Regla del Talmud Generalizada para Problemas de Reparto con Referencias Múltiples*

Sánchez Sánchez, Francisca J. (fsansan@upo.es)
Hinojosa Ramos, Miguel A. (mahinram@upo.es)
Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide
Mármol Conde, Amparo M. (amarmol@us.es)
Economía Aplicada III
Universidad de Sevilla

RESUMEN

En los problemas de reparto que consideramos en este trabajo, hay que repartir un recurso con arreglo a unas referencias de los agentes. Para obtener repartos de la cantidad disponible en este contexto es necesario diseñar reglas que tengan en cuenta la multidimensionalidad de las referencias de cada agente. Proponemos una regla de reparto que tiene en cuenta todos los escenarios posibles y demostramos que esta solución coincide con la regla del Talmud cuando se considera el mínimo de las demandas en cada escenario.

Palabras clave: Problemas de reparto, Teoría de Juegos, regla del Talmud, nucleolo.
Clasificación JEL (Journal Economic Literature): C71
Área temática: Teoría de Juegos

*Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el proyecto del Ministerio de Ciencia y Tecnología SEJ2007-62711/ECON y el proyecto de la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía PO6-SEJ-01801.

1. INTRODUCCIÓN

Un problema de reparto aparece cuando hay que dividir una cantidad entre un conjunto de agentes respecto a unas referencias o características de dichos agentes. Desde muy antiguo se han presentado problemas reales de este tipo. Son clásicos los ejemplos que aparecen en el Talmud babilónico (ver Aumann y Maschler, 1985) en un contexto de bancarrota (el estado o cantidad a repartir es insuficiente para satisfacer las demandas).

En este trabajo tratamos problemas de reparto en un ambiente de incertidumbre, es decir, cuando las referencias de los agentes son inciertas, en el sentido de que dependen de distintos escenarios o distintos estados de la naturaleza.

El problema se aborda desde la perspectiva de la Teoría de Juegos Cooperativos. Se asocia a cada problema de reparto con referencias múltiples un juego que valora, en el escenario más optimista, lo que cada grupo de agentes puede conseguir y se propone como solución del problema de reparto, el nucleolo de dicho juego.

Este enfoque difiere del utilizado en la literatura reciente para este tipo de situaciones, donde se define el juego utilizando una perspectiva vectorial, valorando lo que cada grupo de agentes puede conseguir mediante un vector que contiene todos los posibles resultados en los distintos escenarios. Esta clase de juegos vectoriales ha sido estudiada en Fernández et al. (2002b, 2004) and Hinojosa et al. (2005).

De manera similar al problema convencional de reparto en el que se establecen las relaciones existentes entre algunas reglas de reparto con determinadas soluciones de la Teoría de Juegos Cooperativos (O'Neill (1982), Aumann y Maschler (1985), Curiel et al. (1987) y Dutta y Ray (1989)), proponemos una regla de reparto que minimiza el máximo descontento de los agentes en todos los escenarios posibles y demostramos que esta regla extiende la regla del Talmud para problemas de reparto con referencias múltiples, puesto que coincide con la regla del Talmud en el problema de reparto donde se consideran las demandas mínimas en los distintos escenarios.

2. PROBLEMAS Y REGLAS DE REPARTO

Una cantidad $E \in \mathbb{R}_+$ de un recurso divisible, tiene que repartirse entre $N = \{1, \ldots, n\}$ agentes de acuerdo con unas referencias, representadas por el vector $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ($c_i \in \mathbb{R}_+$ representa la referencia o característica del agente $i \in N$). Un problema de reparto clásico es una terna $(N, E, \mathbf{c})$. Denotemos por $\mathcal{C}^N$ a la clase de estos problemas.

Situaciones que pueden representarse según este modelo se presentan en una gran variedad de contextos, por ejemplo, en problemas de herencia (O'Neill, 1982), en problemas de distribución de impuestos (Young, 1988, 1990), en problemas de bancarrota (Aumann y Maschler, 1985) o en problemas de reparto de beneficios (Moulin, 1987).

Una regla de reparto es una función que asocia a cada problema $(N, E, \mathbf{c}) \in \mathcal{C}^N$ un vector, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tal que, $x_i \geq 0,\ \forall i \in N$ (racionalidad individual) y $\sum_{i \in N} x_i = E$ (eficiencia). La componente x_i representa el pago que recibe el agente i. Una buena revisión de las reglas de reparto clásicas se puede ver en Thomson (2003).

