

THE PROBLEMS OF LIMIT LOAD ANALYSIS AND OPTIMIZATION USING EQUILIBRIUM FINITE ELEMENTS

S. Kalanta

To cite this article: S. Kalanta (1996) THE PROBLEMS OF LIMIT LOAD ANALYSIS AND OPTIMIZATION USING EQUILIBRIUM FINITE ELEMENTS, *Statyba*, 2:7, 13-23, DOI: [10.1080/13921525.1996.10531650](https://doi.org/10.1080/13921525.1996.10531650)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/13921525.1996.10531650>



Published online: 26 Jul 2012.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 48

РАВНОВЕСНЫЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ РАСЧЕТА И ОПТИМИЗАЦИИ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

С. Каланга

1. Введение

Общие математические модели задач расчета и оптимизации предельной нагрузки для сплошного тела построены в [1,2]. Пластическое разрушение конструкций обычно происходит из-за образования поверхностей сосредоточенных пластических деформаций, в которых имеют место разрывы скоростей перемещений и диссипация энергии. Однако в равновесных и двойственных математических моделях задач предельного равновесия тонкостенных конструкций [3-5 и др.] разрывы скоростей перемещений обычно не прогнозируются. Поэтому такие постановки задач не могут с достаточной точностью моделировать действительное поведение упругопластических пластинок и оболочек. Разрывы скоростей перемещений обычно учитываются только в кинематической постановке задачи расчета предельной нагрузки, построенной независимо от статической постановки [6,7 и др.] (двойственные связи задач не соблюдаются). Проблема учета возможных разрывов перемещений в равновесных моделях рассматривалась нами в работах [8-10], посвященных задачам оптимизации жесткопластического тела [8,9] и задачам анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций до пластического разрушения [10]. Как продолжение исследований по совершенствованию метода конечных элементов применительно к упругопластическим конструкциям в настоящей статье строятся двойственные равновесные математические модели задач расчета и оптимизации предельной нагрузки с учетом разрывов скоростей

перемещений и скорости диссипации энергии в местах этих разрывов.

2. Общие вариационные постановки задач

Рассматривается жесткопластическое тело, геометрические параметры, условия опирания и функция $C(x)$ параметра текучести материала которого заданы. На поверхности S_f тела распределена внешняя нагрузка $F(x)$, а на поверхности S_u заданы перемещения $\dot{u}(x) = 0$. Определяется НДС и оптимальное распределение или параметр нагрузки F_0 , отвечающие предельному состоянию тела, возникающему из-за исчерпания его прочности. Дискретная модель тела строится разделением его на s конечных элементов объема V_k , где $k = 1, 2, \dots, s$ или $k \in \mathcal{X}$. НДС k -го элемента описывается вектор-функциями напряжений $\sigma_k(x)$, скоростей перемещений $\dot{u}_k(x)$ и деформаций $\dot{\epsilon}_k(x)$. Функции напряжений и скоростей перемещений, относящиеся к смежным конечным элементам, разделенным поверхностью S_t , обозначаются знаками "+" и "-". Пусть номера $t = 1, 2, \dots, z$ поверхностей S_t конечных элементов образуют множество $\mathcal{I} = \mathcal{I}_v \cup \mathcal{I}_f \cup \mathcal{I}_u$, где \mathcal{I}_v - множество номеров внутренних межэлементных поверхностей; \mathcal{I}_f - множество номеров граничных, принадлежащих S_f , поверхностей элементов; \mathcal{I}_u - множество номеров граничных поверхностей S_u . Пусть множество $\mathcal{I}_t = \mathcal{I}_v \cup \mathcal{I}_f$. Математические модели задач строятся на основе статической теоремы предельного равновесия и метода преобразований Лагранжа.

2.1. Задача расчета параметра предельной нагрузки

При заданном законе распределения нагрузки $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = F_0 \eta(\mathbf{x})$ определяется параметр предельной нагрузки F_0 и НДС конструкции, отвечающие пластическому разрушению тела. Здесь $\eta(\mathbf{x})$ - заданная функция распределения нагрузки.

Мощность нагрузки

$$\dot{W} = \int_{S_f} \dot{\mathbf{u}}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}) dS = \sum_{t \in \mathcal{T}_f} F_0 \int_{S_{\eta}} \dot{\mathbf{u}}_t^T(\mathbf{x}) \eta_t(\mathbf{x}) dS_t. \quad (1)$$

На основе статической теоремы предельного равновесия [1] при фиксированных скоростях перемещений

$$\sum_{t \in \mathcal{T}_f} \int_{S_{\eta}} \dot{\mathbf{u}}_t^T(\mathbf{x}) \eta_t(\mathbf{x}) dS_t = 1 \quad (2)$$

получается следующая математическая модель статической постановки задачи определения параметра предельной нагрузки:

$$F_0 \rightarrow \max$$

при условиях (3)

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}] \sigma_k(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x})) \leq \mathbf{f}_0(C_k(\mathbf{x})) \in V_k, \quad k \in \mathcal{K}; \\ \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^-(\mathbf{x})) &\leq \mathbf{f}_{0t}(C_t^-(\mathbf{x})) \in S_t^-, \quad t \in \mathcal{T}; \\ \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^+(\mathbf{x})) &\leq \mathbf{f}_{0t}(C_t^+(\mathbf{x})) \in S_t^+, \quad t \in \mathcal{T}; \\ [A_t] \sigma_t^-(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_t^-(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \in S_t^-, \quad t \in \mathcal{T}; \\ -[A_t] \sigma_t^+(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_t^+(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \in S_t^+, \quad t \in \mathcal{T}; \\ -\mathbf{p}_t^-(\mathbf{x}) - \mathbf{p}_t^+(\mathbf{x}) + F_0 \eta_t(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \in S_t, \quad t \in \mathcal{T}_v; \\ -\mathbf{p}_t^+(\mathbf{x}) + F_0 \eta_t(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \in S_t, \quad t \in \mathcal{T}_f. \end{aligned}$$

Систему ограничений задачи, определяющую множество статически допустимых векторов напряжений, составляют уравнения равновесия и условия текучести внутри конечных элементов (первая строка) и на поверхностях элементов.

