Construcción de Indices Ponderados Multicriterio con Información Ordinal

Ignacio Contreras Rubio
Miguel Ángel Hinojosa Ramos
Departamento de Economía y Empresa de la Universidad Pablo de Olavide
Carr. de Utrera Km. 1. Sevilla 41005
e-mail: iconrub@dee.upo.es, mahinram@dee.upo.es.

Amparo María Mármol Conde
Departamento de Economía Aplicada III de la Universidad de Sevilla
Avda. Ramón y Cajal s/n, Sevilla 41005
e-mail: amarmol@us.es

Resumen

El objetivo de este trabajo es establecer una metodología que permita construir índices para la evaluación de un conjunto de unidades, cuando se dispone de las valoraciones de éstas con respecto a varios criterios medidos en una escala ordinal. Con objeto de reflejar lo más fielmente posible los aspectos evaluados, en los índices compuestos que proponemos se incorpora la información disponible sobre la importancia relativa de los distintos criterios y sobre la importancia de las distintas categorías ordinales.

Palabras clave: Análisis de datos, ordenación, análisis multicriterio, información parcial.

Abstract

The goal of this paper is to present a general method to construct weighted indices for the evaluation of a set of unit with respect to multiple criteria, when they are measured by values in different rank positions of an ordinal scale.

The composite index that we propose takes into account the information available about the relative importance of being ranked in a certain position.

Keywords: Data analysis, ranking, multicriteria analysis, partial information.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se estudia la construcción de índices compuestos para la valoración global de un conjunto de alternativas cuando se dispone de valoraciones individuales con respecto a diferentes criterios medidos en una escala ordinal.

La metodología que proponemos permite una elección flexible de las ponderaciones asociadas a los valores de cada alternativa, y tiene en cuenta la posible información adicional sobre la importancia relativa de los distintos criterios, y de las distintas categorías de la escala ordinal. Es decir, elige los pesos más favorables para cada una de las alternativas valoradas individualmente, de entre los que se consideren razonables en el contexto informacional.

Este tipo de valoraciones individuales, en las que se optimizan las ponderaciones para cada alternativa sujetas a un conjunto de restricciones comunes, es ampliamente utilizado en la metodología DEA (Charnes et al., 1978). Se ha utilizado también esta idea en modelos de agregación de votos, (Cook and Kress, 1990; Hashimoto, 1997). También se han explorado sus posibilidades para el tratamiento de problemas de decisión multicriterio. En Cook y Kress (1996) se propone un índice de este tipo para un modelo multicriterio con datos cualitativos, donde se incorpora al problema la información ordinal sobre la importancia de los criterios. En Puerto et al. (2000) se hace un análisis general de los criterios de decisión clásicos en presencia de información adicional, lo que permite la construcción de índices de valoración de alternativas con datos cualitativos y/o cuantitativos, y que incluye como caso particular el índice de Cook y Kress.

En este trabajo partimos de las ideas expuestas en Puerto et al. (2000) para estudiar el caso concreto en que se dispone de las valoraciones medidas en una escala Likert, que un colectivo hace de un conjunto de unidades con respecto a distintos criterios y proponemos un modelo general que combina los modelos de agregación de votos y los modelos de decisión multicriterio con información parcial.

Analizamos distintos conjuntos de información, que representan distintas circunstancias de información disponible (o subyacente) sobre la importancia relativa de los distintos criterios, y sobre la importancia de la clasificación de las unidades en las distintas categorías ordinales. Esta metodología permite el tratamiento de un amplio rango de problemas de valoración y selección, que incluyen, entre otros, estudios de mercado sobre distintos productos, valoración de proyectos, y problemas de selección de personal por un comité.

El resto del trabajo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 establecemos el modelo general de índice ponderado que proponemos, en la Sección 3 se estudian los conjuntos de información que consideramos adecuados para la construcción de índices en este contexto, y se presenta la forma analítica de los índices bajo distintas hipótesis de información adicional. Los resultados expuestos se ilustran en la Sección 4, con un ejemplo numérico. El trabajo concluye con una Sección dedicada a las conclusiones y a las posibles extensiones del modelo.

2. MODELO DE ÍNDICE COMPUESTO

Consideramos N unidades a evaluar A_i, $i=1,\dots,N$, con respecto a K criterios o características, $\{C_k\}$, $k=1,\dots,K$. Se dispone de las valoraciones que de estas unidades hacen un conjunto de individuos con respecto a los K criterios, medidas en una escala ordinal con L posiciones.

Sea N_i el número total de individuos que valora la alternativa i, y sea n_{ikl} el porcentaje de votos que la alternativa A_i recibe en la categoría l, $l=1,\dots,L$, en su valoración respecto al criterio C_k. Esto es, cada individuo que valora la alternativa A_i, la sitúa en una cierta categoría de la escala con respecto a cada criterio, de tal forma que las primeras categorías significan valoraciones más favorables.

