

## FINITE ELEMENTS FOR MODELLING BEAMS AFFECTED BY A DISTRIBUTED LOAD

S. Kalanta

To cite this article: S. Kalanta (1999) FINITE ELEMENTS FOR MODELLING BEAMS AFFECTED BY A DISTRIBUTED LOAD, *Statyba*, 5:2, 91-99, DOI: [10.1080/13921525.1999.10531442](https://doi.org/10.1080/13921525.1999.10531442)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/13921525.1999.10531442>



Published online: 26 Jul 2012.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 52

---

## КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К СТЕРЖНЯМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НАГРУЗОК

С. Каланга

### 1. Введение

В многочисленных разработках по методу конечных элементов и исследованиях напряженно-деформированного состояния (НДС) стержневых конструкций для описания изгиба стержней применяется конечный элемент с кубическим распределением прогибов [1–3]. Изгиб элемента в одной плоскости описывается четырьмя узловыми перемещениями: прогибами и угловыми перемещениями концевых сечений элемента. Однако изогнутая ось стержня, нагруженного поперечной равномерно распределенной нагрузкой, описывается функцией четвертой степени. Таким элементом нельзя непосредственно определить прогиб среднего сечения изгибаемого стержня, например, ригеля рамы, который чаще всего интересует проектировщика. Прогиб среднего, как и любого другого промежуточного сечения, можно определить в виде суммы двух значений: 1) перемещения от узловых воздействий; определяется при помощи функции интерполяции перемещений элемента; 2) перемещение жесткозакрепленного стержня от местных нагрузок; определяется аналитическим решением. Однако рядовой инженер-проектировщик не владеет таким способом расчета перемещений. Разработанный в [4] равновесный элемент второго порядка позволяет, кроме концевых перемещений, определять и интегральный прогиб изогнутого стержня, с помощью которого в дальнейшем можно определить и действительное значение прогиба среднего сечения. Однако при этом требуются дополнительные вычисления.

Для расчета прогиба среднего сечения стержень зачастую моделируется двумя элементами, соединенными в среднем сечении, что приводит к увеличению числа неизвестных и объема обрабатываемой информации. Стержни с нагрузкой, распределенной по линейному закону, прихо-

дится моделировать еще большим числом конечных элементов.

В задачах оптимизации упруго-пластических конструкций с ограничениями перемещений необходимо, чтобы ограничиваемые перемещения выступали в качестве неизвестных явного вида. Поэтому, чтобы ограничить перемещения среднего сечения стержня, необходимо применять конечный элемент с дополнительной степенью свободы – прогибом среднего сечения.

В настоящей работе применительно к стержням, нагруженным равномерно и линейно распределенной нагрузкой, разрабатываются высокоточные конечные элементы с функцией прогибов четвертой и пятой степени соответственно. Их плоский изгиб описывается пятью и шестью узловыми перемещениями. Пятая и шестая степени свободы – прогиб и угловое перемещение среднего сечения элемента. О возможности построения таких элементов сказано в [5]. Путем исключения (конденсации) перемещений среднего узла элементы преобразуются в элементы с обычным числом степеней свободы. Получаются простые формулы расчета перемещений среднего сечения, удобные для применения рядовым проектировщиком. Поэтому предлагаемые элементы легко могут быть внедрены в инженерную практику. Они позволяют непосредственно определять прогиб среднего сечения и могут применяться в задачах оптимизации конструкций с ограничениями перемещений.

### 2. Основные определения и матрица жесткости элемента

При рассмотрении изгиба стержней будем пользоваться технической теорией изгиба балок. Это позволяет в дальнейшем вместо изгиба стержня рассматривать изгиб его оси. Вначале построим матрицу жесткости элемента, находя-

щегося в состоянии плоского изгиба и растяжения-сжатия, применительно к стержню под действием равномерно распределенной нагрузки. Строится конечный элемент, узловые перемещения и силы которого показаны на рис.1.

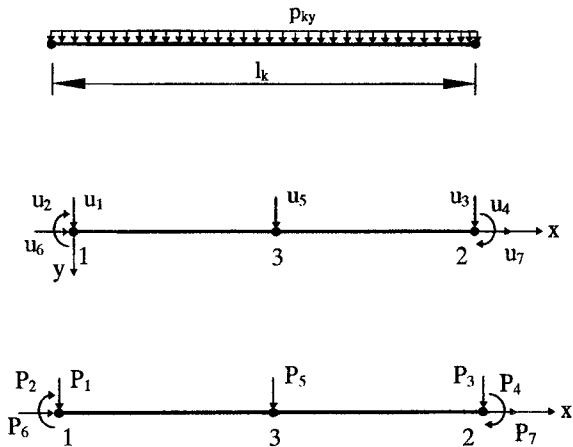


Рис. 1. Схема нагружения и положительные направления узловых перемещений и сил конечного элемента  
Fig 1. Loading scheme and positive directions of node displacements and forces of a finite element