Методом преобразований Лагранжа задача (3) может быть преобразована в задачу стационарности:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + F_0 \left\{ 1 - \sum_{t \in \mathcal{T}_f} \int_{S_{\eta}} \dot{\mathbf{u}}_t^T(\mathbf{x}) \eta_t(\mathbf{x}) dS_t \right\} \rightarrow \text{stac}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \sum_{t \in \mathcal{T}_v} \int_{S_t} \dot{\mathbf{u}}_t^T(\mathbf{x}) \{ \mathbf{p}_t^-(\mathbf{x}) - \mathbf{p}_t^+(\mathbf{x}) \} dS_t - \\ &- \sum_{t \in \mathcal{T}_f} \int_{S_t} \dot{\mathbf{u}}_t^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}_t^+(\mathbf{x}) dS_t - \sum_k \int_{V_k} \dot{\mathbf{u}}_k^T(\mathbf{x}) [\mathcal{A}] \sigma_k(\mathbf{x}) dV_k + \\ &+ \sum_k \int_{V_k} \dot{\lambda}_k^T(\mathbf{x}) \{ \mathbf{f}_0(C_k(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x})) \} dV_k + \\ &+ \sum_{t \in \mathcal{T}} \int_{S_t^-} \{ \dot{\lambda}_t^-(\mathbf{x}) \}^T \{ \mathbf{f}_{0t}(C_t^-(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^-(\mathbf{x})) \} dS_t + \quad (5) \\ &+ \sum_{t \in \mathcal{T}} \int_{S_t^+} \{ \dot{\lambda}_t^+(\mathbf{x}) \}^T \{ \mathbf{f}_{0t}(C_t^+(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^+(\mathbf{x})) \} dS_t - \\ &- \sum_{t \in \mathcal{T}_v} \int_{S_t} \{ \dot{\mathbf{u}}_t^-(\mathbf{x}) \}^T \{ [A_t] \sigma_t^-(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_t^-(\mathbf{x}) \} dS_t - \\ &- \sum_{t \in \mathcal{T}_f} \int_{S_t} \{ \dot{\mathbf{u}}_t^+(\mathbf{x}) \}^T \{ -[A_t] \sigma_t^+(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_t^+(\mathbf{x}) \} dS_t; \\ \dot{\lambda}_k(\mathbf{x}) &\geq \mathbf{0} \in V_k; \quad \dot{\lambda}_t^-(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, \quad \dot{\lambda}_t^+(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \in S_t. \quad (6) \end{aligned}$$

В случае статически допустимых напряжений два первых интеграла функционала \mathcal{F}_0 выражают мощность нагрузки, а все остальные интегралы равны нулю. Применяв к третьему интегралу формулу Гаусса-Остроградского, можно получить вторую форму смешанного функционала, которая для скоростей перемещений, удовлетворяющих геометрическим уравнениям, имеет энергетический смысл скорости диссипации энергии. Поэтому задачу стационарности (4) можно преобразовать в задачу минимизации скорости диссипации энергии, отвечающую кинематической теореме предельного равновесия.

2.2. Задача оптимизации нагрузки

При заданных геометрических параметрах, условиях опирания и направлений нагрузки определяется оптимальное распределение нагрузки и НДС конструкции, отвечающие простому пластическому разрушению и заданному критерию оптимальности

$$\max \varphi_1 = \sum_{t \in \mathcal{T}_f} \int_{S_{\eta}} \mathbf{T}_t^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}_t(\mathbf{x}) dS_t,$$

где $\mathbf{T}_t(\mathbf{x})$ - векторная функция весовых коэффициентов, означающих влияние (стоимость) нагрузки единичной интенсивности,

распределенной на единичной площади. При единичных весовых функциях φ_1 представляет собой функцию суммарной нагрузки.

За условие оптимальности принимается условие постоянства мощности нагрузки

$$\frac{\dot{\mathbf{u}}_t^T(\mathbf{x})\mathbf{F}_t(\mathbf{x})}{\mathbf{T}_t^T(\mathbf{x})\mathbf{F}_t(\mathbf{x})} = \text{const} \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{u}}_t^T(\mathbf{x})\mathbf{F}_t(\mathbf{x}) = c \mathbf{T}_t^T(\mathbf{x})\mathbf{F}_t(\mathbf{x})$$

для всех $t \in \mathcal{S}_f$, где c - произвольная константа. Тогда функция φ_1 получает смысл мощности нагрузки и статическая постановка задачи оптимизации нагрузки выражается математической моделью:

$$\sum_{t \in \mathcal{S}_f} \int_{S_t} \mathbf{T}_t^T(\mathbf{x})\mathbf{F}_t(\mathbf{x}) dS_t \rightarrow \max$$

при условиях (7)

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}] \sigma_k(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x})) \leq \mathbf{f}_0(C_k(\mathbf{x})) \in V_k, \quad k \in \mathcal{K}; \\ \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^-(\mathbf{x})) \leq \mathbf{f}_0(C_t^-(\mathbf{x})) \in S_t^-, \quad t \in \mathcal{S}; \\ \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^+(\mathbf{x})) \leq \mathbf{f}_0(C_t^+(\mathbf{x})) \in S_t^+, \quad t \in \mathcal{S}; \\ [A_t] \sigma_t^-(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_t^-(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in S_t^-, \quad t \in \mathcal{S}; \\ -[A_t] \sigma_t^+(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_t^+(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in S_t^+, \quad t \in \mathcal{S}; \\ -\mathbf{p}_t^-(\mathbf{x}) - \mathbf{p}_t^+(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in S_t, \quad t \in \mathcal{S}_v; \\ -\mathbf{p}_t^+(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_t(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \in S_t, \quad t \in \mathcal{S}_f. \end{aligned}$$