Suponemos que la valoración de cada alternativa se realiza mediante un índice compuesto, que consiste en una determinada ponderación de los porcentajes de voto n_{ikl}. Si se denota por w_k, la importancia relativa o ponderación asignada a la característica C_k y por v_{kl} la importancia de ser valorado en la categoría l respecto al criterio k la valoración de la alternativa A_i es:

$$R(A_i) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} w_k v_{kl} \cdot n_{ikl} \ . \tag{1}$$

Si es posible determinar exactamente los valores w_k, y v_{kl}, $k=1,...,K$, $l=1,...,L$, el índice está totalmente definido. Pero en la práctica, no siempre es posible, y a veces no es ni siquiera deseable, establecer exactamente el valor de la importancia relativa de los criterios y/o asignarle un valor numérico al hecho de tener valorada una unidad en una determinada posición de la escala. Sí es frecuente que se disponga de cierta información parcial sobre estas valoraciones, por ejemplo, la importancia asignada a la situación de una unidad en una posición superior en la escala no ha de ser menor que la importancia de estar situado en una posición inferior, o uno de los criterios de valoración ha de tener un peso mayor que otro. En estas condiciones, la información parcial disponible ha de incorporarse al procedimiento de construcción del índice para que éste proporcione una medida lo más ajustada posible de la valoración global de la alternativa.

El procedimiento que proponemos permite flexibilidad en la asignación de las ponderaciones, de tal forma que considera la valoración más favorable para cada unidad, es decir, los datos se van a agregar con aquellos valores de $v^k=(v_{k1},...,v_{kL})$ y de $w=(w_1,...,w_K)$, para los que $R(A_i)$ sea máximo de entre los que sean posibles.

Formalmente la valoración de A_i que proponemos, $v(A_i)$, consiste en:

$$\begin{aligned} v(A_i) = \quad & \underset{v^k, w}{Max} \quad \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} w_k v_{kl} \cdot n_{ikl} \quad . \\ & s.a. \quad v^k \in \Phi^k, k = 1,...,K \\ & \qquad\quad w \in \Omega \end{aligned} \tag{2}$$

donde en el conjunto Φ^k se recoge la información respecto a los pesos asociados a las L categorías con las que se evalúa el criterio k y en el conjunto Ω se recogen las condiciones que han de cumplir las ponderaciones asociadas a los diferentes criterios. Supondremos que estos conjuntos son poliédricos, y tales que $\Phi^k \subseteq \left\{ v^k \in R^L : \sum_{l=1}^{L} v_{kl} = 1, v^k \geq 0 \right\}$ y $\Omega \subseteq \left\{ w \in R^K : \sum_{k=1}^{K} w_k = 1, w \geq 0 \right\}$, es decir, consideramos pesos no negativos que suman la unidad.

El problema de valoración de cada alternativa, (2), es un problema no lineal. No obstante, debido a la separabilidad de las variables en los conjuntos de información, la solución puede obtenerse en dos etapas consistentes en la resolución de problemas lineales, como se describe a continuación.

En primer lugar, la alternativa A_i se evalúa con respecto a cada uno de los criterios. Si denotamos por $P_k^*(A_i)$ el valor del índice que para la alternativa A_i agrega las valoraciones obtenidas respecto al criterio C_k en la mejor situación posible, $P_k^*(A_i)$ se calcula como:

$$P_k^*(A_i) = \underset{v^k}{Max} \sum_{l=1}^{L} v_{kl} n_{ikl} . \qquad (3)$$
$$s.a. \quad v^k \in \Phi^k$$

Sean v_{kl}^*, $l=1,...,L$, los valores óptimos para las variables que se obtienen como solución del problema (3). Entonces, el problema (2) para la valoración global de la alternativa A_i consiste en:

$$v(A_i) = \underset{w}{Max} \sum_{k=1}^{K} w_k \sum_{l=1}^{L} v_{kl}^* n_{ikl} . \qquad (4)$$
$$s.a. \quad w \in \Omega$$

Esto es, la obtención de la valoración más favorable para cada alternativa pasa por la obtención previa de la valoración máxima de dicha alternativa respecto a cada uno de los criterios considerado individualmente para, posteriormente, agregar estas valoraciones con los pesos más favorables para cada criterio.

Los problemas (3) y (4) son problemas lineales. En general pueden resolverse utilizando procedimientos simpliciales, o el software actualmente disponible para la resolución de este tipo de problemas. Sin embargo, en los casos de los conjuntos de información que proponemos en este trabajo, es posible obtener la forma analítica de las soluciones sin necesidad de recurrir a métodos iterados, lo que permite construir los índices de valoración correspondientes.

La resolución de estos problemas que proponemos está basada en la obtención de los puntos extremos de los conjuntos de información. Es sabido que si un problema lineal tiene solución óptima, al menos un punto extremo del conjunto factible es óptimo. Por tanto si x^j, $j=1,...,J$, son los puntos extremos del conjunto factible, S, del problema lineal:

$$Max \quad c^t x . \qquad (5)$$
$$s.a \quad x \in S$$

la solución del problema se obtiene en el punto extremo en el que la función objetivo alcanza un valor más alto, es decir:

$$\underset{x \in S}{Max}\, c^t x = \underset{j=1,...,J}{Max}\, c^t x^j .$$

Por tanto, si es posible determinar los puntos extremos del conjunto factible, el problema se reduce a la evaluación de la función objetivo en cada uno de estos puntos.

