

THE INDUCED OSCILLATIONS OF FLEXIBLE PRESTRESSED ELEMENTS OF STRUCTURES (SYMMETRICAL SYSTEM)

M. I. Kazakevič & V. E. Volkova

To cite this article: M. I. Kazakevič & V. E. Volkova (2000) THE INDUCED OSCILLATIONS OF FLEXIBLE PRESTRESSED ELEMENTS OF STRUCTURES (SYMMETRICAL SYSTEM), *Statyba*, 6:1, 55-59, DOI: [10.1080/13921525.2000.10531564](https://doi.org/10.1080/13921525.2000.10531564)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/13921525.2000.10531564>



Published online: 26 Jul 2012.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 54

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГИБКИХ ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

М. И. Казакевич, В. Е. Волкова

1. Предисловие

Представлены результаты аналитического и численного исследований вынужденных колебаний предварительно напряженных гибких элементов конструкций. Рассмотрены два случая центрального предварительного напряжения: без промежуточного крепления затяжки к гибкому элементу и с промежуточным креплением в середине длины элемента. Рассматриваемая физическая модель, помимо гибких элементов, применима к гибким пологим оболочкам и аркам, мембранам, большим космическим антенным полям (БКАП).

Исследуемые системы при определенных соотношениях физических параметров имеют несколько несмежных форм равновесия. Переход от одной устойчивой формы равновесия к другой, несмежной, форме происходит скачкообразно. В этом случае они называются системами с “перескоком”, или системами с двумя потенциальными “ямами”. Отличительной особенностью данного класса систем является возможность существования несмежных устойчивых режимов колебаний при фиксированной частоте возмущения. Возможность реализации того или иного устойчивого режима колебаний сложным образом зависит от начальных условий [1]. Численное моделирование вынужденных колебаний систем с “перескоком” подробно обсуждалось в работе [2].

2. Анализ вынужденных колебаний системы

Вынужденные колебания систем с “перескоком” описываются нелинейным дифференциальным уравнением типа Дуффинга:

$$\ddot{\phi} + \epsilon \dot{\phi} - \alpha \phi + \beta \phi^3 = P_1 \cos(\omega t + \theta), \quad (1)$$

где ϕ – обобщенная координата поперечных перемещений средней по длине стержня точки; ϵ – коэффициент демпфирования; α, β – коэффициенты, опре-

деляющие характер восстанавливающей силы $R(\phi) = -\alpha\phi + \beta\phi^3$; P_1, ω – параметры внешнего возмущения.

Отметим, что при свободных колебаниях ($P_1 = 0$) [1] система (1) имеет три положения равновесия, два из которых $\phi_{b,c} = \pm \sqrt{\alpha/\beta}$ – устойчивы, а третье – промежуточное $\phi_a = 0$ – неустойчиво.

Известно, что в зависимости от значения потенциальной энергии возможно существование одного из трех устойчивых режимов колебаний (рис. 1): а) “большие” колебания относительно всех трех положений равновесия (точки *a*, *b* и *c*); б) “малые” колебания относительно левого положения равновесия (точка *b*); в) “малые” колебания относительно правого положения равновесия (точка *c*). При этом “большие” колебания обладают свойствами жесткой системы, а “малые” колебания – свойствами мягкой системы.

3. Аналитическое исследование вынужденных колебаний

3.1. “Большие” колебания

Ранее отмечалось, что “большие” колебания в пределах широкого диапазона частот возмущения ω имеют явно выраженный установившийся характер моногармонического процесса на основной частоте. Это позволяет утверждать, что приближенное решение может дать достоверную оценку областей параметров системы, в которых имеют место “большие” колебания.

Решение уравнения (1) будем искать в виде:

$$\phi = A \cos \omega t. \quad (2)$$

Для получения приближенного решения используем метод гармонического баланса. Подставляя выражение (2) в уравнение (1) и применяя известные тригонометрические преобразования, получим следующее