Положение элемента определяется семью узловыми перемещениями, т.е. вектором  $\mathbf{u}_k = \{\mathbf{u}_{kl}, \mathbf{u}_{kt}\}^T = \{u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{k7}\}^T$ . При этом первые пять перемещений  $\mathbf{u}_{kl} = \{u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{k5}\}^T$  описывают изгиб элемента, а остальные – растяжение-сжатие. Поэтому принимаются следующие законы распределения перемещений в элементе:

$$u_{ky}(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 = \mathbf{h}_{kl}^T(x) \mathbf{a}_{kl}$$

$$u_{kx}(x) = a_6 + a_7x = \mathbf{h}_{kt}^T(x) \mathbf{a}_{kt}, \quad (1)$$

или

$$\mathbf{u}_k(x) = [\mathbf{h}_k(x)] \mathbf{a}_k, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{u}_k(x) = \{u_{ky}(x), u_{kx}(x)\}^T, \quad \mathbf{a}_k = \{a_1, a_2, \dots, a_7\}^T,$$

$$[\mathbf{h}_k(x)] = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{kl}^T(x) & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_{kt}^T(x) \end{bmatrix}.$$

При помощи функций (1) и граничных условий определяется связь

$$\mathbf{u}_k = [\mathbf{H}_k] \mathbf{a}_k \quad (3)$$

и

$$\mathbf{a}_k = [\mathbf{H}_k]^{-1} \mathbf{u}_k. \quad (4)$$

Тогда функция перемещений (2) с учетом зависимости (4) принимает следующий вид:

$$\mathbf{u}_k(x) = [\mathbf{H}_k(x)] \mathbf{u}_k \quad (5)$$

или

$$u_{ky}(x) = \sum_{i=1}^5 H_{ki}(x) u_{ki}, \quad (6)$$

$$u_{kx}(x) = H_{k6}(x) u_{k6} + H_{k7}(x) u_{k7},$$

где матрица функций формы

$$[\mathbf{H}_k(x)] = [\mathbf{h}_k(x)] [\mathbf{H}_k]^{-1} = \begin{bmatrix} H_{k1}(x) & H_{k2}(x) & H_{k3}(x) & H_{k4}(x) & H_{k5}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{k6}(x) & H_{k7}(x) \end{bmatrix}$$

$$H_{k1}(x) = 1 - \frac{11x^2}{l_k^2} + \frac{18x^3}{l_k^3} - \frac{8x^4}{l_k^4},$$

$$H_{k2}(x) = x - \frac{4x^2}{l_k} + \frac{5x^3}{l_k^2} - \frac{2x^4}{l_k^3},$$

$$H_{k3}(x) = -\frac{5x^2}{l_k^2} + \frac{14x^3}{l_k^3} - \frac{8x^4}{l_k^4},$$

$$H_{k4}(x) = \frac{x^2}{l_k} - \frac{3x^3}{l_k^2} + \frac{2x^4}{l_k^3},$$

$$H_{k5}(x) = \frac{16x^2}{l_k^2} - \frac{32x^3}{l_k^3} + \frac{16x^4}{l_k^4},$$

$$H_{k6}(x) = 1 - \frac{x}{l_k}, \quad H_{k7}(x) = \frac{x}{l_k}.$$

Как известно, матрица жесткости конечного элемента может быть построена с применением выражения потенциальной энергии элемента или на основе принципа возможных перемещений. С применением принципа возможных перемещений составляется уравнение равенства работ:

$$\delta \mathbf{u}_k^T \mathbf{P}_k = \delta \mathbf{u}_k^T \int_0^l [\mathbf{B}_k(x)]^T [\mathbf{d}_k] [\mathbf{B}_k(x)] \mathbf{u}_k dx,$$

где  $[\mathbf{B}_k(x)] = [\mathcal{A}]^T [\mathbf{H}_k(x)],$

$$[\mathcal{A}]^T = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad [d_k] = \begin{bmatrix} (EI)_k & 0 \\ 0 & (EA)_k \end{bmatrix}.$$

В силу произвольности вариаций  $\delta \mathbf{u}_k$  получается уравнение жесткости конечного элемента:

$$\mathbf{P}_k = [k_k] \mathbf{u}_k, \quad (7)$$

где матрица жесткости элемента

$$[k_k] = \int_0^l [B_k(x)]^T [d_k] [B_k(x)] dx. \quad (8)$$

В нашем случае она состоит из двух частей – матрицы жесткости изгиба  $[k_{ki}]$  и матрицы жесткости растяжения-сжатия  $[k_{kj}]$ . Ее элементы вычисляются по формулам:

$$k_{ij} = (EI)_k \int_0^l H_{ki}''(x) H_{kj}''(x) dx \quad (9)$$

для  $i = 1, 2, \dots, 5, j = 1, 2, \dots, 5;$

$$k_{ij} = (EA)_k \int_0^l H_{ki}'(x) H_{kj}'(x) dx \quad (10)$$

для  $i = 6, 7, j = 6, 7.$

Здесь  $H_{ki}'(x), H_{ki}''(x)$  – первая и вторая производные функции формы перемещений  $i$ -го узла. В развернутой форме матрица жесткости элемента (рис. 1) представлена в табл. 1.