En ciertos casos particulares, interesantes en este contexto, la estructura especial del conjunto factible, permite la obtención inmediata de sus puntos extremos. Si la información sobre los pesos puede representarse mediante relaciones lineales, el conjunto factible puede escribirse como $\left\{ x \in R^n : \sum_{k=1}^{n} x_k = 1, x \geq 0,\ Mx \geq \beta \right\}$, donde $M \in R_{L\times n}$ es la matriz que relaciona los pesos, y $\beta \in R^L$. En Carrizosa et al. (1995) se demuestra que si estas relaciones lineales son homogéneas, es decir, si la información sobre los pesos es de la forma $\left\{ x \in R^n : \sum_{k=1}^{n} x_k = 1, x \geq 0,\ Mx \geq 0 \right\}$, y la inversa de la matriz $M \in R_{n\times n}$ es no negativa, $M^{-1} \geq 0$, entonces los puntos extremos del conjunto factible son las columnas de M^{-1}, normalizadas para sumar la unidad. La obtención de los puntos extremos cuando las relaciones no son homogéneas, se estudia en Mármol et al. (1998), y Mármol et al. (2002).

La facilidad de interpretación de las relaciones lineales entre los pesos, así como la posibilidad de obtención de los puntos extremos de los conjuntos de información que inducen, hace que estos conjuntos tengan una amplia aplicación en los procesos decisionales.

A continuación hacemos uso de los resultados sobre los puntos extremos de los conjuntos de información, para establecer la forma analítica de los índices de valoración, bajo distintos supuestos de información sobre la importancia de las categorías ordinales, y sobre la importancia de los distintos criterios.

3. CONSTRUCCIÓN DE ÍNDICES CON INFORMACIÓN PARCIAL

En esta Sección analizamos los conjuntos de información que son significativos en el contexto del modelo que proponemos, tanto para la fase consistente en la valoración de la alternativa con respecto a los criterios, como para la fase de agregación de los criterios, y construimos los índices de valoración de alternativas que inducen.

3.1. Índices ponderados para cada criterio

La primera fase para la construcción del índice compuesto es la obtención de los valores óptimos del problema (3). Para cada criterio los valores dependerán de la forma concreta que adoptan los conjuntos de información Φ^k. Para ello analizaremos las posibilidades de definir índices para la valoración de las alternativas con respecto a cada criterio, partiendo de distintos conjuntos de información para este problema de agregación de votos de las distintas categorías.

En el caso en que se dispone de los datos clasificados en categorías ordinales, los conjuntos de información deben reflejar el carácter ordinal de éstas, es decir, al menos deben establecer una ordenación de las ponderaciones de manera que la ponderación que se asigna a las categorías más favorables no sea inferior a la asignada a las categorías inferiores, además de las ya mencionadas condiciones de no negatividad de los pesos y normalización para sumar la unidad.

A continuación analizamos las siguientes propuestas que son acordes o refinan este tipo de información.

3.1.1. Ordenación de las ponderaciones de las categorías

En primer lugar, consideramos como conjunto de información aquél que representa únicamente una ordenación de los pesos asociados a las diferentes categorías. Es decir, la ponderación asociada a cada categoría ha de ser mayor o igual a la que se asocia a la categoría siguiente. Este es el conjunto apropiado para la construcción del índice de valoración con respecto a un determinado criterio cuando no se hacen hipótesis adicionales respecto a la importancia relativa de ser clasificado en las distintas categorías.

El conjunto de información para el criterio k es, en este caso:

$$\Phi_1^k = \left\{ v^k \in R^L : v^k \geq 0, \sum_{l=1}^{L} v_{kl} = 1, v_{k1} \geq v_{k2} \geq \ldots \geq v_{kL} \right\}. \tag{6}$$

que puede escribirse como $\Phi_1^k = \left\{ v^k \in R^L : v^k \geq 0, \sum_{l=1}^{L} v_{kl} = 1,\ Mv^k \geq 0 \right\}$, donde la matriz M es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se sigue de la no negatividad de M^{-1}, que el conjunto Φ_1^k tiene L puntos extremos, dados por:

$$v^k(r) = \sum_{l=1}^{r} \frac{1}{r}(1,\cdots,\underset{r)}{1},0,\cdots,0)^t, \; r = 1,\cdots,L.$$

A partir de ellos se obtiene el valor óptimo de (3) cuando $v^k \in \Phi_1^k$, y el índice agregado para el criterio *k* es:

$$P_k^*(A_i) = \max_{r=1,\dots,L} \sum_{l=1}^{r} \frac{n_{ikl}}{r} \tag{7}$$

Obsérvese que $\sum_{l=1}^{r} \frac{n_{ikl}}{r}$ representa la suma acumulada de los porcentajes de votos de las *r* primeras categorías, partido por el número de categorías. Considerar como índice de valoración de la alternativa *i*-ésima el máximo de estos valores significa poder elegir entre considerar en la valoración todas las categorías de votos, o sólo algunas, las *r* primeras.