Una regla de interés en este trabajo para el caso concreto de problemas de bancarrota es la regla del Talmud (Aumann y Maschler, 1985). Suponiendo que $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$ son las demandas sobre un estado E y $\sum_{i=1}^n c_i \geq E$, la regla del Talmud se puede definir mediante el siguiente algoritmo: La cantidad a repartir aumenta progresivamente desde 0 a $\sum_{i=1}^n c_i = D$, $0 \leq E \leq D$. Cuando la cantidad que se reparte es pequeña ($E \leq \frac{1}{2}D$) ésta se divide igualitariamente entre los agentes, continuando de esta forma hasta que el primero de ellos haya recibido la mitad de lo que pedía. Entonces éste ya no recibe más y cada unidad monetaria adicional se divide igualitariamente entre el resto de agentes. Así se sigue hasta que el segundo demandante reciba la mitad de su demanda, momento en el que este ya no recibe más pago y cada unidad monetaria adicional se divide igualitariamente entre el resto de agentes. El proceso continúa mientras exista cantidad para repartir. Cuando la cantidad que se reparte es mayor que la mitad de las demandas totales, entonces en vez de pensar en términos de ganancias, se piensa en términos de pérdidas. Cuando la pérdida total (la pérdida es la cantidad que falta para cubrir la demanda de todos los demandantes implicados en el litigio) es pequeña, esta se divide igualmente entre todos los demandantes. Así cada agente recibe su demanda menos la pérdida repartida igualmente entre todos los agentes. Se continúa dividiendo igualitariamente cada unidad monetaria adicional de la pérdida total, hasta que el primer demandante pierda la mitad de su demanda (que es lo mismo que si recibiera la mitad de su demanda). En ese momento este agente deja de perder y cada unidad monetaria adicional de pérdida total es igualmente dividida entre el resto de agentes. Esto, a su vez, continúa hasta que el segundo demandante haya perdido la mitad de su demanda. En ese momento deja de perder, y cada unidad adicional es igualmente dividida entre el resto agentes. El proceso sigue hasta que se reparta la pérdida total. Formalmente la regla del Talmud es la que se muestra a continuación, donde $c_0 \equiv 0$:

Para $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{c_i}{2} + (n-k)\frac{c_k}{2} \leq E \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{c_i}{2} + (n-k)\frac{c_{k+1}}{2}$, $0 \leq k \leq n-1$,

$$\mathbf{T}(N,E,\mathbf{c}) = \begin{cases} T_i(N,E,\mathbf{c}) = \frac{c_i}{2} & i = 1,\ldots,k \\ T_i(N,E,\mathbf{c}) = \frac{E - \sum_{l=1}^{k} \frac{c_l}{2}}{n-k} & i = k+1,\ldots,n \end{cases}$$

Para $\displaystyle D - \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{c_i}{2} + (n-k)\frac{c_{k+1}}{2}\right) \leq E \leq D - \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{c_i}{2} + (n-k)\frac{c_k}{2}\right)$, $n-1 \geq k \geq 0$,

$$\mathbf{T}(N,E,\mathbf{c}) = \begin{cases} T_i(N,E,\mathbf{c}) = \frac{c_i}{2} & i = 1,\ldots,k \\ T_i(N,E,\mathbf{c}) = c_i - \frac{(D-E) - \sum_{l=1}^{k} \frac{c_l}{2}}{n-k} & i = k+1,\ldots,n \end{cases}$$

Cuando los agentes tienen acuerdos de cooperación, una herramienta válida para el estudio de los problemas de reparto es la Teoría de Juegos Cooperativos. Un juego cooperativo es un par (N, v) donde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores, una coalición S es un subconjunto de N y v es una función definida en el conjunto de subconjuntos de N, con valores en $\mathbb{R}$, con $v(\emptyset) = 0$. El número $v(S)$ es el valor de la coalición S en el juego y es una medida de lo que la coalición puede conseguir por sí misma, sin la cooperación de los jugadores en $N\backslash S$. O'Neill (1982) asocia al problema de reparto $(N, E, \mathbf{c}) \in \mathcal{C}^N$, un juego cooperativo (N, v) definido como sigue[1]:

$$v(S) = \left(E - \sum_{i \notin S} c_i\right)_+, \ \forall\, S \subset N. \tag{1}$$

El valor $v(S)$ es una valoración pesimista de lo que la coalición S puede conseguir, puesto que primero asigna a los agentes que no pertenecen a S lo que piden y si después de ésto queda algo de la cantidad que se reparte, E, eso sería lo que la coalición S podría conseguir.

