible para el cual las ganancias de utilidad de todos los agentes desde el punto de desacuerdo son proporcionales. En esta familia se incluyen como casos particulares, la solución de Kalai-Smorodinsky y la solución igualitaria.

En este trabajo proponemos utilizar el criterio maxmin para obtener soluciones en los juegos de negociación n-personales cuando se busca la mejora conjunta de las ganancias de utilidad de los agentes. Consideramos como solución del juego el punto factible que maximiza el mínimo de las ganancias de utilidad ponderadas obtenidas por cada jugador. Se demuestra que, bajo determinados supuestos sobre el conjunto de acuerdos alcanzables, las soluciones maxmin ponderadas coinciden con las proporcionales o α-igualitarias, y cuando no es así, las soluciones maxmin se identifican con las distintas extensiones diseñadas en la literatura para salvar los inconvenientes de las soluciones α-igualitarias en lo que se refiere a la pérdida de la optimalidad de Pareto. Este hecho tiene especial relevancia cuando en el juego intervienen más de dos agentes. En estos juegos, uno de los conceptos de solución más ampliamente aceptados, la solución de Kalai-Smorodinsky, no cumple necesariamente el axioma de Pareto optimalidad. La solución α-maxmin proporciona, en este caso, una solución Pareto óptima en la que subyace la misma idea inicial que en la solución de Kalai-Smorodinsky. De este modo, el concepto de solución α-maxmin generaliza el de solución igualitaria y α-igualitaria y permite un tratamiento unificado de todos los problemas de negociación cuando se busca la mejora conjunta de las ganancias de utilidad ponderadas.

El trabajo está estructurado de la siguiente forma. En la sección 2 presentamos el juego de negociación de n jugadores y algunas definiciones básicas. En la sección 3 definimos las soluciones α–maxmin y estudiamos las relaciones de éstas con algunas soluciones axiomáticas clásicas, como son la solución de Kalai-Smorodinsky, la solución igualitaria y en general, la familia de soluciones proporcionales o α-igualitarias. En la sección 4 estudiamos el caso en el que el conjunto de pagos posibles es un conjunto poliédrico y proponemos un procedimiento simplificado para obtener las soluciones α-maxmin. Por último, la sección 5 dedicada a las conclusiones.

2. JUEGOS DE NEGOCIACIÓN n-PERSONALES. DEFINICIONES BÁSICAS.

En primer lugar, establecemos la notación y definiciones que utilizaremos en el trabajo.

Dados $x, y \in 3^n$, convendremos para las desigualdades vectoriales la notación siguiente: $x = y$ si y sólo si $x_i = y_i \ \forall\ i=1,...,n$; $x \geqq y$ si y sólo si $x_i \geq y_i \ \forall\ i=1,...,n$; $x \geq y$ si y sólo si $x_i \geq y_i \ \forall\ i=1,...,n$ con $x \neq y$; $x > y$ si y sólo si $x_i > y_i \ \forall\ i=1,...,n$.

Formalmente, definimos un juego de negociación n-personal o de n agentes como sigue.

Definición 2.1. Un juego de negociación n-personal es un par (S,d) donde $S \subseteq 3^n$, $d \in 3^n$, S es convexo y compacto, y $\exists\ x \in S$ tal que $x > d$.

S es el conjunto de vectores de utilidad o de pagos alcanzables por los jugadores mediante un acuerdo. Dado $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S$, la componente x_i representa la utilidad o el pago obtenido por el jugador i. El punto de desacuerdo, d, es la utilidad que obtendrán los jugadores si el proceso de negociación no termina en un acuerdo.

Además de las condiciones de convexidad y compacidad que hemos supuesto para el conjunto S, frecuentemente se hacen otras hipótesis sobre este conjunto relacionadas con la libre disposición de las utilidades por parte de los agentes.

Definición 2.2. S es d-comprensivo si $\forall x \in S$, $y \in 3^n$ si $x \geq y \geq d$ entonces $y \in S$. S es estrictamente d-comprensivo si $\forall x \in S$, $y \in 3^n$, si $x \geq y \geq d$ entonces $y \in S$ y $\exists\ z \in S$ tal que $z > y$.