3.1.2. Tasas de sustitución marginal entre las categorías

Una segunda propuesta es fijar cotas inferiores a las tasas de sustitución marginal entre las valoraciones de las diferentes categorías. Supongamos que para el criterio *k*, m_{i+1} votos en la categoría *i*-ésima, se valoran al menos tanto como m_i votos en la categoría $i+1$. Esta situación se representa como $m_{i+1}v_{ki} \geq m_i v_{ki+1}$ y el conjunto de información toma la forma:

$$\Phi_2^k = \left\{ v^k \in R^L : v^k \geq 0, \sum_{l=1}^{L} v_{kl} = 1, v_{ki} \geq \tfrac{m_i}{m_{i+1}} v_{ki+1} \, , \, i = 1,2,\dots,L \right\}.$$

Las relaciones entre los pesos en este conjunto también pueden representarse mediante una matriz con inversa no negativa (ver Puerto et al. 2000), y se sigue que el valor óptimo de (3) cuando se considera como conjunto de información adicional Φ_2^k es igual a:

$$P_k^*(A_i) = \max_{r=1,\dots,L} \sum_{l=1}^{r} \tfrac{m_l}{m^r} n_{ikl} \, , \tag{8}$$

donde se denota por $m^i = \sum_{j=1}^{i} m_j , i = 1,\dots,L$.

Para el caso particular en el que se impone que cada categoría sea valorada al menos con el doble de la categoría siguiente, es decir, $v_l \geq 2v_{l+1}$, los valores de m_l se establecen como $m_l=2^{L-l}, l=1,\dots,L$.

3.1.3. Ordenación de ponderaciones con factores discriminantes

En esta tercera propuesta se establecen cotas inferiores sobre las diferencias de dos pesos sucesivos. Estas cotas aparecen referidas en la literatura como *factores* *discriminantes* (Cook y Kress, 1996). El conjunto de información adicional se representa como

$$\Phi_3^k = \left\{ v^k \in R^L : v^k \geq 0, \sum_{l=1}^{L} v_{kl} = 1, v_{kl} - v_{kl+1} \geq \alpha_l, \forall l = 1,\ldots,L-1; v_{kL} \geq \alpha_L \right\} \tag{9}$$

donde se supone que $\sum_{l=1}^{L} l\alpha_l < 1$ para asegurar que $\Phi_3^k \neq \varnothing$.

Denotamos por $\delta = 1 - \sum_{l=1}^{L} l\alpha_l$ y $\sigma = \left(\sum_{l=1}^{L} \alpha_l, \sum_{l=2}^{L} \alpha_l, \ldots, \alpha_{L-1} + \alpha_L, \alpha_L \right)$.

De los resultados expuestos en Puerto et al.(2000) se deduce que, en este caso, el valor óptimo de $P_k^*(A_i)$ es igual a:

$$P_k^*(A_i) = \sum_{l=1}^{L} \sigma_l n_{ikl} + \delta \max_{\mathrm{r}=1,\ldots,\mathrm{L}} \sum_{l=1}^{r} \frac{n_{ikl}}{r}. \tag{10}$$

3.1.4. Ordenación de las diferencias entre categorías

Proponemos ahora un nuevo conjunto de información, que ha sido considerado recientemente por Hashimoto (1997) en el contexto de los modelos DEA. Dicho conjunto de información representa, en nuestro modelo, un supuesto sobre la valoración de los votos en las diferentes categorías que resulta natural en muchos contextos, estableciendo que las diferencias de valoración de categorías sucesivas son decrecientes. Es decir, la intensidad con que se discrimina el valor de categorías sucesivas decrece conforme se consideran categorías menos valoradas.

$$\Phi_4^k = \left\{ v^k \in R^L : v^k \geq 0, \sum_{l=1}^{L} v_{kl} = 1, v_{kl} - v_{kl+1} \geq v_{kl+1} - v_{kl+2}, \forall l = 1,\ldots,L-2; v_{kL-1} - v_{kL} \geq v_{kL} \right\}.$$

Obsérvese que esta información implica la ordenación de las importancias relativas de las categorías.

A continuación se establece la forma analítica del índice ponderado, $P_k^*(A_i)$ para este conjunto de información.

Proposición 3.1. *La valoración de las alternativas con respecto al criterio k-ésimo con el conjunto de información* Φ_4^k *se obtiene como:*

$$P_k^*(A_i) = max\left\{ \max_{r=1,\ldots,(L)} \sum_{l=1}^{r} \frac{(r-l+1)n_{ikl}}{\frac{r(r+1)}{2}} \right\}. \tag{11}$$

Demostración. De la no negatividad de la inversa de la matriz que representa las relaciones homogéneas entre los pesos en este conjunto de información, se sigue que los puntos extremos de Φ_4^k son las columnas de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & \cdots & \frac{L-1}{\frac{L(L-1)}{2}} & \frac{L}{\frac{L(L+1)}{2}} \\ 0 & 1/3 & \cdots & \frac{L-2}{\frac{L(L-1)}{2}} & \frac{L-1}{\frac{L(L+1)}{2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\frac{L(L-1)}{2}} & \frac{2}{\frac{L(L+1)}{2}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\frac{L(L+1)}{2}} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