Una asignación del juego es un vector, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, cuyas componentes representan el pago que recibe cada jugador, de forma que $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$. La suma $x(S) = \sum_{i\in S} x_i$ es el pago de la coalición S. Denotamos por $I^*(N, v)$ al conjunto de las asignaciones del juego.

Un concepto de solución para juegos cooperativos es una correspondencia que asocia a cada juego un conjunto no vacío de asignaciones del juego. En este trabajo utilizaremos como concepto de solución, el nucleolo (Schmeidler, 1969). Una buena revisión se puede ver en Maschler (1992).

El nucleolo del juego (N, v) se define como:

$$N(N, v) = \{\mathbf{x} \in I^*(N, v) | H_{2^n-2}(e(\mathbf{x}, S_1), e(\mathbf{x}, S_2), \ldots, e(\mathbf{x}, S_{2^n-2})) \leq_L$$

$$\leq_L H_{2^n-2}(e(\mathbf{y}, S_1), e(\mathbf{y}, S_2), \ldots, e(\mathbf{y}, S_{2^n-2})), \forall\, \mathbf{y} \in I^*(N, v)\},$$

donde $e(\mathbf{x}, S) = v(S) - x(S)$ es el exceso (descontento) del grupo S con el reparto $\mathbf{x}$. $H_{2^n-2} : \mathbb{R}^{2^n-2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2^n-2}$ es una correspondencia que ordena vectores de dimensión $2^n - 2$ en orden decreciente y $\leq_L$ significa no mayor con respecto al orden lexicográfico. Por la convexidad y compacidad del conjunto $I^*(N, v)$, el nucleolo es una asignación única (Owen, 1995).

Aumann y Maschler (1985) demuestran que la regla del Talmud aplicada en un contexto de bancarrota es el nucleolo del correspondiente juego. Serrano (1995)

[1] Denotamos por a_+ al máximo entre a y 0 donde $a \in \mathbb{R}$.

muestra que en un problema de reparto de beneficios, cuando $D < E$ el nucleolo asigna a cada jugador la cantidad de $x_i = c_i + \frac{E-D}{n}$ $(\forall\, i \in N)$, extendiendo con ello la regla del Talmud, en los problemas de reparto de beneficios, mediante un reparto igualitario del excedente.

En este trabajo presentamos una extensión de estas ideas al caso en que hay más de un vector de referencias.

3. PROBLEMAS DE REPARTO CON REFERENCIAS MÚLTIPLES

Un problema de reparto con referencias múltiples es una terna (N, E, C) donde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de agentes, $E \in \mathbb{R}_+$ es la cantidad que hay que repartir y $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es ahora una matriz de referencias. Esto significa que las características de los agentes dependen de m escenarios. Denotamos por $\mathcal{D}^N$ la clase de todos los problemas de reparto con un conjunto de n agentes. Obsérvese que si hay un único vector de referencias, entonces $\mathcal{D}^N = \mathcal{C}^N$.

Un ejemplo en el que se presenta este tipo de problemas de reparto es, por ejemplo, una situación de bancarrota en la que el estado es E pero, las reclamaciones de los acreedores obedecen a deudas en bonos y acciones que pueden tener distinto valor dependiendo del escenario de liquidación de éstos. En este caso cada elemento c_i^j de la matriz C representa la cantidad que el demandante i, $i = 1, \ldots, n$, reclama del estado, E, de acuerdo al escenario j, $j = 1, \ldots, m$.

Si se considera que no se pueden asignar probabilidades de ocurrencia a los distintos escenarios, una posibilidad es representar el problema (N, E, C) como m problemas de reparto escalares $(N, E, \mathbf{c}^j)$ $(\forall\, j = 1, \ldots, m)$, uno por cada escenario. Asociado a cada problema escalar se puede definir un juego (N, v^j) $(j = 1, \ldots, m)$, donde:

$$v^j(S) = \left(E - \sum_{i\notin S} c_i^j\right)_+ \quad \forall\, S \subset N,\ \forall\, j = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

La situación se representa por m juegos donde el valor de la coalición en cada escenario proporciona un punto de vista pesimista de lo que la coalición puede conseguir por sí misma. Para compensar de alguna manera, cada coalición podría considerar su situación más favorable en los distintos escenarios. Así la cantidad, E, puede dividirse entre los distintos jugadores teniendo en cuenta a cada coalición en el escenario más optimista. Bajo este enfoque asociado a cada problema de reparto con referencias múltiples (N, E, C), se puede definir el juego, (N, v^{max}), donde:

$$v^{max}(S) = \max_{j=1,\ldots,m} v^j(S),\ \forall S \subset N,\ S \neq \emptyset.$$

El nucleolo del juego (N, v^{max}), que denotamos por $N(N, v^{max})$ puede ser considerado como una solución para el problema de reparto con referencias múltiples $(N, E, C) \in \mathcal{D}^N$.