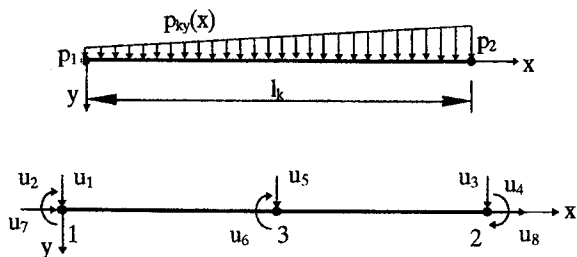


Рис. 2. Схема нагружения и узловые перемещения элемента

Fig 2. Loading scheme and node displacements of a finite element

Построим матрицу жесткости для элемента (рис. 2), находящегося в состоянии плоского изгиба и растяжения-сжатия, при линейно распределенной поперечной нагрузке. Интенсивность нагрузки описывается функцией:

$$p_{ky}(x) = \left(1 - \frac{x}{l_k}\right) p_{k1} + \frac{x}{l_k} p_{k2}, \quad (11)$$

где  $p_{k1}, p_{k2}$  – интенсивность нагрузки в узлах 1 и 2.

Изгиб элемента описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^4 u_{ky}(x)}{dx^4} = \frac{p_{ky}(x)}{(EI)_k}, \quad (12)$$

из которого следует, что его изогнутая ось описывается функцией пятой степени. Поэтому перемещения по длине элемента интерполируются полиномами

$$u_{ky}(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4 + a_6 x^5,$$

$$u_{kx}(x) = a_7 + a_8 x,$$

или

$$u_{ky}(x) = \sum_{i=1}^6 H_{ki}(x) u_{ki} \quad (13)$$

$$u_{kx}(x) = H_{k7}(x) u_{k7} + H_{k8}(x) u_{k8},$$

где

$$H_{k1}(x) = 1 - \frac{23x^2}{l_k^2} + \frac{66x^3}{l_k^3} - \frac{68x^4}{l_k^4} + \frac{24x^5}{l_k^5},$$

$$H_{k2}(x) = x - \frac{6x^2}{l_k} + \frac{13x^3}{l_k^2} - \frac{12x^4}{l_k^3} + \frac{4x^5}{l_k^4},$$

$$H_{k3}(x) = \frac{7x^2}{l_k^2} - \frac{34x^3}{l_k^3} + \frac{52x^4}{l_k^4} - \frac{24x^5}{l_k^5},$$

$$H_{k4}(x) = -\frac{x^2}{l_k} + \frac{5x^3}{l_k^2} - \frac{8x^4}{l_k^3} + \frac{4x^5}{l_k^4},$$

$$H_{k5}(x) = \frac{16x^2}{l_k^2} - \frac{32x^3}{l_k^3} + \frac{16x^4}{l_k^4},$$

$$H_{k6}(x) = -\frac{8x^2}{l_k} + \frac{32x^3}{l_k^2} - \frac{40x^4}{l_k^3} + \frac{16x^5}{l_k^4},$$

$$H_{k7}(x) = 1 - \frac{x}{l_k}, \quad H_{k8}(x) = \frac{x}{l_k}.$$

Коэффициенты матрицы жесткости определяются по формулам (9) и (10). Матрица жесткости элемента с линейно распределенной нагрузкой приведена в табл. 2.

Таблица 1. Матрица жесткости элемента с равномерно распределенной нагрузкой

Table 1. Stiffness matrix of a finite element affected by an evenly distributed load

$$[k_k] = \begin{bmatrix} [k_{kl}] & [0] \\ [0] & [k_{kt}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 316EI/5l^3 & 94EI/5l^2 & 196EI/5l^3 & -34EI/5l^2 & -512EI/5l^3 & & & \\ 94EI/5l^2 & 36EI/5l & 34EI/5l^2 & -6EI/5l & -128EI/5l^2 & & & \\ 196EI/5l^3 & 34EI/5l^2 & 316EI/5l^3 & -94EI/5l^2 & -512EI/5l^3 & & & \\ -34EI/5l^2 & -6EI/5l & -94EI/5l^2 & 36EI/5l & 128EI/5l^2 & & & \\ -512EI/5l^3 & -128EI/5l^2 & -512EI/5l^3 & 128EI/5l^2 & 1024EI/5l^3 & & & \\ & & & & & EA/l & -EA/l & \\ & & & & & -EA/l & EA/l & \end{bmatrix}$$