Методом множителей Лагранжа она преобразуется в задачу стационарности функционала

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 + \sum_{t \in \mathcal{S}_f} \int_{S_t} \mathbf{F}_t^T(\mathbf{x}) \{ \mathbf{T}_t(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{u}}_t(\mathbf{x}) + \dot{\mathbf{v}}_t(\mathbf{x}) \} dS_t \quad (8)$$

при условиях (6). Принимая условия стационарности этого функционала по переменным $\sigma_k(\mathbf{x}), \mathbf{p}_t^-(\mathbf{x}), \mathbf{p}_t^+(\mathbf{x})$ и $\mathbf{F}_t(\mathbf{x})$ в качестве предварительных, получим кинематическую постановку задачи оптимизации нагрузки.

Обычно нагрузка действует лишь на некоторые из поверхностей S_t . Для поверхностей, к которым нагрузка не приложена, $-\mathbf{p}_t^-(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_t^+(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_t(\mathbf{x})$. С целью уменьшения числа неизвестных целесообразно для них применять такие условия сопряжения и текучести:

$$\begin{aligned} [A_t] \sigma_t^-(\mathbf{x}) - \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in S_t^-, \quad t \in \mathcal{S}_v; \\ -[A_t] \sigma_t^+(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in S_t^+, \quad t \in \mathcal{S}_v; \\ \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x})) \leq \mathbf{f}_0(C_t(\mathbf{x})) \in S_t, \quad t \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Тогда статические граничные условия

$$-\mathbf{p}_t(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in S_{\beta}, \quad t \in \mathcal{S}_f.$$

Соответственно преобразуется и функционал \mathcal{F}_1 .

При построении дискретных математических моделей задач вышеприведенные функциональные зависимости необходимо заменить дискретными аналогами. Для этого применяются равновесные конечные элементы.

3. Равновесные дискретные зависимости

3.1. Зависимости равновесного элемента

Для построения дискретных зависимостей конечного элемента и дискретной модели тела напряжения в каждом элементе аппроксимируются функциями

$$\begin{aligned} \sigma_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\xi} [H_{ki}(\mathbf{x})] \sigma_{ki} = [H_k(\mathbf{x})] \sigma_k; \\ \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) = [H_t(\mathbf{x})] \mathbf{p}_t, \end{aligned} \quad (9)$$

при помощи которых напряжения в любой точке элемента выражаются через векторы напряжений σ_k, \mathbf{p}_t узлов элемента. Как и в работах [8,9], не требуется, чтобы функции (9) априорно удовлетворяли дифференциальным условиям равновесия в объеме элемента.

Вводится вектор обобщенных сил \mathbf{P}_k и соответствующий ему вектор обобщенных перемещений $\dot{\mathbf{u}}_k$. Силы \mathbf{P}_k и узловые напряжения σ_k связаны уравнением равновесия элемента

$$\mathbf{P}_k = [A_k] \mathbf{Q}_k \quad \text{или} \quad \mathbf{P}_k = [A_{\sigma k}] \sigma_k + [A_{p k}] \mathbf{p}_k. \quad (10)$$

В тех случаях, когда функции (9) тождественно не удовлетворяют дифференциальным условиям равновесия, вводятся дополнительные степени свободы и дополнительные уравнения равновесия элемента. Возможны два способа построения уравнений (10) - прямой и вариационный. Прямой способ заключается в прямом

составлении уравнений равновесия по направлению выбранных обобщенных сил и перемещений. При этом обобщенные силы и перемещения выбираются с таким расчетом, чтобы полученные таким образом уравнения равновесия дискретной модели конструкции гарантировали соблюдение условий равновесия во всех точках внутри и на границах элементов. По второму способу построения уравнения (10) получаются как условия стационарности дискретно описанного функционала (4) или (8) по переменным $\dot{\mathbf{u}}_k$ и $\dot{\mathbf{u}}_t$. Здесь необходимо дополнительно задать функции перемещений и пластических множителей и построить дискретное выражение функционала.

Дискретные условия текучести конечного элемента также могут быть получены прямым способом с применением классических методов коллокаций [10,11] или вариационным методом как условия стационарности дискретно описанного функционала \mathcal{F} по переменным $\dot{\lambda}_k, \dot{\lambda}_t^-$ и $\dot{\lambda}_t^+$. Они представляются неравенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_k(\sigma_k) &\leq \mathbf{f}_{0k}(C_k); \\ \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^-) &\leq \mathbf{f}_{0t}(C_t^-), \quad \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^+) \leq \mathbf{f}_{0t}(C_t^+). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_k(\sigma_k) &= \int_{V_k} [G_k(\mathbf{x})]^T \mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x})) dV_k, \\ \mathbf{f}_{0k}(C_k) &= \int_{V_k} [G_k(\mathbf{x})]^T \mathbf{f}_0(C_k(\mathbf{x})) dV_k, \\ \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t) &= \int_{S_k} [G_t(\mathbf{x})]^T \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x})) dS_t, \\ \mathbf{f}_t(C_t) &= \int_{S_k} [G_t(\mathbf{x})]^T \mathbf{f}_{0t}(C_t(\mathbf{x})) dS_t. \end{aligned}$$

Матрицы $[G_k(\mathbf{x})], [G_t(\mathbf{x})]$ являются матрицами функций формы пластических множителей или матрицами весовых функций соответствующих методов коллокаций. В работе [10] показано, что наилучшая аппроксимация условий текучести, пластических деформаций и скорости диссипации энергии получается с применением метода коллокаций Бубнова-Галеркина. Задавая функции

$$\mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{\xi} [H_{\beta i}(\mathbf{x})] \mathbf{f}_{ki}(\sigma_{ki}) = [H_{\beta k}(\mathbf{x})] \mathbf{f}_k(\sigma_k),$$

можно построить упрощенные выражения интегральных условий текучести [11].