Una solución asigna a cada juego de negociación (S,d) un punto del conjunto factible S. A las soluciones del problema han de exigírseles unos requisitos mínimos de racionalidad, en el sentido de que no haya otras preferidas por todos los agentes. Estos requisitos son los denominados axiomas de Pareto optimalidad y Pareto optimalidad débil, que definimos a continuación.

Definición 2.3. Un punto $x \in S$ es Pareto óptimo si $\nexists\ y \in S$ tal que $y \geq x$. Un punto $x \in S$ es débilmente Pareto óptimo si $\nexists\ y \in S$ tal que $y > x$.

A continuación consideramos la familia de soluciones proporcionales definidas por Kalai (1977) y posteriormente estudiadas por Chun y Thomson (1990) bajo el nombre de soluciones igualitarias ponderadas con pesos α o α-igualitarias, ya que en la siguiente sección estudiamos las relaciones que existen entre ellas y la familia de soluciones que proponemos. Denotemos por $\Delta = \{\alpha \in R^n \,/\, \alpha_i > 0\ \forall i = 1,...,n\}$ al conjunto de pesos o ponderaciones positivas.

Definición 2.4. El punto $x \in S$ es una solución proporcional o α-igualitaria del juego (S,d) si $\exists\ \alpha \in \Delta$ tal que $x = d + t^*\alpha$, donde $t^* = max\{t \,/ (d + t\alpha) \in S\}$. Si $\alpha_i = \alpha_j\ \forall i, j$ la solución se denomina igualitaria.

Sin pérdida de generalidad, se puede definir la solución igualitaria como $x = d + t^*$ donde $t^* = max\{t \,/ (d + t) \in S\}$.

Las soluciones α-igualitarias asocian con cada problema el punto maximal factible para el cual las ganancias de utilidad de los agentes desde el punto de desacuerdo son proporcionales a α, es decir, es el punto maximal factible que interseca con la recta que pasa por el punto de desacuerdo en la dirección de α. Así si $x \in S$ es la solución α-igualitaria asociada al vector α, entonces para cualesquiera jugadores i y j, $\dfrac{x_i - d_i}{\alpha_i} = \dfrac{x_j - d_j}{\alpha_j}$.

Denotemos por $I(S,d)$ el punto ideal del problema, cuyas componentes son $I_i = max\{x_i \,/\, x \in S,\ x \geq d\},\ \forall i = 1,...,n$. Cuando el vector de pesos α toma la dirección del punto ideal de S, la solución α-igualitaria obtenida coincide con la solución de Kalai-Smorodinsky. Esta solución elige el punto maximal factible para el cual las ganancias de utilidad de los agentes desde el punto de desacuerdo son proporcionales a la diferencia entre el punto ideal y el punto de desacuerdo. Así, si $x \in S$ es la solución de Kalai-

Smorodinsky, para cualesquiera jugadores i y j, $\frac{x_i - d_i}{I_i - d_i} = \frac{x_j - d_j}{I_j - d_j}$, es decir, x es la solución α-igualitaria, con α tal que $\alpha_i = (I_i - d_i), \forall i = 1,...,n$.

En la figura 1 se representa un juego de negociación bipersonal. La solución igualitaria E es el punto de intersección de la recta de pendiente 1 que pasa por el punto d y la frontera de S. La solución de Kalai-Smorodinsky K-S es el punto de corte de la recta que une los punto I y d y la frontera de S.

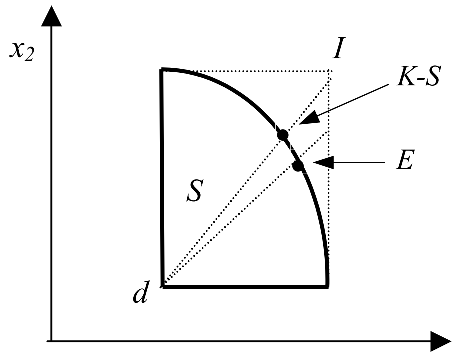

Figura 1

En general, las soluciones α-igualitarias pueden no ser Pareto-óptimas. Para juegos cuyo conjunto factible S es d-comprensivo, las soluciones α-igualitarias son débilmente Pareto-óptimas. Cuando el conjunto factible S no es d-comprensivo, las soluciones α-igualitarias pueden no ser ni siquiera débilmente Pareto-óptimas, (Thomson, 1994).