Таблица 2. Матрица жесткости элемента с линейно распределенной нагрузкой

Table 2. Stiffness matrix of a finite element affected by a straight distributed load

$$[k_k] = \begin{bmatrix} 5092EI/35l^3 & 1138EI/35l^2 & -1508EI/35l^3 & 242EI/35l^2 & -512EI/5l^3 & 384EI/7l^2 & & \\ 1138EI/35l^2 & 332EI/35l & -242EI/35l^2 & 38EI/35l & -128EI/5l^2 & 64EI/7l & & \\ -1508EI/35l^3 & -242EI/35l^2 & 5092EI/35l^3 & -1138EI/35l^2 & -512EI/5l^3 & -384EI/7l^2 & & \\ 242EI/35l^2 & 38EI/35l & -1138EI/35l^2 & 332EI/35l & 128EI/5l^2 & 64EI/7l & & \\ -512EI/5l^3 & -128EI/5l^2 & -512EI/5l^3 & 128EI/5l^2 & 1024EI/5l^3 & 0 & & \\ 384EI/7l^2 & 64EI/7l & -384EI/7l^2 & 64EI/7l & 0 & 256EI/7l & & \\ & & & & & & EA/l & -EA/l \\ & & & & & & -EA/l & EA/l \end{bmatrix}$$

Матрица жесткости элемента при совместном учете деформаций изгиба, растяжения-сжатия и кручения состоит из четырех матриц жесткости, расположенных по диагонали:

$$[k_k] = \begin{bmatrix} [k_{kxz}] & & & \\ & [k_{kly}] & & \\ & & [k_{ks}] & \\ & & & [k_{ks}] \end{bmatrix}$$

Здесь  $[k_{kxz}]$ ,  $[k_{kly}]$  – матрицы жесткости изгиба в плоскостях  $xz$  и  $yz$  – определены согласно (9);  $[k_{ks}]$  – матрица жесткости растяжения-сжатия – определена согласно (10);  $[k_{ks}]$  – матрица жесткости кручения – определена по формуле:

$$[k_{ks}] = \frac{(GI_s)_k}{l_k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $GI_s$  – жесткость стержня на кручение.

### 3. Узловые силы элемента

Вектор узловых сил, эквивалентных распределенной нагрузке элемента, определяется из условия равенства работ узловых сил и распределенной нагрузки:

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{F}_k = \int_0^l \mathbf{u}_k^T(x) \mathbf{p}_k(x) dx,$$

где  $\mathbf{p}_k(x) = \{p_{ky}(x), p_{kx}(x)\}^T$  – вектор интенсивности распределенных на элементе нагрузок. Отсюда вектор узловых сил с учетом (5)

$$\mathbf{F}_k = \int_0^l [\mathbf{H}_k(x)]^T \mathbf{p}_k(x) dx.$$

При условиях  $p_{kx}(x) = p_{kx} = const$ ,  $p_{ky}(x) = p_{ky}$  узловые силы конечного элемента, показанного на рис. 1, определяются вектором

$$\mathbf{F}_k = \left\{ \frac{7}{30} p_{ky} l_k, \frac{1}{60} p_{ky} l_k^2, \frac{7}{30} p_{ky} l_k, -\frac{1}{60} p_{ky} l_k^2, \frac{16}{30} p_{ky} l_k, \frac{1}{2} p_{kx} l_k, \frac{1}{2} p_{kx} l_k \right\}^T.$$

На рис.3 показаны узловые силы этого элемента, а также элемента с линейно распределенной поперечной нагрузкой. Очевидно, что последний элемент (рис. 2) можно применять и для моделирования стержней с равномерно распределенной нагрузкой.

#### 4. Редуцированные элементы и их применение

Представленные конечные элементы имеют внутренние степени свободы. Их можно выразить через внешние степени – перемещения конечных узлов элемента и в дальнейшем исключить из числа неизвестных задачи. При этом соответ-

ственно преобразуются матрица жесткости и вектор узловых сил элемента.

Для этой цели узловые перемещения и силы элемента разделяем на внутренние  $\mathbf{u}_{kv}$ ,  $\mathbf{P}_{kv}$  и внешние  $\mathbf{u}_{ks}$ ,  $\mathbf{P}_{ks}$ . Соответственно матрица жесткости разделяется на 4 подматрицы:

$$[k_k] = \begin{bmatrix} [k_{ss}] & [k_{sv}] \\ [k_{vs}] & [k_{vv}] \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение жесткости (7) можно разделить на следующие две группы:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{ks} &= [k_{ss}] \mathbf{u}_{ks} + [k_{sv}] \mathbf{u}_{kv}, \\ \mathbf{P}_{kv} &= [k_{vs}] \mathbf{u}_{ks} + [k_{vv}] \mathbf{u}_{kv}. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда внутренние степени свободы

$$\mathbf{u}_{kv} = [k_{vv}]^{-1} \mathbf{P}_{kv} - [k_{vv}]^{-1} [k_{vs}] \mathbf{u}_{ks}. \quad (15)$$