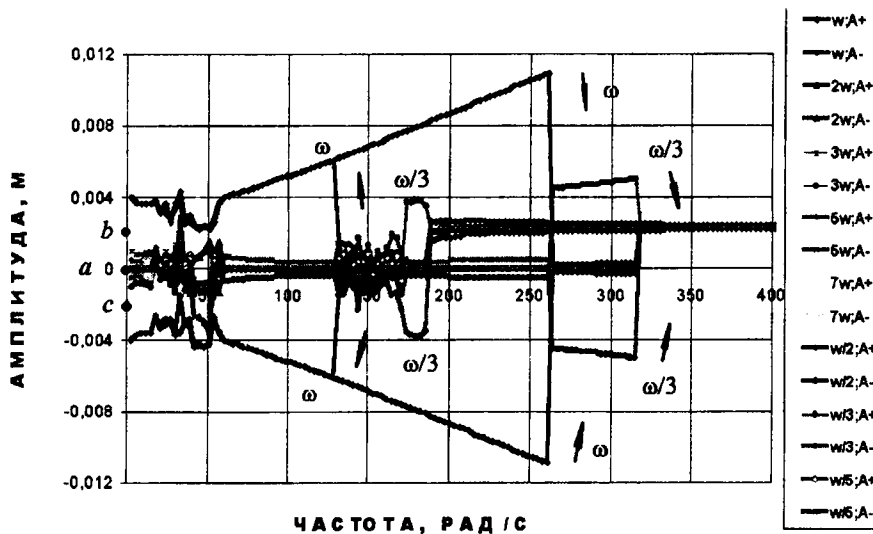


Рис. 1. Влияние ультра- и субгармонических составляющих на характер колебаний в симметричных системах с "перескоком". $\alpha = 40,81/c^2$; $\beta = 76600001/m^2 c^2$; $\epsilon = 0,51/c$; $P_1 = 0,15m/c^2$

Fig 1. Influence of ultra and subharmonic elements on the character of oscillations in symmetrical systems

выражение для определения собственной частоты "больших" колебаний:

$$\omega_*^2(A) = -\alpha + \frac{3}{4}\beta A^2 \quad \text{при} \quad A^2 > \frac{4\alpha}{3\beta}. \quad (3)$$

Таким образом, собственная частота линеаризованной системы является действительной лишь при достаточно больших значениях амплитуды.

Значение фазового угла и частоты вынужденных колебаний системы определяются зависимостями:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\epsilon \omega}{\omega_*^2(A) - \omega^2} = \frac{\epsilon \omega}{-\alpha + \frac{3}{4}\beta A^2 - \omega^2}, \quad (4)$$

$$\omega^2 = \omega_*^2(A) - \frac{\epsilon^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\epsilon^4}{4} - \epsilon^2 \omega_*^2(A) + \left(\frac{P_1}{A}\right)^2}. \quad (5)$$

В случае малого демпфирования уравнение (5) может быть приведено к виду:

$$\omega^2 = \omega_*^2(A) \pm \sqrt{\left(\frac{P_1}{A}\right)^2 - \epsilon^2 \omega_*^2}. \quad (6)$$

Дифференцируя по частоте и амплитуде уравнение (5) и приравнявая полученные производные к нулю, получим уравнения кривых, ограничивающих области неустойчивых "больших" колебаний основного тона:

$$\omega_1 = \sqrt{-\alpha + \frac{3}{4}\beta A^2 - \frac{\epsilon^2}{2}}, \quad (7a)$$

$$\omega_2 = \sqrt{-\alpha + \frac{3}{4}\beta A_s^2 + \frac{2P_1^2}{3\beta A_s^4}}. \quad (7b)$$

3.2. "Малые" колебания

Вынужденные колебания относительно точек *b* и *c* описываются дифференциальным уравнением вида:

$$\ddot{\bar{\phi}} + \epsilon \dot{\bar{\phi}} + 2\alpha \bar{\phi} \pm 3\sqrt{-\alpha\beta} \bar{\phi}^2 + \beta \bar{\phi}^3 = P_1(\cos \omega t + \theta), \quad (8)$$

где $\bar{\phi} = \bar{\phi} \pm \sqrt{\alpha/\beta}$.

Известно, что "малые" колебания в резонансных диапазонах частот ω имеют явно выраженный установившийся характер моногармонического процесса на основной частоте.