3. SOLUCIONES MAXMIN EN JUEGOS DE NEGOCIACIÓN n-PERSONALES

En esta sección, proponemos la utilización del criterio maxmin para la obtención de soluciones del juego de negociación n-personal. Este criterio es el apropiado cuando hay acuerdo unánime entre los agentes para conseguir que las ganancias de utilidad aumenten en conjunto, aunque se incorpora la posibilidad de que estas ganancias de utilidad estén ponderadas por distintos pesos. Aplicar el criterio maxmin para obtener la solución del juego consiste en hallar un resultado factible que maximice el mínimo de las ganancias de utilidad ponderadas obtenidas por cada jugador. Demostramos que, en determinadas condiciones, las soluciones α-igualitarias y la solución de Kalai-Smorodinsky son casos particulares de la familia de soluciones propuestas y, en cualquier caso, se identifican con extensiones de éstas.

Dado $x \in S$ y $\alpha \in \Delta$, para cada jugador i, denotamos por $f_i(x_i) = \frac{x_i - d_i}{\alpha_i}$ y la denominamos función de ganancias ponderadas del jugador i.

Definición 3.1. El punto $x \in S$ es una solución α-maxmin del juego (S, d), con $\alpha \in \Delta$, si es solución del problema:

$$\begin{aligned} & max_x min_i \left\{ \frac{x_i - d_i}{\alpha_i},\ i = 1,2,...,n \right\} \\ & s.\ a. \qquad x \in S \\ & \qquad\qquad x \geq d \end{aligned}$$

A continuación vamos a demostrar que en condiciones de d-comprensividad del conjunto S, la solución α-maxmin se alcanza cuando todas las funciones de ganancias ponderadas toman el mismo valor, es decir, en la recta $r \equiv \left\{ x \in R^n \ /\ \frac{x_i - d_i}{\alpha_i} = t,\ i = 1,2,...,n \right\}$. Esto significa que, en el resultado obtenido de la negociación, las ganancias de utilidad desde el punto de desacuerdo ponderadas con pesos $1/\alpha_i$, son iguales para todos los agentes. Denotemos $z(x) = min_i \left\{ \frac{x_i - d_i}{\alpha_i} \right\}$.

Proposición 3.1: Si el conjunto S es d-comprensivo, entonces una solución α-maxmin del juego (S,d), se alcanza cuando las funciones de ganancias ponderadas de todos los jugadores toman el mismo valor.

<u>Demostración</u>: Sea x^* una solución del problema maxmin y sea $z_j = \frac{x_j^* - d_j}{\alpha_j} = min_i \left\{ \frac{x_i^* - d_i}{\alpha_i} \right\},\ j = 1,...,m$.

Si $x^* \notin r$, entonces $\exists k \,/\, \frac{x_k^* - d_k}{\alpha_k} > z_j$. Consideremos el punto $\hat{x}$ tal que:

$$\hat{x}_k = x_k^* \qquad si \quad \frac{x_k^* - d_k}{\alpha_k} = z_j$$

$$\frac{\hat{x}_k - d_k}{\alpha_k} = z_j \quad si \quad \frac{x_k^* - d_k}{\alpha_k} > z_j$$

entonces $\hat{x} \in r$, además $x^* \geq \hat{x}$ y $\hat{x} \geq d$, por la d-comprensividad de S, $\hat{x} \in S$ y $min_i \left\{ \frac{\hat{x}_i - d_i}{\alpha_i} \right\} = z_j$, por tanto $z(\hat{x}) = z(x^*)$ y $\hat{x} \in r$ es también solución óptima del problema maxmin. ■

En estas condiciones, la solución α-maxmin que está sobre la recta r coincide con la solución α-igualitaria descrita en la sección anterior.

En la figura 2 se representa un problema de negociación bipersonal. La solución α-igualitaria es el punto A. Las líneas punteadas representan las curvas de nivel de la función $z(x)$. El conjunto de soluciones α-maxmin está representado por el segmento de extremos A y B. Obsérvese que las soluciones α-maxmin son débilmente Pareto óptimas. Sin embargo, el punto B se corresponde con una solución α-maxmin que es Pareto óptima y que coincide con la solución α-igualitaria lexicográfica.