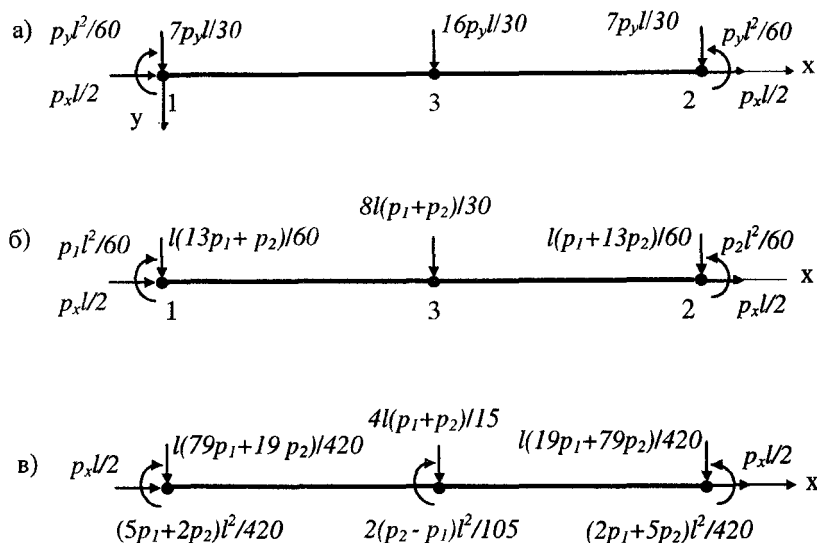


Рис. 3. Узловые силы конечных элементов:

- а) элемента с функцией прогибов четвертой степени при равномерно распределенной нагрузке;
- б) элемента с функцией прогибов четвертой степени при линейно распределенной нагрузке;
- в) элемента с функцией прогибов пятой степени при линейно распределенной нагрузке

Fig 3. Node forces of finite elements:

- a) of the element with fourth-order deflection approximation function and evenly distributed load;
- b) of the element with fourth-order deflection approximation function and straight distributed load;
- v) of the element with fifth-order deflection approximation function and straight distributed load



Рис. 4. Узловые перемещения редуцированного элемента

Fig 4. Node displacements of a reduced finite element

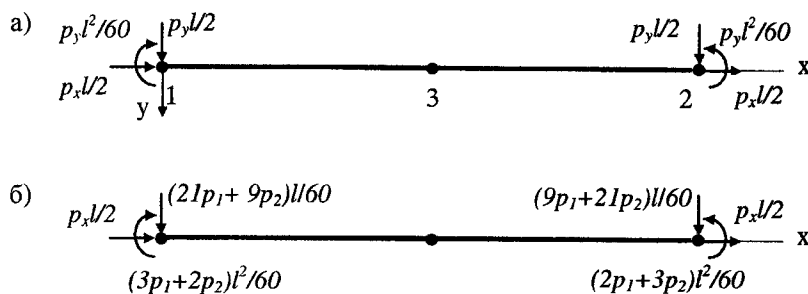


Рис. 5. Узловые силы редуцированного элемента:  
а) при равномерно распределенной нагрузке;  
б) при линейно распределенной нагрузке

Fig 5. Node forces of reduced finite element: a) for an evenly distributed load; b) for a straight distributed load

Подставляя это выражение в первое уравнение системы (13), получаем преобразованное уравнение жесткости элемента:

$$\tilde{\mathbf{P}}_k = [\tilde{k}_k] \tilde{\mathbf{u}}_k, \quad (16)$$

где  $\tilde{\mathbf{u}}_k \equiv \mathbf{u}_{ks}$ . Преобразованная матрица жесткости

$$[\tilde{k}_k] = [k_{ss}] - [k_{sv}][k_{vv}]^{-1}[k_{vs}] \quad (17)$$

и вектор обобщенных сил

$$\tilde{\mathbf{P}}_k = \mathbf{P}_{ks} - [k_{sv}][k_{vv}]^{-1} \mathbf{P}_{kv}. \quad (18)$$

Построим матрицы жесткости и векторы внешних узловых сил редуцированных конечных элементов. На рис. 4 показаны узловые перемещения этих элементов. Внешние узловые силы редуцированного элемента определяются по формуле:

$$\tilde{\mathbf{F}}_k = \mathbf{F}_{ks} - [k_{sv}][k_{vv}]^{-1} \mathbf{F}_{kv}. \quad (19)$$

Они показаны на рис. 5. При исключении внутренних степеней свободы представленных элементов изменяются только матрицы жесткости изгиба. Поэтому ниже приводится лишь редуцированная матрица жесткости изгиба:

$$[k_k] = EI \begin{bmatrix} 12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \\ 6/l^2 & 4/l & -6/l^2 & 2/l \\ -12/l^3 & -6/l^2 & 12/l^3 & -6/l^2 \\ 6/l^2 & 2/l & -6/l^2 & 4/l \end{bmatrix}$$

Она одинакова как для элементов с равномерно, так и с линейно распределенными нагрузками.