Решение уравнения (8) будем искать в виде:

$$\bar{\phi} = A_s \cos \omega_s t. \quad (9)$$

Применив метод гармонического баланса и выполнив преобразования, аналогичные приведенным выше, получим выражения для фазового угла и частоты вынужденных колебаний:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\epsilon \omega_s}{\omega_*^2(A_s) - \omega_s^2} = \frac{\epsilon \omega_s}{2\alpha + \frac{3}{4}\beta A_s^2 - \omega_s^2}, \quad (10)$$

$$\omega_s^2 = 2\alpha + \frac{3}{4}\beta A_s^2 - \frac{\epsilon^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} - \epsilon^2 \left(2\alpha + \frac{3}{4}\beta A_s^2\right) + \left(\frac{P_1}{A_s}\right)^2}, \quad (11)$$

где собственная частота “малых” колебаний для симметричных систем определяется выражением:

$$\omega_s^2(A) = 2\alpha + \frac{3}{4}\beta A_s^2. \quad (13)$$

В случае малого демпфирования выражение (13) может быть преобразовано к виду:

$$\omega_s^2 = 2\alpha + \frac{3}{4}\beta A_s^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P_1}{A_s}\right)^2 - \varepsilon^2 \left(2\alpha + \frac{3}{4}\beta A_s^2\right)} \quad (14)$$

Области неустойчивых “малых” колебаний ограничены кривыми, описываемыми следующими уравнениями:

$$\omega_{1s} = \sqrt{2\alpha + \frac{3}{4}\beta A_s^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}}, \quad (15 а)$$

$$\omega_{2s}^2 = \sqrt{2\alpha + \frac{3}{4}\beta A_s^2 + \frac{2P_1^2}{3\beta A_s^4}}. \quad (15 б)$$

4. Алгоритм и методика численного эксперимента

Для получения на ЭВМ численного решения уравнения (1) была создана программа. В основу процедуры численного моделирования был предложен метод Рунге–Кутты 4-го порядка. Учитывая сложный характер колебаний нелинейных систем, описываемых уравнением (1), шаг интегрирования Δt выбирался в диапазоне $T/250 \leq \Delta t \leq T/150$, где $T = 2\pi/\omega$ – период гармонической составляющей внешнего воздействия. Выполнение этого условия обеспечивало устойчивость процедуры численного решения уравнения (1) при всех рассмотренных вариантах значений его коэффициентов. Учитывая возможность возникновения многотонных колебаний, был предусмотрен блок спектрального анализа. Для определения амплитуд этих гармонических составляющих был использован алгоритм Герцеля.

5. Результаты аналитического и численного моделирования вынужденных колебаний при гармоническом нагружении

Исследуем вынужденные колебания модели элемента больших космических антенн. Положим, что расчетная схема исследуемой системы может быть представлена в виде стального однородного стержня длиной $l = 3 м$, с поперечным сечением $b \times h = 0,3 \times 0,004 м$, с затяжкой, которая крепится к центрам крайних поперечных сечений. Натяжение затяжки

$N^* = 720 Н$. Опирающие стержня шарнирные. В соответствии с [3] коэффициенты α и β принимают следующие значения $\alpha = 40,8 1/c^2$, $\beta = 7660000 1/(мс)^2$.

Исследуемая система имеет три положения равновесия, два из которых устойчивые $y_{b,c} = \pm 0,0023 м$ и третье – среднее – неустойчивое $y_a = 0$. Бифуркационные точки разделяют зоны существования “больших” и “малых” колебаний [3].

Параметр демпфирования ε и амплитуда гармонического нагружения P_1 в вычислительном эксперименте принимали следующие значения: $\varepsilon = 0,1; 0,5; 1,0 с^{-1}$; $P_1 = 0,15; 0,3; 1,5 мс^{-2}$. Частота ω изменялась в пределах $\omega_{на} \leq \omega \leq \omega_{кон}$ с шагом $\Delta\omega = 1 рад/с$.

Анализ результатов численного интегрирования показал, что при увеличении частоты система вначале совершает “большие” колебания вплоть до так называемой “частоты срыва” $\omega_{ср}$, после которой устанавливается режим “малых” колебаний. Значение частоты $\omega_{ср}$ естественно зависит от коэффициента демпфирования и уменьшается с его ростом. При уменьшении частоты реализуются “малые” колебания вокруг одного из устойчивых положений равновесия, а затем при некотором значении частоты $\omega_{уст} < \omega_{ср}$ устанавливается режим “больших” колебаний. С увеличением значения параметра демпфирования ε диапазон $(\omega_{ср} - \omega_{уст})$ многозначности амплитуд основного тона установившихся колебаний систем с прощелкиванием уменьшается, как и в случае жестких нелинейных систем Дуффинга.