En el siguiente resultado se prueba que si se denota por $\underline{\mathbf{c}}$ al vector de componentes $\underline{c}_i = \min_{j=1,\ldots,m}\{c_i^j\}$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$ y se consideran cantidades a repartir de a lo sumo $\sum_{i=1}^n \underline{c}_i$, el nucleolo del juego (N, v^{max}) y la regla del Talmud con vector de demandas $\underline{\mathbf{c}}$, coinciden.

Teorema 3.1. *Si* $E \leq \sum_{i=1}^{n} \underline{c}_i$, *entonces se cumple que* $N(N, v^{max}) = T(N, E, \underline{\mathbf{c}})$.

La Figura 1 representa el *camino* que describen las asignaciones del nucleolo del juego (N, v^{max}) para el caso de dos agentes, según distintas cantidades a repartir. En (a) $\underline{c}_1 < \underline{c}_2$ y en (b) $\underline{c}_1 > \underline{c}_2$:

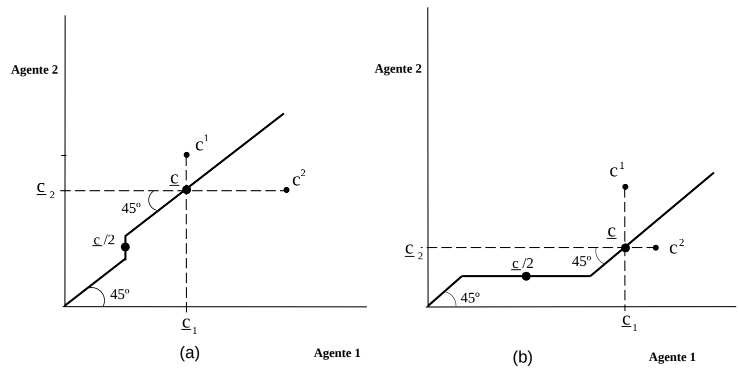

Figura 1: Camino de repartos del nucleolo del juego (N, v^{max}).

Obsérvese que los excedentes por encima de $\sum_{i=1}^{n} \underline{c}_i$ son repartidos según el nucleolo, $N(N, v^{max})$, a partes iguales. Es fácil probar que este resultado es cierto para problemas de reparto bipersonales, desafortunadamente no lo es en el caso de tres o más agentes. En estos casos los excedentes por encima de $\sum_{i=1}^{n} \underline{c}_i$ se reparten siguiendo unas determinadas proporcionalidades que van cambiando hasta recobrar el reparto igualitario a partir de un cierto nivel, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2. *Supongamos que hay tres escenarios y tres agentes:*

Tabla 1: Matriz de referencias.

Escenario	*Agente 1*	*Agente 2*	*Agente 3*
I	*3*	*9*	*10*
II	*15*	*7*	*5*
II	*6*	*8*	*2*

En la Tabla 2 se muestran los repartos que proporciona el nucleolo para distintas cantidades a repartir. Obsérvese que hasta una cantidad de 12 unidades, que corresponde a la suma de las referencias mínimas de todos los agentes ($\underline{c} = (3, 7, 2)$), el reparto que proporciona el nucleolo es el mismo que la regla del Talmud para el problema $(N, E, \underline{\mathbf{c}})$. Una vez superada dicha cantidad, el reparto del incremento por encima de $E = 12$ es igualitario hasta 16 unidades. A partir de ahí, los agentes 1, *2 y 3 reparten en la proporción 50 %, 25 % y 25 % respectivamente. Este reparto se mantiene hasta 18 unidades donde el reparto cambia al 50 %, 0 % y 50 %. El reparto vuelve a cambiar una vez repartida la unidad 20, recuperando de nuevo el 50 %, 25 % y 25 % del incremento. Por último, en 22 unidades se recupera el reparto igualitario, manteniéndose indefinidamente este reparto.*

Tabla 2: Reparto proporcionado por el nucleolo, $N(N, v^{max})$.