Зависимость (15) позволяет определять перемещения внутренних узлов элементов уже после решения системы разрешающих уравнений конечноэлементной модели. Используя зависимость (15), а также приведенные выше матрицы жесткости и узловые силы, получаем следующие прикладные формулы для расчета перемещений внутренних узлов:

а) при равномерно распределенной нагрузке

$$u_5 = \frac{p_y l^4}{384 EI} + 0.5u_1 + 0.125lu_2 + 0.5u_3 - 0.125lu_4, \quad (20)$$

б) при линейно распределенной нагрузке -

$$u_5 = \frac{(p_1 + p_2)l^4}{768 EI} + 0.5u_1 + 0.125lu_2 + 0.5u_3 - 0.125lu_4, \\ u_6 = \frac{(p_2 - p_1)l^3}{1920 EI} - \frac{15}{l}u_1 - 0.25u_2 + \frac{15}{l}u_3 - 0.25u_4. \quad (21)$$

Используя эти формулы, можно исключить перемещения среднего узла элемента и преобразовать функции перемещений (6), (13) в следующие формы:

$$u_{ky}(x) = \tilde{u}_{ky}(x) + \frac{p_{ky} l_k^4}{24(EI)_k} \left( \frac{x^2}{l_k^2} - \frac{2x^3}{l_k^3} + \frac{x^4}{l_k^4} \right) \quad (22)$$

и

$$u_{ky}(x) = \tilde{u}_{ky}(x) + \frac{(p_1 + p_2)l_k^4}{48(EI)_k} \left( \frac{x^2}{l_k^2} - \frac{2x^3}{l_k^3} + \frac{x^4}{l_k^4} \right) + \frac{(p_2 - p_1)l_k^4}{240(EI)_k} \left( -\frac{x^2}{l_k^2} + \frac{4x^3}{l_k^3} - \frac{5x^4}{l_k^4} + \frac{2x^5}{l_k^5} \right), \quad (23)$$

где

$$\tilde{u}_{ky}(x) = \left( 1 - \frac{3x^2}{l_k^2} + \frac{2x^3}{l_k^3} \right) u_{k1} + \left( x - \frac{2x^2}{l_k} + \frac{x^3}{l_k^2} \right) u_{k2} + \left( \frac{3x^2}{l_k^2} - \frac{2x^3}{l_k^3} \right) u_{k3} + \left( -\frac{x^2}{l_k} + \frac{x^3}{l_k^2} \right) u_{k4}, \quad (24)$$

$\tilde{u}_{ky}(x)$  – интерполирующая функция прогибов обычного двухузлового элемента. Второй член зависимости (22) выражает погрешность прогиба сечений стержня, когда он моделируется одним обычным конечным элементом.

Зависимости (22) и (23) также получаются интегрированием дифференциального уравнения (12) с учетом граничных условий:

$$u_{ky}(x) \Big|_{x=0} = u_{k1}, \quad u_{ky}(x) \Big|_{x=l} = u_{k3}, \quad u_{ky}(x) \Big|_{x=0.5l} = u_{k5},$$

$$\frac{du_{ky}(x)}{dx} \Big|_{x=0} = u_{k2}, \quad \frac{du_{ky}(x)}{dx} \Big|_{x=l} = u_{k4}$$

и

$$\frac{du_{ky}(x)}{dx} \Big|_{x=0.5l} = u_{k6}.$$

Шестое условие учитывается только для элемента с линейно распределенной нагрузкой. Таким образом, зависимости (22) и (23) являются аналитическим решением дифференциального уравнения (12). Это свидетельствует о том, что представленные конечные элементы совершенно точно моделируют напряженно-деформированное состояние изгибаемых стержней.

Матрица жесткости редуцированных элементов совпадает с матрицей жесткости обычно используемого элемента с кубическим распределением прогибов. Узловые силы редуцированного элемента с равномерно распределенной нагрузкой также равны силам обычного элемента. Поэтому для расчета стержневых конструкций при равномерно распределенной нагрузке можно использовать широко распространенные программы, в которых плоский изгиб стержня моделируется четырьмя узловыми перемещениями. Для расчета прогиба среднего сечения стержня целесообразно применять

формулу (20), которая может быть включена в программы. Эти программы можно использовать и для анализа стержней с линейно распределенной нагрузкой, однако для расчета узловых сил конечных элементов следует применять формулы, показанные на рис. 3в, а для расчета перемещений средних сечений – формулы (21). При этом каждый стержень достаточно моделировать одним конечным элементом, если жесткость постоянная.

### 5. Расчет усилий стержней

Усилия в стержнях, подверженных действию местной нагрузки, состоят из двух частей:

- усилия от перемещений его узлов, которые определяются по формуле (7);
- усилия от местной нагрузки.

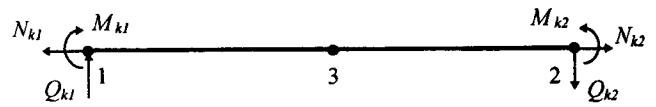


Рис. 6. Положительные направления усилий

Fig 6. Positive directions of stresses

Пусть положительные направления усилий определяются согласно рис. 6. Тогда изгибающие моменты и поперечные силы в концах элемента определяются зависимостями:

$$Q_{k1} = -P_{k1} + F_{k1}, \quad M_{k1} = P_{k2} - F_{k2},$$

$$Q_{k2} = P_{k3} - F_{k3}, \quad M_{k2} = -P_{k4} + F_{k4}.$$

Продольные силы

$$N_{k1} = -P_{k6} + F_{k6}, \quad N_{k2} = P_{k7} - F_{k7}$$

и

$$N_{k1} = -P_{k7} + F_{k7}, \quad N_{k2} = P_{k8} - F_{k8}.$$

Изгибающий момент в третьем узле

$$M_{k3} = (M_{k1} + M_{k2})/2 + p_{ky}l_k^2/8.$$

и

$$M_{k3} = \frac{(EI)_k}{l_k} (u_2 - u_4) + \frac{(p_1 + p_2)l_k^2}{48}.$$

С использованием зависимостей

$$M_k(x) = -(EI)_k \frac{d^2 u_k(x)}{dx^2}, \quad Q_k(x) = -(EI)_k \frac{d^3 u_k(x)}{dx^3}$$