Геометрические уравнения элемента строятся на основе принципа виртуальных сил или вариационным методом из условия стационарности дискретно описанного функционала \mathcal{F} по переменным σ_k и \mathbf{p}_t . Они выражают совместность скоростей перемещений и пластических деформаций внутри элемента и на его поверхностях и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} [\nabla \mathbf{f}_k(\sigma_k)]^T \dot{\lambda}_k - [A_{\sigma k}]^T \dot{\mathbf{u}}_k &= \mathbf{0}, \\ [\nabla \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t)]^T \dot{\lambda}_t - [A_{p k}]^T \dot{\mathbf{u}}_t &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $[\nabla \mathbf{f}_k(\sigma_k)], [\nabla \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t)]$ - матрицы градиентов условий текучести конечного элемента. Пластические множители $\dot{\lambda}_k \geq \mathbf{0}, \dot{\lambda}_t \geq \mathbf{0}$ и удовлетворяют условиям

$$\dot{\lambda}_k^T \{ \mathbf{f}_{0k}(C_k) - \mathbf{f}_k(\sigma_k) \} = \mathbf{0}, \quad \dot{\lambda}_t^T \{ \mathbf{f}_{0t}(C_t) - \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t) \} = \mathbf{0}.$$

3.2. Зависимости дискретной модели конструкции

Пусть внешняя нагрузка дискретной модели конструкции описывается вектором \mathbf{F} , а перемещения - вектором $\dot{\mathbf{u}}$. Уравнения (10) -(12) k -го элемента не связаны с уравнениями остальных элементов. Объединение свободных конечных элементов в дискретную модель конструкции осуществляется при помощи уравнений совместности перемещений

$$\bar{\mathbf{u}} = [C] \dot{\mathbf{u}}, \quad (13)$$

которые определяют связь обобщенных перемещений конечных элементов и дискретной модели конструкции.

Уравнения равновесия дискретной модели строятся на основе принципа возможных перемещений и получают вид:

$$[C]^T \mathbf{P} = \mathbf{F} \quad \text{или} \quad [A_{\sigma}] \sigma + [A_p] \mathbf{p} = \mathbf{F}, \quad (14)$$

$$\text{где } [A_\sigma] = [C]^T [\bar{A}_\sigma], \quad [A_p] = [C]^T [\bar{A}_p]. \quad (15)$$

Здесь $[\bar{A}_\sigma], [\bar{A}_p]$ - квазидиагональные матрицы, диагональными блоками которых являются матрицы $[A_{\sigma k}], [A_{pk}]$. Составляющими векторов $\mathbf{P}, \sigma, \mathbf{p}$ являются соответственно векторы $\mathbf{P}_k, \sigma_k, \mathbf{p}_k$. С применением зависимостей (13), (15) геометрические уравнения свободных элементов преобразуются в глобальные геометрические уравнения дискретной модели.

Итак, НДС дискретной модели конструкции описываются следующими зависимостями:

$$[A_\sigma]\sigma + [A_p]\mathbf{p} = \mathbf{F}, \quad (16)$$

$$\mathbf{f}(\sigma) \leq \mathbf{f}_0(\mathbf{C}), \quad \mathbf{f}_p(\mathbf{p}) \leq \mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C});$$

$$[\nabla \mathbf{f}(\sigma)]^T \dot{\lambda} - [A_\sigma]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad \dot{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad (17)$$

$$[\nabla \mathbf{f}_p(\mathbf{p})]^T \dot{\lambda}_p - [A_p]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad \dot{\lambda}_p \geq \mathbf{0};$$

$$\dot{\lambda}^T \{\mathbf{f}_0(\mathbf{C}) - \mathbf{f}(\sigma)\} = \mathbf{0}, \quad \dot{\lambda}_p^T \{\mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}) - \mathbf{f}_p(\mathbf{p})\} = \mathbf{0}. \quad (18)$$

Две группы условий текучести и геометрических уравнений можно объединить:

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{Q}) \leq \tilde{\mathbf{f}}_0(\mathbf{C}), \quad [\nabla \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{Q})]^T \tilde{\lambda} - [A]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0},$$

где $[A] \equiv [[A_\sigma], [A_p]]$, $\mathbf{Q} \equiv \{\sigma, \mathbf{p}\}^T$, $\tilde{\lambda} \equiv \{\lambda, \lambda_p\}^T$, $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{Q}) \equiv \{\mathbf{f}(\sigma), \mathbf{f}(\mathbf{p})\}^T$. Тогда, выбирая базисную матрицу $[A_1]^T$ и используя решение

$$\dot{\mathbf{u}} = ([A_1]^T)^{-1} [\nabla \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{Q})]^T \tilde{\lambda}, \quad (19)$$

геометрические уравнения можно преобразовать в уравнения совместности скоростей пластических деформаций

$$[B(\mathbf{Q})] \dot{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (20)$$

$$\text{где } [B(\mathbf{Q})] = [\nabla \tilde{\mathbf{f}}_2(\mathbf{Q})]^T - [A_2]^T ([A_1]^T)^{-1} [\nabla \tilde{\mathbf{f}}_1(\mathbf{Q})]^T.$$

Здесь $[\nabla \tilde{\mathbf{f}}_1(\mathbf{Q})]^T$ - матрица градиентов условий текучести, соответствующая матрице $[A_1]^T$. Зависимость (19) позволяет исключить скорости перемещений из числа неизвестных задач.

4. Дискретные математические модели

Приведем двойственные пары дискретных математических моделей задач в статической и кинематической постановках. Прежде всего с применением дискретных выражений уравнений равновесия и условий текучести (16) на основе общих математических моделей (3) и (7) получаем дискретные статические постановки задач. Далее методом множителей Лагранжа они преобразуются в кинематические постановки.

Задача расчета параметра нагрузки.