Cantidad	*Reparto*	*Cantidad*	*Reparto*
1	*(0.3333,0.3333,0.3333)*	*13*	*(3.3333,7.3333,2.3333)*
2	*(0.6667,0.6667,0.6667)*	*14*	*(3.6667,7.6667,2.6667)*
3	*(1,1,1)*	*15*	*(4,8,3)*
4	*(1.5,1.5,1)*	***16***	***(4.5,8.25,3.25)***
5	*(1.5,2.5,1)*	*17*	*(5,8.5,3.5)*
6	*(1.5,3.5,1)*	***18***	***(5.5,8.5,4)***
7	*(1.5,4.5,1)*	*19*	*(6,8.5,4.5)*
8	*(1.5,5.5,1)*	***20***	***(6.5,8.75,4.75)***
9	*(2,6,1)*	*21*	*(7,9,5)*
10	*(2.3333,6.3333,1.333)*	***22***	***(7.3333,9.3333,5.3333)***
11	*(2.6667,6.6667,1.6667)*	*23*	*(7.6667,9.6667,5.6667)*
12	***(3,7,2)***	*24*	*(8,10,6)*

4. CONCLUSIONES

Hemos diseñado una regla para los problemas de reparto con referencias múltiples, que tiene en cuenta la multidimensionalidad de las características de cada agente. Esta regla de reparto, es el nucleolo del juego de los máximos, que minimiza el máximo descontento de los agentes en todos los escenarios posibles. Nuestro principal resultado, es que hemos determinado la relación existente entre una regla clásica de reparto, como es la regla del Talmud y la solución que proponemos. Sin embargo, esta relación solo se mantiene en el caso de repartir una cantidad entre los agentes, a lo sumo como las referencias mínimas agregadas de éstos. Cuando se reparte una cantidad mayor, el comportamiento de nuestra regla cambia con respecto al caso escalar, puesto que el excedente no se divide igualitariamente entre los agentes, como cabría esperar. No obstante, hay dos situaciones en las que las asignaciones del nucleolo sí realizan un reparto igualitario más allá del nivel $\sum_{i=1}^{n} \underline{c}_i$: Por una parte, en los problemas de reparto con dos agentes y un número cualquiera de escenarios y por otro lado en problemas con un número cualquiera de agentes y de escenarios cuando la referencia mínima de todos los agentes se alcanza en el mismo escenario. Queda abierto el estudio de las propiedades de esta nueva regla de reparto.

5. ANEXO

Prueba del Teorema 3.1.

La expresión del descontento de las coaliciones S con respecto a cada asignación $\mathbf{x}$ es:

$$e^{max}(\mathbf{x}, S) = v^{max}(S) - x(S) = \text{máx}\{v^1(S), v^2(S), \ldots, v^m(S)\} - x(S) =$$

$$= \text{máx}\left\{\left(E - \sum_{i \notin S} c_i^1\right)_+, \left(E - \sum_{i \notin S} c_i^2\right)_+, \ldots, \left(E - \sum_{i \notin S} c_i^m\right)_+\right\} - (E - x(N \setminus S)) =$$

$$= \left(E - \min_{j=1,2,\ldots,m} \left\{\sum_{i \notin S} c_i^j\right\}\right)_+ - (E - x(N \setminus S)) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{i \notin S} x_i - \min_{j=1,2,\ldots,m} \sum_{i \notin S} c_i^j & \text{si } E - \min_{j=1,2,\ldots,m} \sum_{i \notin S} c_i^j > 0 \\ -\sum_{i \in S} x_i & \text{si } E - \min_{j=1,2,\ldots,m} \sum_{i \notin S} c_i^j \leq 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Consideramos que el vector de demandas es $\underline{\mathbf{c}}$, cuyas componentes son $\underline{c}_i = \text{mín}\{c_i^1, c_i^2, \ldots, c_i^m\}$ $(\forall\, i = 1, 2, \ldots, n)$. Vamos a renombrar a los jugadores, de forma que $\underline{c}_1 \leq \underline{c}_2 \leq \ldots \leq \underline{c}_n$, lo que no supone pérdida de generalidad. Para demostrar que el reparto, $\mathbf{T}(N, E, \underline{\mathbf{c}})$ (en lo que sigue simplemente $\mathbf{T}$), dado por la regla del Talmud es el nucleolo del juego (N, v^{max}), consideramos dos casos distintos, donde $\underline{c}_0 \equiv 0$:

Caso 1: Supongamos que la cantidad que se reparte es tal que:
$\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{\underline{c}_i}{2} + (n-k)\frac{\underline{c}_k}{2} \leq E \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{\underline{c}_i}{2} + (n-k)\frac{\underline{c}_{k+1}}{2}$, $0 \leq k \leq n-1$.
En este caso, para $i \leq n-1$, se cumple que $v^{max}(\{i\}) = 0$ puesto que:

$$E - \min_{j=1,2,\ldots,m} \sum_{l \neq i} c_l^j \leq E - \sum_{l \neq i} \underline{c}_l \leq \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\underline{c}_l}{2} + \frac{\underline{c}_n}{2} - \sum_{l \neq i} \underline{c}_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-2} \left(\frac{\underline{c}_l}{2} - \underline{c}_l \right) + \left(\frac{\underline{c}_{n-1}}{2} + \frac{\underline{c}_n}{2} - \underline{c}_n \right) + \left(\underline{c}_i - \underline{c}_{n-1} \right) \leq 0$$

La primera desigualdad se produce porque la suma de las demandas mínimas es siempre menor o igual que el mínimo de la suma de las demandas y la segunda desigualdad se cumple porque en el caso que estamos considerando $E \leq \sum_{l=1}^{n} \frac{\underline{c}_l}{2}$.
Además, para $k \leq n-2$, se verifica que $v^{max}(\{n\}) = 0$, esto es así porque:

$$E - \min_{j=1,2,\ldots,m} \sum_{l=1}^{n-1} c_l^j \leq E - \sum_{i=1}^{n-1} \underline{c}_i \leq \sum_{l=1}^{n-2} \frac{\underline{c}_i}{2} + 2\frac{\underline{c}_{n-1}}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \underline{c}_i = \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{\underline{c}_i}{2} - \underline{c}_i \right) \leq 0.$$

Para $i = 1, 2, \ldots, k$, se tiene que $v^{max}(N \setminus \{i\}) \geq 0$ puesto que:

$$E - \underline{c}_i \geq \sum_{l=1}^{k} \frac{\underline{c}_l}{2} + (n-k)\frac{\underline{c}_k}{2} - \underline{c}_i \geq \sum_{l=1}^{k} \frac{\underline{c}_l}{2} + (n-k)\frac{\underline{c}_k}{2} - \underline{c}_k \geq 0.$$

Por consiguiente, para una asignación $\mathbf{x}$ de la cantidad E entre los n agentes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} e^{max}(\mathbf{x}, \{i\}) = -x_i & \forall\, i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ e^{max}(\mathbf{x}, \{n\}) = -x_n & \text{si } \ k \leq n-2 \\ e^{max}(\mathbf{x}, N \setminus \{i\}) = x_i - \underline{c}_i & \forall\, i = 1, 2, \ldots, k \end{array} \right. \tag{4}$$

Consideramos la asignación $\mathbf{x} \neq \mathbf{T}$, y sea l, $1 \leq l \leq n-1$ el índice más bajo en el que $\mathbf{T}$ y $\mathbf{x}$ difieren.
Consideremos una coalición R tal que: $e^{max}(\mathbf{T}, R) > -T_l$.
Si $v^{max}(R) = 0$, entonces $-T_l < e^{max}(\mathbf{T}, R) = -\sum_{i \in R} T_i \leq -T_i$, para todo $i \in R$ y por tanto, si $i \geq l$, entonces $i \notin R$ ya que la regla del Talmud conserva el orden, es decir, asigna más a los jugadores con mayor demanda. Esto significa que $e^{max}(\mathbf{x}, R) = e^{max}(\mathbf{T}, R)$ porque $\mathbf{x}$ y $\mathbf{T}$ no difieren hasta la componente l-ésima.

Por otra parte, si $v^{max}(R) > 0$, entonces tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$-\frac{\underline{c}_n}{2} \leq -\frac{\underline{c}_{n-1}}{2} \leq \ldots \leq -\frac{\underline{c}_{l+1}}{2} \leq -\frac{\underline{c}_l}{2} \leq -T_l < e(\mathbf{T}, R) =$$

$$= \sum_{i \notin R} T_i - \min_{j=1,2,\ldots,m} \sum_{i \notin R} c_i^j \leq \sum_{i \notin R} \frac{\underline{c}_i}{2} - \sum_{i \notin R} \underline{c}_i = -\sum_{i \notin R} \frac{\underline{c}_i}{2} \leq -\frac{\underline{c}_i}{2},$$

donde la última desigualdad se produce para todo i que no pertenece a R. Si $i \geq l$, entonces $i \in R$ y de nuevo $e^{max}(\mathbf{x}, R) = e^{max}(\mathbf{T}, R)$.

Para cada exceso de $\mathbf{T}$ mayor que $-T_l$, existe un exceso idéntico para $\mathbf{x}$.

A continuación, demostraremos la existencia de coaliciones con un exceso respecto a la asignación, $\mathbf{T}$, propuesta por la regla del Talmud, igual a $-T_l$ y que tienen un exceso más grande con respecto a $\mathbf{x}$.