$P^*_k(A_i)$ es la solución del problema (3) con $v \in \Phi_4^k$, que se obtiene en aquel punto extremo donde se alcanza el máximo de la expresión $\sum_{l=1}^{L} v_{kl} n_{ikl}$, de donde se sigue el resultado. □

Obsérvese que este índice consiste en considerar los votos en cada categoría con ponderaciones como el método de las *marcas de Borda* (Borda, 1784), y que coincide también con el modelo estudiado en Kendall (1962). En este modelo se valora cada categoría con pesos $v_{kl} = \frac{(L-l+1)}{\frac{L(L+1)}{2}}$. La diferencia con el índice que se construye en la proposición anterior es que en este último se considera la posibilidad de considerar en la valoración solo los votos hasta una determinada categoría, esto es, elige la situación más favorable entre considerar todas las categorías de votos ó solo las *r* primeras.

3.2. Obtención del índice compuesto

Para la obtención del índice global ha de resolverse el problema (4) para cada alternativa. Los valores o utilidades asociados a los diferentes criterios para la alternativa A_i son, en este caso, los valores calculados en la anterior Sección, $P_k^*(A_i)$, $k=1,\ldots,K$.

Consideramos en este caso conjuntos de información de la forma

$$\Omega = \left\{ w \in R^K : w \geq 0, Aw \geq \beta, \sum_{k=1}^{K} w_k = 1 \right\}, \tag{13}$$

donde en la matriz $A \in M_{p \times k}$ se recogen las relaciones lineales entre los pesos de los distintos criterios.

Con las restricciones $Aw \geq \beta$ se incorpora la información adicional respecto a la importancia relativa de los diferentes criterios en la construcción del índice global. La forma concreta del conjunto Ω dependerá de la información que se tenga sobre la importancia relativa de los criterios, y de la forma de formalizar dichas preferencias. El rango de posibilidades va desde el caso en que no se dispone de información alguna, hasta los casos en que se dispone de información muy especializada, y por tanto el conjunto de ponderaciones donde se hace la elección es más restringido. En cualquier caso, la construcción del índice global depende tanto de los conjuntos de información Φ, como del conjunto Ω, como se estableció en (2).

En la sección siguiente se propondrán los índices compuestos que inducen los conjuntos de información sobre la importancia de las categorías y de los criterios, que nos parecen apropiados en la aplicación que presentamos.

4. APLICACIÓN

A continuación se ilustra el modelo con un ejemplo numérico. Consideramos un problema de ordenación de alternativas que siete candidatos son evaluados en función de cuatro criterios a través de puntuaciones en una escala ordinal con cinco categorías en las que las primeras son preferidas a las siguientes. Se desea valorar cada alternativa con una puntuación única que integre las valoraciones respecto a los cuatro criterios en los que se han valorado a las alternativas. Los porcentajes de votos agregados recibidos por cada alternativa en cada categoría se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1.- Porcentajes de voto agregados por categoría

	1	2	3	4	5
A	14,36%	55,85%	19,15%	10,64%	0,00%
B	12,29%	41,10%	21,61%	21,19%	3,81%
C	17,26%	52,38%	18,45%	11,90%	0,00%
D	16,18%	41,18%	23,53%	16,18%	2,94%
E	12,50%	47,32%	25,89%	13,39%	0,89%
F	7,14%	45,71%	21,43%	23,57%	2,14%
G	5,91%	52,73%	15,00%	23,64%	2,73%

4.1. Conjuntos de información sobre la importancia de las categorías ordinales

Para la primera agregación, hemos considerado los conjuntos de información analizados en la Sección 3. Todos ellos representan distintas maneras de refinar la información ordinal que se establece en Φ_1. En concreto se han analizado los siguientes casos:

Caso 1. Ordenación de la importancia de las categorías:

$$\Phi_1^k = \left\{ v^k \in R^5 : v^k \geq 0, \sum_{l=1}^{5} v_{kl} = 1, v_{k1} \geq v_{k2} \geq \ldots \geq v_{k5} \geq 0 \right\}$$

La valoración de las alternativas con respecto al criterio *k*-ésimo en este conjunto de información, se calcula como:

$$P_k^*(A_i) = \max_{r=1,\ldots,5} \sum_{l=1}^{r} \frac{n_{ikl}}{r}. \tag{14}$$

Caso 2. Tasas de sustitución marginal. Analizamos el caso en que un voto en una categoría es al menos tan importante como dos votos en la siguiente:

$$\Phi_2^k = \left\{ v^k \in R^5 : v^k \geq 0, \sum_{l=1}^{5} v_{kl} = 1, v_{k1} \geq 2v_{k2}, v_{k2} \geq 2v_{k3}, v_{k3} \geq 2v_{k4}, v_{k4} \geq 2v_{k5} \right\}$$

En este caso, la forma analítica del índice es:

$$P_k^*(A_i) = \max_{r=1,\ldots,5} \sum_{l=1}^{r} \frac{2^{5-l} n_{ikl}}{2^5 - 2^{5-r}}. \tag{15}$$

Caso 3. Ordenación con factores discriminantes. Se establecen los siguientes factores discriminantes en las diferencias de las categorías α=*(0'1,0'1,0'05,0'05,0'01)*.