а) в статической постановке -

$$F_0 \rightarrow \max \quad (21)$$

при условиях

$$\mathbf{f}(\sigma) \leq \mathbf{f}_0(\mathbf{C}), \quad \mathbf{f}_p(\mathbf{p}) \leq \mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}),$$

$$-[A_\sigma]\sigma - [A_p]\mathbf{p} + F_0 \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0};$$

б) в кинематической постановке -

$$\dot{\lambda}^T [\nabla \mathbf{f}(\sigma)]\sigma + \dot{\lambda}_p^T [\nabla \mathbf{f}_p(\mathbf{p})]\mathbf{p} + \dot{\lambda}^T \{\mathbf{f}_0(\mathbf{C}) - \mathbf{f}(\sigma)\} +$$

$$+ \dot{\lambda}_p^T \{\mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}) - \mathbf{f}_p(\mathbf{p})\} \rightarrow \min \quad (22)$$

при условиях

$$[\nabla \mathbf{f}(\sigma)]^T \dot{\lambda} - [A_\sigma]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0},$$

$$[\nabla \mathbf{f}_p(\mathbf{p})]^T \dot{\lambda}_p - [A_p]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{\eta}^T \dot{\mathbf{u}} = 1, \quad \dot{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad \dot{\lambda}_p \geq \mathbf{0}.$$

Первый и второй члены функционала задачи (22) выражают скорость диссипации энергии в объеме и на поверхностях конечных элементов, а остальные члены для оптимального решения равны нулю.

Задача оптимизации нагрузки. Дискретные математические модели этой задачи строятся с применением дискретных зависимостей (16)-(18) и

$$\dot{W} = \sum_t \int_{S_f} \mathbf{T}_t^T(\mathbf{x}) [H_f(\mathbf{x})] \mathbf{F}_t(\mathbf{x}) dS_t = \sum_t \mathbf{T}_t^T \mathbf{F}_t = \mathbf{T}^T \mathbf{F}.$$

В общем случае составляющие вектора \mathbf{F} могут быть линейно зависимы, поэтому вводится вектор оптимизируемых параметров \mathbf{F}_0 и устанавливается связь

$$\mathbf{F} = [\eta] \mathbf{F}_0.$$

Тогда мощность нагрузки

$$\dot{W} = \mathbf{T}^T [\eta] \mathbf{F}_0 = \mathbf{T}_0^T \mathbf{F}_0, \quad \text{где} \quad \mathbf{T}_0 = [\eta]^T \mathbf{T}.$$

Получается следующая двойственная пара математических моделей задачи оптимизации нагрузки:

а) в статической постановке -

$$\mathbf{T}_0^T \mathbf{F}_0 \rightarrow \max$$

при условиях (23)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\sigma) \leq \mathbf{f}_0(\mathbf{C}), \quad \mathbf{f}_p(\mathbf{p}) \leq \mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}), \\ -[A_\sigma] \sigma - [A_p] \mathbf{p} + [\eta] \mathbf{F}_0 = \mathbf{0}, \quad -\mathbf{F}_0 \leq \mathbf{0}; \end{aligned}$$

б) в кинематической постановке -

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^T [\nabla \mathbf{f}(\sigma)] \dot{\sigma} + \dot{\lambda}_p^T [\nabla \mathbf{f}_p(\mathbf{p})] \dot{\mathbf{p}} + \dot{\lambda}^T \{ \mathbf{f}_0(\mathbf{C}) - \mathbf{f}(\sigma) \} + \\ + \dot{\lambda}_p^T \{ \mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}) - \mathbf{f}_p(\mathbf{p}) \} \rightarrow \min \end{aligned}$$

при условиях (24)

$$\begin{aligned} [\nabla \mathbf{f}(\sigma)]^T \dot{\lambda} - [A_\sigma]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ [\nabla \mathbf{f}_p(\mathbf{p})]^T \dot{\lambda}_p - [A_p]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ [\eta]^T \dot{\mathbf{u}} \geq \mathbf{T}_0, \quad \dot{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad \dot{\lambda}_p \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Двойственные пары задач математического программирования (21), (22) и (23), (24) отвечают статической и кинематической теоремам предельного равновесия. Они построены с применением равновесных конечных элементов и позволяют определить нижние оценки предельной нагрузки и параметров напряженно-деформированного состояния. В тех случаях, когда вектор \mathbf{F}_0 содержит лишь один параметр ($\mathbf{F}_0 \equiv F_0$), задачи (23) и (24) превращаются в пару задач расчета параметра предельной нагрузки, т.е. эквивалентны задачам (21), (22).

Если, кроме варьируемой, действует и постоянная нагрузка и (или) другие воздействия (осадка опор, начальные деформации), то математические модели задачи оптимизации нагрузки преобразуются в следующие:

а) статическая постановка -

$$\mathbf{T}_0^T \mathbf{F}_0 \rightarrow \max$$

при условиях

(25)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\sigma) \leq \mathbf{f}_0(\mathbf{C}), \quad \mathbf{f}_p(\mathbf{p}) \leq \mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}), \\ -[A_\sigma] \sigma - [A_p] \mathbf{p} + [\eta] \mathbf{F}_0 = -\mathbf{F}_1, \quad -\mathbf{F}_0 \leq \mathbf{0}; \end{aligned}$$

б) кинематическая постановка -

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^T [\nabla \mathbf{f}(\sigma)] \dot{\sigma} + \dot{\lambda}_p^T [\nabla \mathbf{f}_p(\mathbf{p})] \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{F}_1^T \dot{\mathbf{u}} + \\ + \dot{\lambda}^T \{ \mathbf{f}_0(\mathbf{C}) - \mathbf{f}(\sigma) \} + \dot{\lambda}_p^T \{ \mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}) - \mathbf{f}_p(\mathbf{p}) \} \rightarrow \min \end{aligned}$$

при условиях (17) и (26)

$$[\eta]^T \dot{\mathbf{u}} \geq \mathbf{T}_0.$$

Здесь \mathbf{F}_1 - вектор постоянной нагрузки. При наличии начальных деформаций или осадки опор \mathbf{F}_1 представляет собой вектор нагрузки, эквивалентный этим воздействиям. Он определяется упругим расчетом конструкции [12]. Постоянные воздействия также будут учтены, если функции текучести в математических моделях (23), (24) заменим на функции $\mathbf{f}(\sigma + \sigma_e)$ и $\mathbf{f}(\mathbf{p} + \mathbf{p}_e)$, где σ_e, \mathbf{p}_e - векторы напряжений упругого расчета от постоянных воздействий. Тогда действительные напряжения $\sigma^* = \sigma + \sigma_e$ и $\mathbf{p}^* = \mathbf{p} + \mathbf{p}_e$.