Следует отметить, что при “прямом” проходе, когда ω равно или несколько больше $\omega_{ср}$, доминируют субгармонические колебания с частотой $\omega/3$, амплитуды которых существенно больше амплитуд основного тона (см. рис. 1), т.е. переход от “больших” колебаний основного тона к “малым” происходит не мгновенно, а через субгармонические тона с частотой $\omega/3$.

Аналогичная картина наблюдается при “обратном” проходе с той лишь разницей, что доминирующие субгармонические колебания возникают с частотой $\omega/2$ и это явление наступает незадолго до момента установления режима “больших” колебаний основного тона.

Результаты моделирования показали, что в некоторых диапазонах частот именно начальные условия определяют реализацию того или иного устойчивого режима колебаний. Для прогнозирования динами-

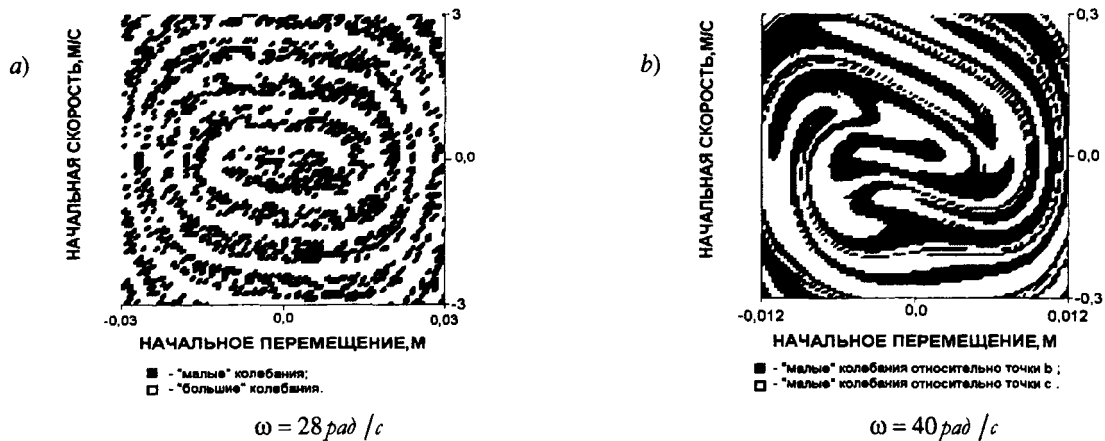


Рис. 2. Области притяжения устойчивых режимов колебаний. $\alpha = 40,8c^{-2}$; $\beta = 7660000m^2c^2$; $\epsilon = 4,0c^{-1}$; $P_1 = 1,5mc^{-2}$

Fig 2. Regions of attraction of stable regimes of oscillations

ческого поведения преднапряженных стержней было разработано программное обеспечение для построения зон притяжения установившихся режимов колебаний. Данная программа позволяет анализировать, какой из трех режимов колебаний реализуется при заданных начальных условиях: а) «большие» колебания; б) «малые» колебания относительно точки b ; в) «малые» колебания относительно точки c .

На рис. 2 представлены полученные области притяжения начальных условий установившихся режимов для колебаний в резонансной и зарезонансной зонах. Графики имеют сложную конфигурацию в виде раскручивающейся спирали. При этом чередование зон по мере удаления от центра увеличивается, а сами они сужаются. Следует отметить, что границы зон негладкие (фрактальные).

На рис. 3 приведено сопоставление аналитического исследования и численного моделирования, а также «скелетные» кривые для модели преднапряженного элемента. Анализируя рис. 1, можно утверждать, что для широкого диапазона частот аппроксимация решения уравнения (1) гармоникой основного тона дает удовлетворительную информацию о поведении системы.

6. Выводы

Получены аналитические и численные решения дифференциального уравнения (1) вынужденных колебаний предварительно напряженных гибких элементов конструкций для случаев «малых» и «больших» колебаний.