El conjunto de información es:

$$\Phi_3^k = \{ v^k \in R^5 : v^k \geq 0, \sum_{l=1}^{5} v_{kl} = 1, v_{k1} - v_{k2} \geq 0'1, v_{k2} - v_{k3} \geq 0'1, v_{k3} - v_{k4} \geq 0'05,$$
$$v_{k4} - v_{k5} \geq 0'05, v_{k5} \geq 0'01 \}.$$

En este caso σ=*(0'31,0'21,0'11,0'06,0'01)*, y δ=*0'3*, por lo que el índice de valoración consiste en:

$$P_k^*(A_i) = \sum_{l=1}^{5} \sigma_l n_{ikl} + 0'3 \max_{r=1,\ldots,5} \sum_{l=1}^{r} \frac{n_{ikl}}{r}. \tag{16}$$

Caso 4. Ordenación de las diferencias entre ponderaciones de categorías sucesivas,

$$\Phi_4^k = \{ v^k \in R^5 : v^k \geq 0, \sum_{l=1}^{5} v_{kl} = 1, v_{kl} - v_{kl+1} \geq v_{kl+1} - v_{kl+2}, \forall l = 1,\ldots,3; v_{k4} - v_{k5} \geq v_{k5} \}.$$

El índice en este caso, se obtuvo anteriormente como:

$$P_k^*(A_i) = \max\left\{ \max_{r=1,\ldots,5} \sum_{l=1}^{r} \frac{(r-l+1)n_{ikl}}{\frac{r(r+1)}{2}} \right\}. \tag{17}$$

4.2. Conjuntos de información sobre la importancia de los distintos criterios

El conjunto de información para la segunda agregación, Ω, responde a las hipótesis previas sobre la importancia relativa de los criterios. Dependiendo de cómo sea esta información, es decir, de cómo se ponderen los diferentes criterios considerados, se obtendrán diferentes valores finales para el índice. Para nuestro estudio proponemos las siguientes posibilidades.

Caso 1. Considerar que no existen preferencias sobre la importancia de los criterios. Todos son considerados igualmente importantes. En este primer caso,

$$\Omega_1 = \left\{ w \in R^4 : w \geq 0, \sum_{k=1}^{4} w_k = 1 \right\}.$$

El índice final es el máximo de los índices por criterios antes calculados.

$$v(A_i) = \max_{K=1,\dots,4} P_k^*(A_i).$$

Caso 2. Se establecen cotas inferiores para los pesos, w_K, de manera que todos los criterios estén representados en el valor del índice final. El conjunto de información toma la forma:

$$\Omega_2 = \left\{ w \in R^4 : w \geq 0, \sum_{k=1}^{4} w_k = 1, w_k \geq \alpha_k, k = 1,\dots,4 \right\}, \tag{18}$$

con $\sum_{k=1}^{4} \alpha_k < 1$ para asegurar que $\Omega_2 \neq \emptyset$.

A partir de los resultados en (Mármol et al., 2002), puede obtenerse el valor de (4) como:

$$v(A_i) = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k P_k^*(A_i) + \left(1 - \sum_{k=1}^{4} \alpha_k \right) \max_{k=1,\dots,4} P_k^*(A_i). \tag{19}$$

Estudiaremos el caso en el que a todos los pesos se le impone la misma cota inferior, $\alpha_k=0.1$, $k=1,\dots,4$, la expresión (18) se transforma en:

$$v(A_i) = 0'1 \sum_{k=1}^{4} P_k^*(A_i) + 0'6 \max_{k=1,\dots,4} P_k^*(A_i). \tag{20}$$

Caso 3. Se supone que los criterios están ordenados por orden de importancia decreciente:

$$\Omega_3 = \left\{ w \in R^4 : \sum_{k=1}^{4} w_k = 1, w_1 \geq w_2, \geq w_3 \geq w_4 \geq 0 \right\}.$$

De forma análoga a lo establecido en la Sección 3.1.1., el índice global consiste en:

$$v(A_i) = \max_{r=1,\dots,4} \sum_{l=1}^{r} \frac{P_l^*(A_i)}{r}. \tag{21}$$

Caso 4. Consideramos en este caso que los criterios pueden clasificarse en dos grupos: un primer grupo en el que se incluyen los dos primeros criterios, y un segundo grupo, en el que se incluyen los dos últimos. Dentro de cada par, se considera más importante el primero de los criterios. El conjunto de información puede escribirse en este caso como:

$$\Omega_4 = \left\{ w \in R^4 : w \geq 0, \sum_{k=1}^{4} w_k = 1, w_1 \geq w_2 \geq 0, w_3 \geq w_4 \geq 0 \right\}.$$