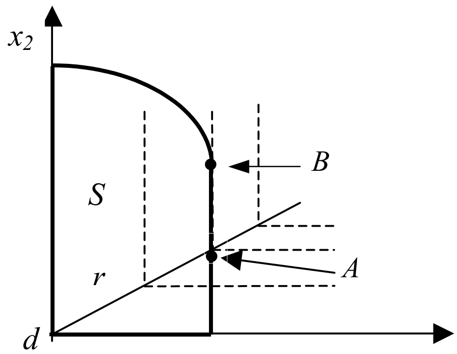

Figura 2

A continuación se demuestra que la d-comprensividad estricta del conjunto S garantiza la unicidad de la solución α-maxmin del problema de negociación.

Proposición 3.2: Si el conjunto S es estrictamente d-comprensivo, entonces la solución α-maxmin del juego (S,d) es única.

Demostración: Sea x^* la solución α-maxmin que está sobre la recta, y sea $\hat{x}$ otra solución α-maxmin, por lo que $z(x^*) = z(\hat{x})$.

Si $\hat{x} \geq x^*$, por la d-comprensividad estricta de S, $\exists\ y \in S$ con $y > x^*$. Entonces $min_i \left\{ \frac{y_i - d_i}{\alpha_i} \right\} > min_i \left\{ \frac{\hat{x}_i - d_i}{\alpha_i} \right\}$ de donde $z(y) > z(x^*)$ en contra de que x^* es solución α-maxmin.

Si $\hat{x} \ngeq x^*$, $\exists\, j \,/\, \hat{x}_j < x_j^*$, entonces $\frac{\hat{x}_j - d_j}{\alpha_j} < \frac{x_j^* - d_j}{\alpha_j}$ y $z(\hat{x}) \neq z(x^*)$ en contra de la hipótesis. ■

De esta demostración se deduce también el siguiente resultado:

Corolario 3.1. Si S es estrictamente d-comprensivo la solución α-maxmin del juego (S,d) es Pareto óptima.

De las proposiciones 3.1 y 3.2 se sigue que cuando el conjunto S es estrictamente d-comprensivo la solución α-maxmin y la solución α-igualitaria coinciden. Esta situación se ilustra en la figura 3.

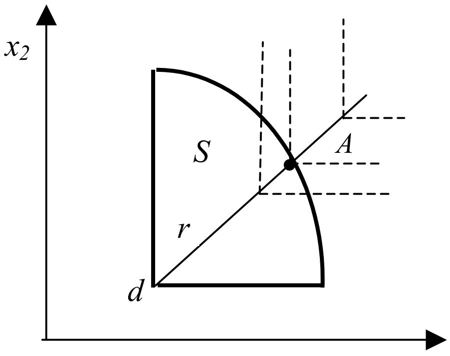

Figura 3

Cuando el conjunto *S* no es comprensivo la solución α-igualitaria no tiene por qué ser una solución α-maxmin. En este caso, existe al menos una solución α-maxmin Pareto óptima, no pudiendo asegurarse la existencia de una solución α-igualitaria distinta del punto de desacuerdo, y en caso de existir puede no ser débilmente Pareto óptima. En la figura 4 se ilustra esta situación para un juego bipersonal. El punto *B* representa la solución α-maxmin y el punto *A* la solución α-igualitaria.

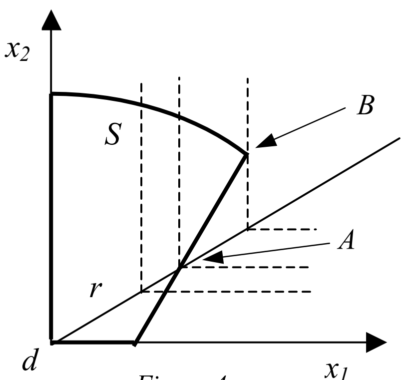

Figura 4

De los resultados de esta sección se desprende que la obtención de soluciones del problema de negociación mediante el criterio maxmin proporciona soluciones Pareto óptimas con independencia de las propiedades de comprensividad del conjunto *S*.