Модифицированные математические модели.

Представленные кинематические постановки задач содержат много неизвестных. Однако их число можно уменьшить. Используя решение (19), можно из числа неизвестных исключить скорости перемещений. Тогда, например, математическая модель (24) преобразуется к следующему виду:

$$\dot{\lambda}^T [\nabla \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{Q})] \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\lambda}^T \{ \tilde{\mathbf{f}}_0(\mathbf{C}) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{Q}) \} \rightarrow \min$$

при условиях (27)

$$\begin{aligned} [B(\mathbf{Q})] \tilde{\lambda} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\lambda} \geq \mathbf{0}, \\ [\eta]^T ([A_1]^T)^{-1} [\nabla \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{Q})]^T \tilde{\lambda} \geq \mathbf{T}_0. \end{aligned}$$

Заменив ограничение мощности нагрузки уравнением

$$\eta^T ([A_1]^T)^{-1} [\nabla \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{Q})]^T \tilde{\lambda} = 1,$$

получим аналогичную модель задачи расчета параметра предельной нагрузки.

Есть и другой способ исключения скоростей перемещений и сокращения общего числа неизвестных. Используя решение

$$Q = [B_1]\{F_1 + [\eta]F_0\} + [B_2]Q_2$$

уравнений равновесия, можно из статической постановки задач исключить базисные напряжения и уравнения равновесия. Получается задача

$$T_0^T F_0 \rightarrow \max$$

при условиях (28)

$$\tilde{f}(Q_2, F_0, F_1) \leq \tilde{f}_0(C), \quad -F_0 \leq 0.$$

Здесь $[B_1], [B_2]$ - матрицы частного и общего решений уравнений равновесия [12]. Тогда скорости перемещений в двойственной кинематической постановке

$$\tilde{\lambda}^T \left[\frac{\partial \tilde{f}(Q_2, F_0, F_1)}{\partial F_0} \right] F_0 + \tilde{\lambda}^T \{ \tilde{f}_0 - \tilde{f}(Q_2, F_0, F_1) \} \rightarrow \min$$

при условиях (29)

$$\left[\frac{\partial \tilde{f}(Q_2, F_0, F_1)}{\partial Q_2} \right]^T \tilde{\lambda} = 0, \quad \left[\frac{\partial \tilde{f}(Q_2, F_0, F_1)}{\partial F_0} \right]^T \tilde{\lambda} \geq T_0, \\ \tilde{\lambda} \geq 0$$

отсутствуют. Неизвестными в этих задачах являются лишь линейно независимые напряжения Q_2 , вектор нагрузки F_0 и пластические множители $\tilde{\lambda}$. Сопоставляя ограничения задач (27) и (29), приходим к выводу, что ограничения задачи (29) представляют собой уравнения совместности скоростей пластических деформаций и ограничения мощности нагрузки. Таким образом, уравнения совместности деформаций могут быть построены в качестве условий стационарности функционала Лагранжа

$$\mathcal{F}_2 = T_0^T F_0 + \tilde{\lambda}^T \{ \tilde{f}_0 - \tilde{f}(Q_2, F_0, F_1) \} + v^T F_0$$

по переменным Q_2 . Условие стационарности этого функционала по F_0 дает ограничение мощности нагрузки.

В случае линейных условий текучести

$$[\Phi]\sigma \leq C_0, \quad [\Phi_p]p \leq C_{0p}$$

задача (26) принимает вид:

$$C_0^T \dot{\lambda} + C_{0p}^T \dot{\lambda}_p - F_1^T \dot{u} \rightarrow \min$$

при условиях (30)

$$[\Phi]^T \dot{\lambda} - [A_\sigma]^T \dot{u} = 0, \quad [\Phi_p]^T \dot{\lambda}_p - [A_p]^T \dot{u} = 0, \\ [\eta]^T \dot{u} \geq T_0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda}_p \geq 0,$$

а задачи (28) и (29) преобразуются к двойственной паре задач:

а) статическая постановка -

$$T_0^T F_0 \rightarrow \max$$

при условиях (31)

$$[\tilde{\Phi}]\{[B_1]\{F_1 + [\eta]F_0\} + [B_2]Q_2\} \leq \tilde{C}, \quad -F_0 \leq 0;$$

б) кинематическая постановка -

$$\tilde{C}^T \tilde{\lambda} - F_1^T [B_1]^T [\tilde{\Phi}]^T \tilde{\lambda} \rightarrow \min$$

при условиях (32)

$$[B_2]^T [\tilde{\Phi}]^T \tilde{\lambda} = 0, \quad [\eta]^T [B_1]^T [\tilde{\Phi}]^T \tilde{\lambda} \geq T_0, \quad \tilde{\lambda} \geq 0.$$

Неизвестными в задаче (32) являются лишь пластические множители - скорости пластических деформаций.