получаются следующие формулы для расчета усилий в любом промежуточном сечении элемента:



а) при равномерно распределенной нагрузке –

$$M_k(x) = \frac{(EI)_k}{l_k} \left[ \left( \frac{6}{l_k} - \frac{12x}{l_k^2} \right) u_{k1} + \left( 4 - \frac{6x}{l_k} \right) u_{k2} + \left( -\frac{6}{l_k} + \frac{12x}{l_k^2} \right) u_{k3} + \left( 2 - \frac{6x}{l_k} \right) u_{k4} \right] + \frac{P_{ky} l_k^2}{12} \left( -1 + \frac{6x}{l_k} - \frac{6x^2}{l_k^2} \right),$$

$$Q_k(x) = \frac{(EI)_k}{l_k^2} \left( -\frac{12}{l_k} u_{k1} - 6u_{k2} + \frac{12}{l_k} u_{k3} - 6u_{k4} \right) + \frac{P_{ky} l_k}{2} \left( 1 - \frac{2x}{l_k} \right);$$

б) при линейно распределенной нагрузке –

$$M_k(x) = \frac{(EI)_k}{l_k} \left[ \left( \frac{6}{l_k} - \frac{12x}{l_k^2} \right) u_{k1} + \left( 4 - \frac{6x}{l_k} \right) u_{k2} + \left( -\frac{6}{l_k} + \frac{12x}{l_k^2} \right) u_{k3} + \left( 2 - \frac{6x}{l_k} \right) u_{k4} \right] + \frac{(p_1 + p_2) l_k^2}{24} \left( -1 + \frac{6x}{l_k} - \frac{6x^2}{l_k^2} \right) + \frac{(p_2 - p_1) l_k^2}{120} \left( 1 - \frac{12x}{l_k} + \frac{30x^2}{l_k^2} - \frac{20x^3}{l_k^3} \right),$$

$$Q_k(x) = \frac{(EI)_k}{l_k^2} \left( -\frac{12}{l_k} u_{k1} - 6u_{k2} + \frac{12}{l_k} u_{k3} - 6u_{k4} \right) + \frac{(p_1 + p_2) l_k}{4} \left( 1 - \frac{2x}{l_k} \right) + \frac{(p_2 - p_1) l_k}{10} \left( -1 + \frac{5x}{l_k} - \frac{5x^2}{l_k^2} \right).$$

## 6. Выводы

Построены новые конечные элементы с функциями прогибов четвертой и пятой степени применительно к изгибаемым стержням под действием распределенных нагрузок. В рамках технической теории изгиба балок они позволяют моделировать напряженно-деформированное состояние стержня при помощи одного конечного элемента. Кроме того, они позволяют непосредственно определить перемещения среднего сечения элемента. Это позволяет уменьшить объем задачи и выводимой информации, которую необходимо обработать после решения задачи.

Путем исключения внутренних степеней свободы построены редуцированные конечные элементы, число степеней свободы которых уменьшено до числа степеней свободы обычного (двухузлового) элемента. При этом предложенные редуцированные элементы сохраняют вышеуказанные преимущества. Получены простые формулы (20) и (21), при помощи которых перемещения среднего узла элемента выражаются через перемещения концевых узлов. Они позволяют определять перемещения среднего сечения стержня уже после решения системы алгебраических уравнений и удобны для применения рядовым проектировщиком. Редуцированные элементы легко могут быть внедрены в инженерную практику, так как их матрицы жесткости совпадают с матрицей жесткости обычного стержневого элемента.

Конечные элементы с внутренними степенями свободы важны для задач оптимизации упруго-пластических конструкций с ограничениями перемещений, так как для обеспечения ограничения перемещения среднего сечения стержня необходимо, чтобы это перемещение присутствовало в качестве неизвестного в явном виде. При этом крайне важно уменьшить число неизвестных задачи оптимизации.

## Литература

1. В. А. Постнов, И. Я. Хархурим. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград: Судостроение, 1974. 342 с.
2. О. Зенкевич. Метод конечных элементов в технике. М: Мир, 1975. 541 с.
3. Р. Галлагер. Метод конечных элементов. Основы. М: Мир, 1984. 428 с.
4. С. А. Каланта. Упругий расчет плоских стержневых систем методом конечных элементов // Литовский механический сборник: Вопросы теоретической и прикладной механики, № 26, 1983, с. 78-94.
5. R. Kačianauskas. Computer methods in multilevel modelling of beams and shells. Vilnius: Technika, 1995. 395 p.