4. LOS PROBLEMAS DE NEGOCIACIÓN n-PERSONALES LINEALES

Los problemas de negociación lineales constituyen un caso particular interesante en los que, debido a las propiedades derivadas del carácter poliédrico del conjunto *S*, pueden obtenerse fácilmente las soluciones α-maxmin, y en particular la solución igualitaria y la de Kalai-Smorodinsky. La forma analítica de estas dos últimas soluciones ha sido determinada por Zhao (2001) para problemas de negociación rectangulares y problemas de reparto del excedente, que son casos particulares de los resultados que presentamos en esta sección.

A continuación demostramos que es posible obtener la expresión analítica de las soluciones α-maxmin para los problemas de negociación lineales d-comprensivos, a partir de los coeficientes de las restricciones que determinan el conjunto S.

Un conjunto poliédrico $S \subseteq 3^n$, puede representarse como $S=\{x \in 3^n / \ Ax \leq b\}$, $A \in M_{mxn}$. Denotemos por a_{ji}, $j=1,...,m$, $i=1,...,n$ a los elementos de la matriz A. Si $a_{ji} \geq 0$ $\forall$ $j=1,...,m$, $i=1,...,n$ el conjunto S es d-comprensivo. En estas condiciones, se establece el siguiente resultado.

Proposición 4.1. Sea $S=\{x \in 3^n / \ Ax \leq b\}$ con $a_{ji} \geq 0$ $\forall$ $j=1,...,m$, $i=1,...,n$. Una solución α-maxmin del juego de negociación (S,d) es x^* donde $x_i^* = t^* \alpha_i + d_i \ \forall i = 1,...,n$, siendo

$$t^* = min_j \left\{ \frac{b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} d_i}{\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \alpha_i}, \quad j = 1,...,m \right\}.$$

<u>Demostración</u>: Sea $x \in S$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j \ \ \forall j = 1,...,m$.

Dado $y \in 3^n$ con $d \leq y \leq x$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} y_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j \ \ \forall \ j = 1,...,m$ entonces $y \in S$, luego S es d-comprensivo y por la proposición 3.1, una solución del problema maxmin está sobre la recta r. Sea x^* dicha solución, entonces $x_i^* = t\alpha_i + d_i \geq d_i \ \ \forall i = 1,...,n$. Sustituyendo el punto x^* en las restricciones que definen el conjunto S,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^* = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} (t\alpha_i + d_i) \leq b_j \ \ \forall j = 1,...,m$$

entonces

$$t \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ji} d_i \leq b_j \ \ \forall j = 1,...,m \Rightarrow t \leq \frac{b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} d_i}{\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \alpha_i} \ \ \forall j = 1,...,m.$$

Denotando por $t_j = \dfrac{b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} d_i}{\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \alpha_i}$ $j = 1,...,m$, como $z(x) = t$, el máximo viene dado por

$t^* = min_j \{t_j, \ j = 1,...,m\}$ y la solución óptima es $x_i^* = t^* \alpha_i + d_i \ \ i = 1,...,n$. ■

Además, la positividad de los coeficientes de la matriz A garantiza la unicidad de la solución α-maxmin.

Proposición 4.2. Si $S=\{x \in 3^n / \ Ax \leq b\}$ con $a_{ji} > 0$ $\forall$ $j=1,...,m$, $i=1,...,n$, entonces la solución α-maxmin es única.

<u>Demostración</u>: Basta con demostrar que S es estrictamente d-comprensivo.

Sea $\hat{x} \in S$ y $\hat{x} \geq x$. Supongamos que x es un punto interior al conjunto *S,* entonces $\exists\, E(x) \subseteq S$, $\exists\, y > x$ tal que $y \in E(x)$ por lo que $y \in S$. Si x no es un punto interior, existe al menos *k=1,...,n,* tal que $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i = b_k$. Como $\hat{x} \geq x$ se tiene $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} \hat{x}_i > \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i = b_k$ en contra de ser $\hat{x}$ factible. ■

Esta condición suficiente para la unicidad de la solución α-maxmin puede relajarse como muestra el siguiente corolario.

Corolario 4.1. Sea $t^* = t_k$, si $a_{ki} > 0\ \forall\, i = 1,...,n$ entonces la solución α-maxmin es única.

Por tanto, basta con que una de las restricciones donde se alcanza $min_j \{t_j,\ j = 1,...,m\}$ tenga todos los coeficientes positivos para que la solución α-maxmin sea única.