Supongamos primero que $l < k$.

Si $x_l < T_l$, entonces $e^{max}(\mathbf{x}, \{l\}) = -x_l > -T_l = e^{max}(\mathbf{T}, \{l\})$.

Por otro lado, si $x_l > T_l$, entonces $e^{max}(\mathbf{x}, N \setminus \{l\}) = x_l - \underline{c}_l > T_l - \underline{c}_l = \frac{-\underline{c}_l}{2} = -T_l = e^{max}(\mathbf{T}, N \setminus \{l\})$.

Supongamos que $l \geq k+1$ y por tanto $k \leq n-2$, ya que $l \leq n-1$.

Por eficiencia, existe un $l^* \geq k+1$ con $x_{l^*} < T_{l^*} = T_l$ y por eso $e^{max}(\mathbf{x}, \{l^*\}) = -x_{l^*} > -T_{l^*} = -T_l = e^{max}(\mathbf{T}, \{l^*\})$.

Con esto termina la demostración del Caso 1, concluyéndose que $\mathbf{T}$ es el nucleolo del juego (N, v^{max}).

Caso 2: Supongamos que la cantidad que se reparte es tal que:
$\sum_{i=1}^{n} \underline{c}_i - \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{\underline{c}_i}{2} + (n-k)\frac{\underline{c}_{k+1}}{2} \right) \leq E \leq \sum_{i=1}^{n} \underline{c}_i - \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{\underline{c}_i}{2} + (n-k)\frac{\underline{c}_k}{2} \right)$, $n-1 \geq k \geq 0$.

Para $i \leq k$ se cumple que $v^{max}(\{i\}) = 0$, puesto que:

$$E - \min_{j=1,2,\ldots,m} \sum_{l \neq i} c_l^j \leq E - \sum_{l \neq i} \underline{c}_l \leq \sum_{l=1}^{n} \underline{c}_l - \sum_{l=1}^{k} \frac{\underline{c}_l}{2} - (n-k)\frac{\underline{c}_l}{2} - \sum_{l \neq i} \underline{c}_l =$$

$$= -\sum_{l=1}^{k} \frac{\underline{c}_l}{2} - (n-k)\frac{\underline{c}_k}{2} + \underline{c}_i \leq -\sum_{l=1}^{k} \frac{\underline{c}_l}{2} - (n-k)\frac{\underline{c}_k}{2} + \frac{\underline{c}_i}{2} + \frac{\underline{c}_k}{2} \leq 0.$$

Además para $i \leq n-1$ se tiene que $v^{max}(N \setminus \{i\}) \geq 0$ porque se verifica que:

$$E - \underline{c}_i \geq \sum_{l=1}^{n} \underline{c}_l - \sum_{l=1}^{k} \frac{c_l}{2} - (n-k)\frac{c_{k+1}}{2} - \underline{c}_i =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \frac{c_l}{2} + \sum_{l=k+1}^{n-2} \left(c_l - \frac{c_{k+1}}{2}\right) - \underline{c}_i - \underline{c}_{k+1} + \underline{c}_{n-1} + \underline{c}_n \geq 0.$$

Por consiguiente, para $\mathbf{x}$ una asignación de E entre los n agentes:

$$\begin{cases} e^{max}(\mathbf{x}, \{i\}) = -x_i & \forall\, i = 1, 2, \ldots, k \\ e^{max}(\mathbf{x}, N \setminus \{i\}) = x_i - \underline{c}_i & \forall\, i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases} \tag{5}$$

Consideremos la asignación $\mathbf{x} \neq \mathbf{T}$ y l, $1 \leq l \leq n-1$ es el índice más pequeño en el que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{T}$ son distintos.

Consideremos una coalición R tal que $e^{max}(\mathbf{T}, R) > T_l - \underline{c}_l$.

Si $v^{max}(R) = 0$, entonces $T_l - \underline{c}_l < e^{max}(\mathbf{T}, R) = -\sum_{i \in R} T_i \leq -T_i \leq T_i - \underline{c}_i$ para todo $i \in R$ y además, si $i \geq l$, entonces $i \notin R$. La regla del Talmud conserva el orden en las pérdidas, ésto significa que $e^{max}(\mathbf{T}, R) = e^{max}(\mathbf{x}, R)$ porque $\mathbf{T}$ y $\mathbf{x}$ no son distintas hasta la componente l.