Iteikta 1999 04 23

## BAIGTINIAI ELEMENTAI STRYPAMS SU PASKIRSTYTOMIS APKROVOMIS MODELIUOTI

S. Kalanta

Santrauka

Lenkiamų strypų analizei paprastai naudojami baigtiniai elementai su kubiniu įlinkių pasiskirstymu.

Straipsnyje strypams, veikiamiems paskirstytųjų apkrovų, modeliuoti sudaryti baigtiniai elementai (1, 2 pav.) su

ketvirtojo ir penktojo laipsnio įlinkių interpoliavimo funkcijomis (1), (6) ir (13). Penktojo laipsnio įlinkių funkcijos naudojamos strypams su tiesiškai paskirstyta apkrova (11) modeliuoti. Elemento plokščiasis lenkimas modeliuojamas 5 ir 6 laisvumo laipsniais. Papildomieji 5 ir 6 laisvumo laipsniai – elemento viduriniojo mazgo 3 įlinkis ir kampinis poslinkis (2 pav.). Sudarytos elementų standumo matricos (1, 2 lent.) ir išorinių jėgų vektoriai. Sudaryti baigtiniai elementai tiksliai modeliuoja paskirstytosiomis apkrovomis veikiamų strypų įtempimų ir deformacijų būvį, be to, leidžia tiesiogiai skaičiuoti strypų viduriniojo pjūvio poslinkius. Visa tai sudaro galimybę sumažinti uždavinių ir gaunamos informacijos, kurią vėliau reikia analizuoti, apimtį.

Eliminuojant vidinius laisvumo laipsnius, sudaryti redukuotieji baigtiniai elementai (4 pav.), kurių laisvumo laipsnių skaičius sumažintas iki paprastai naudojamo elemento laisvumo laipsnių skaičiaus. Tačiau redukuotieji elementai turi visus nurodytuosius privalumus. Gautos formulės (20) ir (21), kuriomis elemento viduriniojo mazgo poslinkiai išreiškiami per jo galinių mazgų poslinkius. Jos leidžia apskaičiuoti strypo viduriniojo pjūvio poslinkius jau po baigtinių elementų lygčių sistemos sprendimo.

Pasiūlyti redukuotieji elementai gali būti labai lengvai įdiegti ir naudojami inžinerinėje praktikoje, kadangi jų standumo matrica sutampa su įprastinio strypinio elemento standumo matrica.

Sudaryti elementai su vidiniais laisvumo laipsniais ypač svarbūs konstrukcijų optimizacijos su poslinkių ribojimais uždaviniams, nes, norint apriboti strypo viduriniojo pjūvio poslinkį, reikia, kad šis poslinkis būtų uždavinio nežinomas. Be to, labai svarbu kiek įmanoma sumažinti optimizacijos uždavinio nežinomųjų skaičių.

#### **FINITE ELEMENTS FOR MODELLING BEAMS AFFECTED BY A DISTRIBUTED LOAD**

**S. Kalanta**

#### **S u m m a r y**

Usually a finite element with cubic deflection approximation function is applied when evaluating the stress and strain field of bar structures. But such an element only approximately evaluates the actual strain field of the bar affected by a distributed load. The improved finite elements

(Fig 1, 2) with fourth and fifth-order deflection approximation functions (1), (6) and (13) are presented in the actual manuscript. The fifth-order deflection approximation function is used for modelling the beams affected by a linearly distributed load (11). The plain bending of the finite element is modelled by 5 and 6 freedom degrees. The additional 5<sup>th</sup> and 6<sup>th</sup> freedom degrees are the deflection and deviation of the middle node of element (Fig 2). The element stiffness matrices (Table 1, 2) and node force vectors are presented. The created finite elements exactly models the stress and strain field of bars, which are affected by distributed load, and also allow to compute directly the middle section displacements of bars. It creates conditions for diminishing the volume of problems and obtaining information, which is necessary to be analysed later.

The reduced finite elements (Fig 4) are created by the elimination of the internal freedom degrees. Their number of freedom degrees is decreased up to the number of freedom degrees of a usually applied finite element. But the reduced finite elements have all afore-mentioned qualities. Formulas (20) and (21) are derived expressing the middle node displacements by the final node displacements. These formulas allow to compute the middle section displacements of the bar already after the solution of equation system.

The proposed reduced elements can be introduced and applied in engineering practice very easily, because their stiffness matrix coincide with the stiffness matrix of a usual bar finite element.

The created elements with internal freedom degrees are very important for the problems of structures optimization with displacement constraints, because the constraint of bar middle section displacement can form just in case, when this displacement is one of the problem's unknown. Also it is very important to decrease the number of unknowns of optimization problem.

---

**Stanislovas KALANTA**. Doctor, Associate Professor. Dept of Structural Mechanics. Vilnius Gediminas Technical University, Saulėtekio al. 11, 2040 Vilnius, Lithuania.

Doctor (structural mechanics), 1974. Research visits to: Leningrad Polytechnic Institute, Moscow Civil Engineering Institute, Kiev Civil Engineering Institute. Research interests: computational mechanics, finite element method, analysis and optimization of elastic-plastic structures.