5. Численный анализ

Численными исследованиями иллюстрируется не только применение равновесных конечных элементов в задачах предельного равновесия, но и точность результатов расчета в зависимости от способа дискретизации условий текучести. Чтобы определить аналитическое решение, необходимое для оценки точности численных результатов, в качестве иллюстративного примера выбирается одноэтажная двухпролетная рама, находящаяся под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $p = F_0$ и сосредоточенной силы $F = 3F_0$ (рис. 1). Несущая способность сечений

стержней задана предельным моментом M_0 . Требуется определить параметр предельной нагрузки F_0 и распределение изгибающих моментов, соответствующие пластическому разрушению рамы и разным способам дискретизации условий текучести.

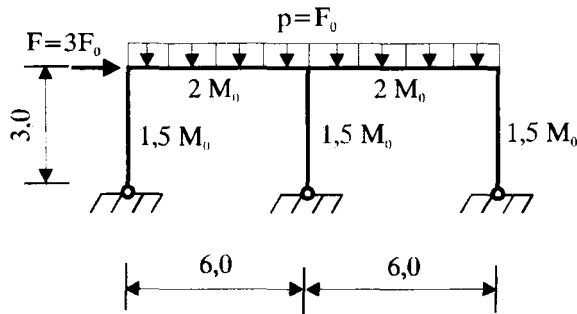


Рис. 1. Расчетная схема рамы
Fig. 1. Computing scheme of frame

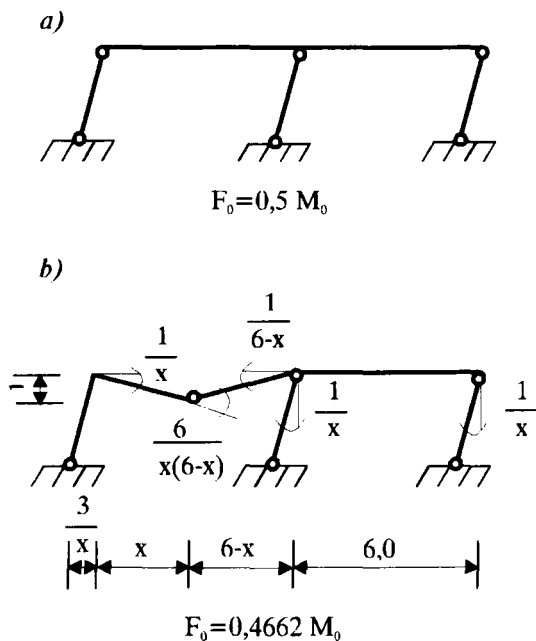


Рис. 2. Механизмы разрушения: а) бокового смещения; б) комбинированный
Fig. 2. Mechanisms of failure: a) side's overhanging, b) combinative

Аналитическое решение задачи определяется кинематическим методом предельного равновесия, основанным на исследовании кинематически возможных механизмов разрушения (применение статического метода связано с неоднократным решением системы уравнений

равновесия). Для каждого исследуемого механизма составляется уравнение равенства работ внешних и внутренних сил и определяется функция параметра предельной нагрузки $F_0 = F_0(x, M_0)$ и значение этого параметра. Если один пластический шарнир находится в ригеле рамы, то предварительно из условия экстремальности

$$dF_0(x, M_0) / dx = 0$$

определяется местонахождение этого шарнира, т.е. координата x .

Возможные механизмы разрушения рассматриваемой рамы можно разделить на основные и комбинированные. К основным принадлежат механизм бокового смещения (рис. 2, а) и два балочных механизма разрушения ригелей. Комбинированные механизмы строятся "сложением" основных механизмов. Таким образом необходимо исследовать пять механизмов разрушения. Проиллюстрируем определение значения параметра F_0 лишь для одного комбинированного механизма (рис.2,б).

Уравнение равенства работ внешних и внутренних сил

$$\frac{9F_0}{x} + 3F_0 = \frac{12M_0}{x(6-x)} + \frac{2M_0}{6-x} + \frac{3M_0}{x}.$$

Отсюда

$$F_0 = \frac{M_0(30-x)}{3(18+3x-x^2)}.$$

Условие экстремальности параметра F_0

$$dF_0 / dx = x^2 - 60x + 108 = 0,$$

откуда координата пластического шарнира $x = 1,8575m$. С учетом этой координаты получается значение $F_0 = 0,4662M_0$. Параметры F_0 , соответствующие остальным механизмам, превышают это значение. Поэтому действительными являются параметр предельной нагрузки $F_0 = 0,4662M_0$ и соответствующий ему комбинированный механизм разрушения, показанный на рис.2, б.

Численный анализ рамы проводился с применением равновесных конечных элементов первого и второго порядка и разных условий текучести. Для дискретного описания колонн

Табл. 1. Значения параметра предельной нагрузки F_0 и их погрешности ΔF_0

Table 1. Values of limit load parameter F_0 and computation errors ΔF_0

Порядок конечного элемента	Условия текучности	Число конечных элементов в ригеле							
		1		2		3		4	
		F_0/M_0	ΔF_0	F_0/M_0	ΔF_0	F_0/M_0	ΔF_0	F_0/M_0	ΔF_0
Первый	Точечные и др.	0.5	7.25	0.5	7.25	0.4667	0.10	0.4691	0.63
Второй	Точечные	0.5	7.25	0.4691	0.63	0.4667	0.10	0.4691	0.63
	Интегр. точечные	0.4630	-0.69	0.4550	-2.40	0.4575	-1.86	0.4640	-0.47
	Элементные	0.5	7.25	0.4872	4.50	0.4667	0.10	0.4691	0.63

использованы элементы первого порядка, а ригелей - элементы первого и второго порядка с соответственно линейным и параболическим распределением изгибающих моментов. В табл.1 приведены значения параметра предельной нагрузки F_0 (до множителя M_0) и процентная погрешность этих значений ΔF_0 (отклонение от аналитического решения $F_0 = 0,4662M_0$), полученные с применением точечных и интегральных условий текучности. Максимальное процентное нарушение условия прочности в опасном сечении находится в прямой пропорциональности от погрешности ΔF_0 и определяется выражением $\Delta f = 2,346 \Delta F_0$. Поэтому статически допустимые в глобальном смысле результаты расчета (изгибающие моменты удовлетворяют условиям равновесия и текучности во всех сечениях) получены лишь с применением интегральных точечных условий текучности. На рис. 3 иллюстрируется конверген-

ция результатов расчета с применением разных условий текучности: 1 - точечных, 2 - интегральных точечных, 3 - конечноэлементных, 4 - для элементов первого порядка.