La matriz de puntos extremos de Ω_4 es:

$$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad (22)$$

A partir de ella, se obtiene el índice correspondiente como:

$$v(A_i) = max\left\{ P_1^*(A_i), \frac{P_1^*(A_i) + P_2^*(A_i)}{2}, P_3^*(A_i), \frac{P_3^*(A_i) + P_4^*(A_i)}{2} \right\}.$$

Caso 5. En este caso, consideramos que los dos criterios del primer grupo son, conjuntamente, más importante que los referidos al segundo, también considerados conjuntamente. El conjunto de información es ahora:

$$\Omega_5 = \left\{ w \in R^4 : w \geq 0, \sum_{k=1}^{4} w_k = 1, w_1 + w_2 \geq w_3 + w_4 \geq 0 \right\}.$$

Por el procedimiento presentado en Mármol et al. (2002), se obtiene la matriz de puntos extremos de Ω_5 es:

$$L_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

y la valoración que induce es:

$$v(A_i) = \max\left\{ P_1^*(A_i), P_2^*(A_i), \frac{P_1^*(A_i) + P_3^*(A_i)}{2}, \frac{P_1^*(A_i) + P_4^*(A_i)}{2}, \frac{P_2^*(A_i) + P_3^*(A_i)}{2}, \right.$$

$$\left. \frac{P_2^*(A_i) + P_4^*(A_i)}{2} \right\}.$$

4.3. Resultados

Combinando los conjuntos de información correspondientes a las dos agregaciones pueden construirse índices compuestos diferentes. Los resultados para las valoraciones de las alternativas se resumen en la Tabla 2, incluyendo tanto el valor numérico del índice, como la posición relativa que ocupa dentro del grupo (valor entre paréntesis).

Se muestran también los resultados obtenidos al aplicar el conocido procedimiento de las *Marcas de Borda*, a la valoración de las alternativas con respecto a los criterios, que denotamos como Φ_5. El método de Borda puede verse como un caso particular de construcción de índices para valorar el criterio *k*-ésimo, cuando $\Phi^k = \{v^k\}$, con $v_{kl} = \frac{2(L-l+1)}{L(L+1)}, l = 1,...,L$.

Obsérvense las relaciones de inclusión que hay entre los conjuntos de información. Con respecto a los conjuntos Φ, se tienen las siguientes relaciones: $\Phi_4 \subseteq \Phi_1$, $\Phi_2 \subseteq \Phi_4$, $\Phi_3 \subseteq \Phi_4$ también $\Phi_5 \subseteq \Phi_4$. Por tanto, los conjuntos Φ_3, Φ_2, así como Φ_5, que corresponde al método de Borda, representan la información más especializada sobre la importancia relativa de las categorías ordinales. Los distintos casos de información sobre importancia relativa de los criterios están relacionados así: $\Omega_2 \subseteq \Omega_1, \Omega_3 \subseteq \Omega_4, \Omega_3 \subseteq \Omega_5$.

Tabla 2.- Índices finales y ordenaciones combinando los conjuntos de información

	Φ_1				
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
A	0,447 (2)	0,412 (2)	0,372 (1)	0,388 (3)	0,410 (1)
B	0,424 (3)	0,381 (3)	0,316 (6)	0,424 (2)	0,342 (3)
C	0,464 (1)	0,421 (1)	0,356 (2)	0,429 (1)	0,381 (2)
D	0,382 (5)	0,356 (5)	0,316 (5)	0,368 (5)	0,338 (4)
E	0,393 (4)	0,365 (4)	0,323 (4)	0,384 (4)	0,333 (6)
F	0,329 (7)	0,311 (7)	0,329 (3)	0,329 (7)	0,329 (7)
G	0,364 (6)	0,337 (6)	0,315 (7)	0,364 (6)	0,336 (5)
	Φ_2				
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
A	0,383 (2)	0,345 (2)	0,291 (2)	0,326 (3)	0,337 (1)
B	0,373 (3)	0,320 (3)	0,240 (5)	0,373 (2)	0,281 (4)
C	0,421 (1)	0,370 (1)	0,295 (1)	0,377 (1)	0,321 (2)
D	0,353 (4)	0,315 (4)	0,258 (3)	0,315 (5)	0,304 (3)
E	0,321 (5)	0,295 (5)	0,256 (4)	0,321 (4)	0,265 (5)
F	0,276 (7)	0,250 (7)	0,219 (7)	0,239 (7)	0,248 (7)
G	0,297 (6)	0,266 (6)	0,232 (6)	0,297 (6)	0,258 (6)
	Φ_3				
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
A	0,358 (2)	0,334 (2)	0,305 (1)	0,319 (3)	0,331 (1)
B	0,344 (3)	0,309 (3)	0,256 (7)	0,344 (2)	0,285 (4)
C	0,374 (1)	0,344 (1)	0,298 (2)	0,349 (1)	0,315 (2)
D	0,328 (4)	0,304 (4)	0,267 (4)	0,313 (5)	0,294 (3)
E	0,317 (5)	0,299 (5)	0,272 (3)	0,316 (4)	0,278 (6)
F	0,267 (7)	0,257 (7)	0,264 (5)	0,264 (7)	0,266 (7)
G	0,296 (6)	0,277 (6)	0,261 (6)	0,296 (6)	0,278 (5)
	Φ_4				
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
A	0,383 (2)	0,349 (2)	0,298 (2)	0,326 (4)	0,340 (1)
B	0,373 (3)	0,334 (3)	0,274 (4)	0,373 (2)	0,299 (4)
C	0,421 (1)	0,376 (1)	0,309 (1)	0,377 (1)	0,334 (2)
D	0,353 (4)	0,323 (4)	0,278 (3)	0,328 (3)	0,304 (3)
E	0,321 (5)	0,301 (5)	0,271 (5)	0,321 (5)	0,279 (5)
F	0,276 (7)	0,262 (7)	0,248 (7)	0,257 (7)	0,262 (7)
G	0,297 (6)	0,276 (6)	0,254 (6)	0,297 (6)	0,273 (6)
	Φ_5				
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
A	0,275 (2)	0,265 (2)	0,252 (1)	0,258 (5)	0,264 (1)
B	0,268 (3)	0,251 (5)	0,225 (7)	0,268 (2)	0,242 (4)
C	0,283 (1)	0,270 (1)	0,250 (2)	0,272 (1)	0,257 (2)
D	0,267 (4)	0,254 (3)	0,234 (4)	0,261 (3)	0,249 (3)
E	0,260 (5)	0,251 (4)	0,238 (3)	0,260 (4)	0,242 (5)
F	0,240 (7)	0,233 (7)	0,230 (6)	0,232 (7)	0,235 (7)
G	0,244 (6)	0,236 (6)	0,233 (5)	0,244 (6)	0,238 (6)