A partir de estos resultados se puede obtener la expresión analítica de la solución igualitaria y la de Kalai-Smorodinsky. La solución igualitaria x^* es la solución α-maxmin para $\alpha_i = 1,\ \forall\, i = 1,...,n$, y por la proposición 4.1, $x_i^* = t^* + d_i \quad i = 1,...,n$ siendo

$$t^* = min_j \left\{ \frac{b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} d_i}{\sum_{i=1}^{n} a_{ji}},\quad j = 1,...,m \right\}.$$

Para obtener la solución de Kalai-Smorodinsky hay que determinar previamente el punto ideal. En las condiciones de la proposición 4.1, podemos obtenerlo directamente a partir de las restricciones que definen el conjunto *S*, pues $I_i = min_j \frac{b_j}{a_{ji}},\ \forall\, i = 1,...,n$.

Conocido el punto ideal, la solución de Kalai-Smorodinsky x^* es la solución α-maxmin para $\alpha_i = (I_i - d_i)\ \forall\, i$, de donde $x_i^* = t^*(I_i - d_i) + d_i \quad i = 1,...,n$ con

$$t^* = min_j \left\{ \frac{b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} d_i}{\sum_{i=1}^{n} a_{ji}(I_i - d_i)},\quad j = 1,...,m \right\}.$$

En la figura 5 se representan las soluciones de Kalai-Smorodinsky *K-S* y la igualitaria *E* para un problema de negociación bipersonal lineal. Obsérvese, que aunque el conjunto *S* no es estrictamente *d*-comprensivo, al obtener las soluciones α-maxmin correspondientes según el procedimiento de la proposición 4.1, se puede asegurar su unicidad, y la coincidencia de las soluciones de Kalai-Smorodinsky y la igualitaria con las correspondiente soluciones α-maxmin.

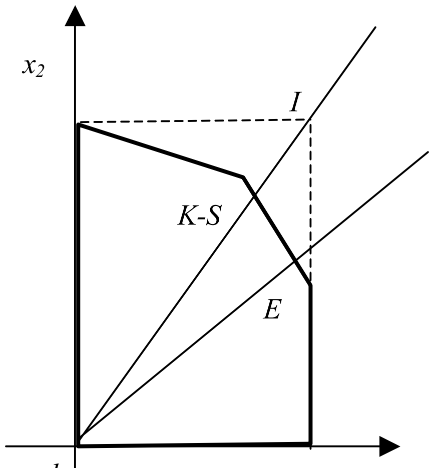

Figura 5

Estos resultados pueden generalizarse para el caso de funciones de valoración, $f_i(x_i)$, estrictamente crecientes, como se hace en Mármol y Pelegrín (1991) en el contexto de problemas de asignación de recursos.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos puesto de manifiesto que la familia de soluciones α-maxmin para los problemas de negociación n-personales, generaliza y extiende algunas de las soluciones más ampliamente estudiadas en la literatura y utilizadas en la práctica.

La aplicación del criterio maxmin para determinar resultados que sean aceptables por los agentes cuando se busca la mejora conjunta de las ganancias de utilidad, permite el tratamiento de forma unificada de los problemas de negociación, con independencia de las propiedades de comprensividad o no del conjunto de acuerdos posibles.

Además se ha demostrado que, bajo determinadas condiciones, el cálculo de las soluciones α-maxmin del problema de negociación lineal es especialmente sencillo, y la forma analítica de la solución se obtiene fácilmente.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chun Y., Thomson W. (1990). Bargaining with uncertain disagreement points. Econométrica, 58, pp. 951-959.

Kalai E. (1977). Proportional solutions to bargaining situations: interpersonal utility comparisons. Econométrica, 45, pp. 1623-1630.

Kalai E., Smorodinsky M. (1975). Other solutions to Nash's bargaining problem. Econométrica, 43, pp. 513-518.

Mármol A., Pelegrín B. (1991). Asignación de recursos max-min: propiedades y algoritmos. Trabajos de Investigación Operativa, 6, pp. 45-59.
Nash J.F. (1950). The bargaining problem. Econométrica, 18, pp. 155-162.
Thomson W. (1994). Cooperative models of bargaining. En Aumann R.J. and Hart S. (eds), Handbook of Game Theory, Vol. II, pp. 1238-1277.
Zhao J. (2001). The properly efficient bargaining solutions. Working paper. Iowa State University.