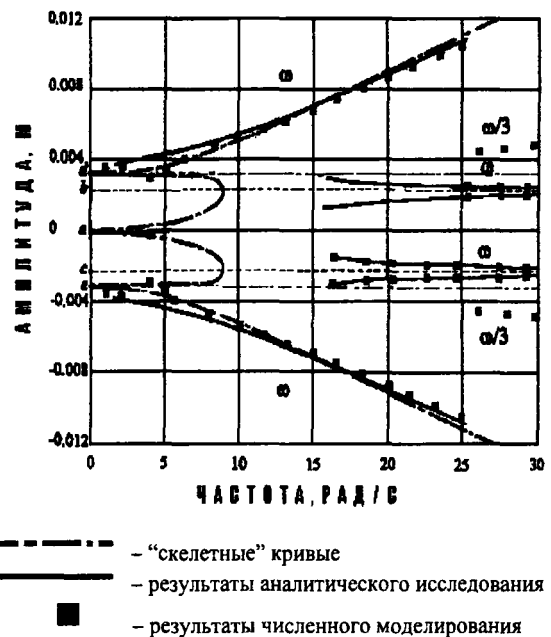


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики системы (1). $\alpha = 40,8c^{-2}$, $\beta = 7660000(mc)^{-2}$, $\epsilon = 0,5c^{-1}$, $P_1 = 0,15mc^{-2}$

Fig 3. Amplitude-frequency characteristics of the system (1)

При увеличении частоты исследуемая система вначале совершает «большие» колебания вплоть до так называемой частоты срыва ω_{cr} , после которой устанавливается режим «малых» колебаний. Значение частоты ω_{cr} зависит от коэффициента демпфирования. При уменьшении частоты реализуются малые колебания вокруг одного из устойчивых положений равновесия, а затем уже устанавливается режим «больших» колебаний.

Literatūra

1. М. И. Казакевич, Э. Н. Кваша, С. Ф. Редько. Влияние начальных условий на характер установившихся колебаний систем с нелинейной восстанавливающей силой // Математическая физика. Вып. 15. Киев: Наукова думка, 1974, с. 59–62.
2. М. И. Казакевич, С. Ф. Редько, В. Е. Волкова. Вынужденные колебания преднапряженных стержней // Тр. междунар. конф. "Теория и практика металлических конструкций". Том 1. Донецк: Изд-во Донецкой государственной строительной академии, 1997, с. 15–20.
3. М. И. Казакевич, В. Е. Волкова. Точное решение свободных колебаний преднапряженных стержней // Proc. of 5-th International Conference "Modern Building Materials, Structures and Techniques", Vol 3. Vilnius: Technika, 1997, p. 145–150.

Įteikta 1999 08 0 8

IS ANKSTO ITEMPŲ LIAUNŲ KONSTRUKCIJOS ELEMENTŲ PRIVERSTINIAI SVYRAVIMAI

M. I. Kazakevič, V. E. Volkova

Santrauka

Pateikti iš anksto įtemptų liaunų konstrukcijos elementų dinamiško kitimo tyrimo rezultatai. Tyrinėjamas fizikinis modelis gali būti taikomas ir tokioms liaunoms konstrukcijoms, kaip nuožulnios arkos, kevalai, įlinkusios plokštelės, didelių kosminių antenų sistemų elementai.

Tokių sistemų dinaminis kitimas aprašomas lygtimi:

$$\ddot{\phi} + \varepsilon \dot{\phi} - \alpha \phi + \beta \phi^3 = P_1 \cos(\omega t + \theta),$$

ε – slopimo koeficientas; α , β – koeficientas, nusakantis nelinijinės atkuriančios jėgos pobūdį $R(\phi) = -\alpha\phi + \beta\phi^3$; P_1, ω – išorinio poveikio parametrai.

Pagrindinių kreivių analizė rodo, kad sistemos savybės dvireišmės. Esant „dideliems“ virpesiams pasireiškia standžios sistemos savybės, o esant „mažiams“ – minkštos (plastiškos). Kaip parodyta 1 pav., padidinus ar sumažinus trikdžių dažnį, svyravimų amplitudės pasikeitimo pobūdis skiriasi. Priverstinius svyravimus nuo vienos stabilios šakos į kitą lydi ne tik perėjimas nuo „didelių“ svyravimų prie „mažų“ ir atvirkščiai, bet ir kombinacinių tonų ($2\omega, 3\omega, 5\omega, \dots, \omega/2, \omega/3$) svyravimų atsiradimas.