Para nuestro caso concreto, nos parece apropiado resaltar el índice que inducen los conjuntos de información (Φ_4, Ω_3). La valoración de las alternativas a partir de esta medida supone aceptar la ordenación de la importancia de las categorías con diferencias decrecientes entre categorías sucesivas y que supondría aplicar sucesivamente el *método de las marcas de Borda* tomando el valor más alto entre aplicar el método a todas las categorías de la escala o a las r primeras. Con respecto a los criterios se ordenan de manera simple. En cuanto a la ordenación final de alternativas, obsérvese que, en este caso, con las mismas hipótesis previas sobre la importancia de los criterios, la ordenación obtenida difiere bastante de la obtenida cuando se aplica el procedimiento de Borda, que es el que normalmente se utiliza en las aplicaciones para obtener valoraciones de las alternativas con información ordinal.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se aporta una metodología para la construcción de índices ponderados para la valoración global de un conjunto de unidades, cuando se dispone de valoraciones individuales sobre varios criterios medidos en una escala ordinal.

En la construcción del índice se permite incorporar información adicional sobre la importancia de los criterios, y sobre la importancia asignada a las diferentes categorías de la escala ordinal. Se analizan distintos conjuntos de información que permitirán el tratamiento de un amplio rango de problemas decisionales de valoración y ordenación de alternativas.

Una vez especificados los conjuntos de información que son adecuados en cada situación, los cálculos asociados al tratamiento de la información se realizan fácilmente, pues consisten en tomar sucesivamente el máximo de las sumas ponderadas de las valoraciones de las alternativas proporcionadas por los individuos. Por tanto esta técnica combina la ventaja que conlleva el ajustar el procedimiento a cada contexto informacional, con la aplicabilidad derivada del poco esfuerzo computacional que requiere.

REFERENCIAS

Borda, J.C., (1784). "Mémoire sur les Élections au Scrutin''. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*.

Carrizosa, E., Conde, E., Fernández, F.R., Puerto, J. (1995). "Multicriteria Analysis with Partial Information". *European Journal of Operational Research* 81(2), pp. 391-401.

Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978). "Measuring Efficiency of Decision Making Units". *European Journal of Operational Research* 2, pp. 429-444.

Cook W.D., Kress M. (1990). "A Data Envelopment Model for Aggregating Preference Ranking". *Management Science* vol. 36(11), pp. 1302-1310.

Cook W.D., Kress M. (1996). "An Extreme-Point Approach for Obtaining Weighted Ratings in Qualitative Multicriteria Decision Making". *Naval Research Logistics* vol. 43, pp. 519-531.

Hashimoto, A. (1997). "A Ranked Voting System Using DEA/AR Exclusion Model: A note" *European Journal of Operational Research* 97, pp. 600-604.

Kendall, M. (1962). *Rank correlation Methods* 3rd. Ed. Hafner, Nueva York. (2), pp. 291-301.

Mármol, A.M., Puerto, J., Fernández, F.R., (1998). "The Use of Partial Information on Weights in Multicriteria Decision Problems". *Journal of Multicriteria Decision Analysis* 7, pp. 322-329.

Mármol, A.M., Puerto, J., Fernández, F.R., (2002). "Sequential Incorporation of Imprecise Information in Multiple Criteria Decision Processes". *European Journal of Operational Research* 137(1), pp. 123-133.

Puerto J., Mármol A.M., Monroy L., Fernández F.R. (2000). "Decision Criteria with Partial Information". *International Transactions in Operational Research*, n.7, pp.51-65.