Por otra parte, si $v^{max}(R) > 0$, entonces $T_l - \underline{c}_l < e^{max}(\mathbf{T}, R) \leq \sum_{i \notin R}(T_i - \underline{c}_i) \leq T_i - \underline{c}_i$ para todo i que no pertenezca a R. Por lo tanto, si $i \geq l$, entonces $i \in R$ y de nuevo tenemos que $e^{max}(\mathbf{x}, R) = e^{max}(\mathbf{T}, R)$.

Para cada exceso de $\mathbf{T}$ más grande que $T_l - \underline{c}_l$, existe un exceso idéntico para $\mathbf{x}$.

Ahora vamos a comprobar la existencia de coaliciones con un exceso respecto a $\mathbf{T}$, igual a $T_l - \underline{c}_l$ y que tienen un exceso mayor con respecto a $\mathbf{x}$.

Empecemos suponiendo que $l \leq k$.

Si $x_l < T_l$, entonces $e^{max}(\mathbf{x}, \{l\}) = -x_l > -T_l = -\frac{c_l}{2} = \frac{c_l}{2} - \underline{c}_l = T_l - \underline{c}_l = e^{max}(\mathbf{T}, \{l\})$.

Por otra parte, si $x_l > T_l$, entonces $e^{max}(\mathbf{x}, N \setminus \{l\}) = x_l - \underline{c}_l > T_l - \underline{c}_l = e^{max}(\mathbf{T}, N \setminus \{l\})$.

Ahora suponemos que $l \geq k+1$.

En este caso por la condición de eficiencia, existe $l^* \geq k+1$ con $x_{l^*} > T_{l^*}$. Entonces se verifica que $e^{max}(\mathbf{x}, N \setminus \{l^*\}) = x_{l^*} - \underline{c}_{l^*} > T_{l^*} - \underline{c}_{l^*} = T_l - \underline{c}_l = e^{max}(\mathbf{T}, N \setminus \{l\})$.

Con esto termina la demostración del Caso 2, concluyéndose que **T** es el nucleolo del juego (N, v^{max}). □

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AUMANN R., MASCHLER M. (1985). "Game Theoretic Analysis of Bankruptcy Problem from the Talmud". Journal of Economic Theory, Vol. 36, pp. 195-213.

- CURIEL, I., MASCHLER, M., TIJS, S. (1987). "Bankruptcy Games". Zeitschrift für Operations Research, Vol. 31, pp. A143-A159.

- DUTTA, B., RAY, D. (1989). "A Concept of Egalitarianism under Participation Constraints". Econometrica, Vol. 57, pp. 615-635.

- FERNANDEZ, F., HINOJOSA, M., PUERTO, J. (2002b). "Core Solutions in Vector-Valued Games". Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 112, pp. 331–360.

- FERNANDEZ, F., HINOJOSA, M., PUERTO, J. (2004). "Set Valued TU-Games". European Journal of Operational Research, Vol. 159, pp. 181-195.

- HINOJOSA, M., MARMOL, A., THOMAS, L. (2005). "Core, Least Core and Nucleolus for Multiple Scenario Cooperative Games". European Journal of Operational Research, Vol. 164, pp. 225–238.

- MASCHLER, M. (1992). "The Bargaining Set, Kernel and Nucleolus ". In Handbook of Game Theory with Economics Applications (R.j. Aumann y S. Hart, Eds.) Vol. I. Amsterdam: Elservier Science Publishers.

- MOULIN, H. (1987). "Equal or Proportional Division of a Surplus, and Other Methods". International Journal of Game Theory, Vol. 16, pp. 161-186.

- O'NEILL, B. (1982). "Game Theoretic Analysis of Bankruptcy Problem from the Talmud". Mathematics Social Sciences, Vol. 2, pp. 345-371.
- OWEN, G. (1995). "Game Theory". Academic Press, San Diego, California.
- SCHMEIDLER, D. (1969). "The Nucleolus of a Characteristic Function Game". SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 16, pp. 1163-1170.
- SERRANO, R. (1995). "Strategic Bargaining, Surplus Sharing Problems and the Nucleolus". Journal of Mathematical Economics, Vol. 24, pp. 319-329.
- THOMSON, W. (2003). "Axiomatic and Game-Theoretic Analysis of Bankruptcy and Taxation Problems: a Survey". Mathematical Social Sciences, Vol. 45, pp. 249-297.
- YOUNG, P. (1988). "Distributive Justice in Taxation". Journal of Economic Theory, Vol. 44, pp. 321-335.
- YOUNG, P. (1990). "Progressive Taxation and Equal Sacrifice". American Economic Review, Vol. 80, pp. 253-266.