Harmoninio balanso metodu gauti analitiniai sprendimai „dideliems“ ir „mažiams“ priverstiniams svyravimams. Sprendimas buvo randamas iš $\phi = A \cos \omega t$ – esant „dideliems“ svyravimams, $\bar{\phi} = A_s \cos \omega_s t$ – esant „mažiams“ svyravimams, kur $\bar{\phi} = \bar{\phi} \pm \sqrt{\alpha/\beta}$. Gautos išraiškos kreivėms, apribojančioms nestabilias dažninės amplitudinės charakteristikos sritis, ir „didelių“ svyravimų amplitudės kritinės reikšmės.

Pateikti skaičiuojamojo eksperimento metodika ir rezultatai. Uždavinio sprendimui būtina programinei įrangai sudaryti buvo taikyti skaitinio integravimo metodai (Runge-Kutta eilės metodas), spektrinės analizės (Gercelio algoritmas), kompiuterinės grafikos ir kt. Skaitinio integravimo rezultatai gerai sutampa su analitinio sprendimo rezultatais tiek pagrindinėms kreivėms, tiek ir dažninėms amplitudinėms priverstinių svyravimų charakteristikoms.

THE INDUCED OSCILLATIONS OF FLEXIBLE PRESTRESSED ELEMENTS OF STRUCTURES (SYMMETRICAL SYSTEM)

M. I. Kazakevitch, V. E. Volkova

Summary

The results of the investigations of dynamic behaviour of the flexible prestressed structure elements are presented in the paper. The given physical model can be applied to the flexible structures like sloping arches, shells, bending plates, elements of the large space antenna fields (LSAF). The dynamic behaviour of the investigated systems is described by the equations

$$\ddot{\phi} + \varepsilon \dot{\phi} - \alpha \phi + \beta \phi^3 = P_1 \cos(\omega t + \theta),$$

where ε is damping coefficient, α, β are coefficients determining the character of non-linear restoring force $R(\phi) = -\alpha\phi + \beta\phi^3$; P_1, ω are parameters of outer effect.

The analysis of the "skeleton" curves disclosed the double qualities of system (1). Thus, "large" oscillations possess the peculiarities of the rigid system behaviour, and "small" oscillations possess the qualities of soft systems. The character of the oscillation amplitude changing with the increase or decrease of the excitation frequencies is followed in Fig 1. The establishment of the forced oscillation regimes from one branch to another is accompanied not only by the transition from "large" oscillations to "small", or vice versa, but also by the development of the combination tones ($2\omega, 3\omega, 5\omega, \dots, \omega/2, \omega/3$).

The analytical solutions for "large" and "small" forced oscillations are given by harmonic balance method. The solution was found in the form $\phi = A \cos \omega t$ for "large" oscillation, and $\bar{\phi} = A_s \cos \omega_s t$ for "small" oscillation, where $\bar{\phi} = \bar{\phi} \pm \sqrt{\alpha/\beta}$. The for curves disclosed unstable branches of amplitude-frequency curves and critical value amplitude of "large" oscillations were obtained.

The methods and results of the computing experiment are presented in the paper. For working out the software necessary for the given task, the method of numerical integration (Runge-Kutta method of the fourth order), spectral analysis (Hertzel algorithm), computer graphics, etc were used. The results of the numerical integration are well-coordinated with the analytical solution for the "framework" curves and for the amplitude-frequency curves of forced oscillations.

Michael I. KAZAKEVITCH. Professor, Doctor of Sciences. Dept of Bridge Construction. Dnepropetrovsk State Technical University of Railway Transport, Lazarian Str. 2, 320010 Dnepropetrovsk, Ukraine.

Doctor of Sciences (1982, aerodynamics of bridges). Since 1983 Professor of Dept of Structural Mechanics, Bridge Construction. Author of more than 250 scientific publications, including 10 books and 17 patents. Research interests: dynamics, aerodynamics of bridges, buildings; stabilisation of structures; non-linear oscillations and chaos.

Victoria E. VOLKOVA. Doctor. Dept of Building Structures. Dnepropetrovsk State Technical University of Railway Transport, Lazarian Str. 2, 320010 Dnepropetrovsk, Ukraine.

Dr (1999, structural mechanics). Author of 14 scientific publications. Research interests: dynamics, aerodynamics of bridges, buildings; non-linear oscillations and chaos.