6. Заключение

На основе известных теорем предельного равновесия [1,2] построены общие математические модели задач расчета и оптимизации предельной нагрузки, учитывающие возможные разрывы скоростей перемещений и скорость диссипации энергии не только в объеме, но и на поверхностях пластического разрушения конструкций. С применением равновесных конечных элементов и метода множителей Лагранжа построены дискретные выражения основных зависимостей и дискретные двойственные математические модели статической и кинематической постановок задач. Показано, что применение уравнений совместности скоростей пластических деформаций позволяет формулировать задачи с меньшим числом неизвестных. На примере простой двухпролетной рамы проведен качественный анализ разных стержневых элементов и условий текучности. Он подтверждает следующие теоретически прогнозируемые выводы:

1. Наиболее точные и стабильные результаты расчета, в наименьшей степени зависящие от густоты расчетной сетки, получаются с применением интегральных точечных условий текучности.

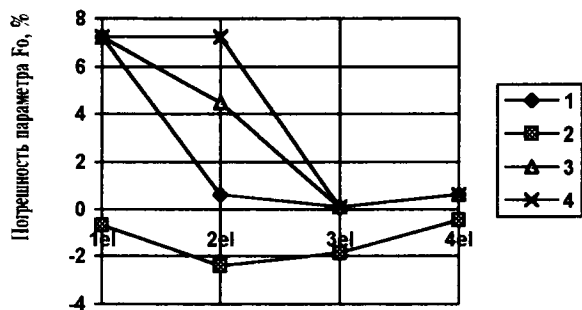


Рис. 3. Иллюстрация сходимости параметра F_0 для разных условий текучности

Fig. 3. Illustration of convergence of parameter F_0 for different yield conditions

2. Точность результатов расчета при точечных и конечноэлементных условиях текучести зависит не только от густоты, но и от успешного выбора расчетной сетки и не всегда улучшается при ее сгущении. Однако вероятность удачного выбора при сгущении расчетной сетки увеличивается.

3. Наиболее удачной является такая конечноэлементная сетка, узлы которой максимально приближены к местам пластического разрушения конструкции.

4. В случае удачно выбранной расчетной сетки точность результатов расчета при точечных условиях текучести может даже превышать точность результатов, полученных с применением интегральных точечных условий текучести.

Литература

1. А.А. Чирас. Теория оптимизации в предельном анализе твердого деформируемого тела. Вильнюс: Минтис, 1971. 123 с.
2. А.А. Чирас. Математические модели анализа и оптимизации упругопластических систем. Вильнюс: Моклас, 1982. 112 с.
3. T. Belytschko, M. Velebit. Finite element method for elastic plastic plates//J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1972, 98, № 1, p. 227-242.
4. G. Maier, R.A. Zavelani, D. Bennedetti. A finite element approach to optimal design of plastic structures in plane stress//Int. Numer. Meth. Eng., 1972, 4, № 4, p. 455-473.
5. Ю.Ю. Аткиочюнас. Расчет упругопластических систем при повторных нагружениях. Вильнюс: Изд-во науки и энциклопедий, 1994. 150 с.
6. A. Biron, G. Charleux. Limit analysis of axisymmetric pressure vessel intrsections of arbitrary shape//Int. J. Mech. Sci., 1972, 14, № 1, p. 25-41.
7. S. Turgeman, J. Pastor. Limit analysis: a linear formulation of the kinematic approach for axisymmetric mechanics problems//J. Int. Numer. and Anal. Meth. Geomech., 1982, 6, № 1, p. 109-128.
8. С.А. Каланта. Метод конечных элементов в задачах расчета и оптимизации жесткопластических систем при простом нагружении: Отчет о научно-исследовательской работе "Разработать метод конечных элементов применительно к задачам предельного равновесия". ГР № 0181100871, Инв. № 0206.0028660, Вильнюс, 1983. 71 с.
9. С.А. Каланта. Двойственные математические модели задач оптимизации идеально

пластичных систем конечных элементов// Прикладная механика и оптимизация (Литовский механический сборник, № 27), Вильнюс, 1985, с. 40-48.

10. С. Каланта. Двойственные математические модели задач анализа упругопластических конструкций с разрывными полями перемещений// Statyba (Строительство), № 3(3), Вильнюс: Техника, 1995, с. 5-29.
11. S. Kalanta. Takumo sąlygos baigtinių elementų modeliams // Proceedings of 4th Int. Conf. "Modern building materials, structures and techniques", vol. III. Vilnius: Technika, 1995, p. 260-265.
12. С. Каланта. Равновесные конечные элементы в расчетах упругих конструкций//Statyba (Строительство), № 1(1), Вильнюс: Техника, 1995, с. 25-47.

Įteikta 1996 09 03

RIBINĖS APKROVOS ANALIZĖS IR OPTIMIZACIJOS UŽDAVINIŲ FORMULUOTĖS, PANAUDOJANT PUSIAUSVIRUOSIUS BAIGTINIUS ELEMENTUS

S. Kalanta

S a n t r a u k a

Sudaromi konstrukcijų ribinės apkrovos ir optimizacijos uždavinių dualūs diskretiniai matematiniai modeliai statine ir kinematinė formuluote, panaudojant pusiausvirose baigtinius elementus. Juose įvertinami galimi poslinkių greičių trūkiai ir energijos disipacijos greitis ne tik kūno tūryje, bet ir plastiniuose paviršiuose tarp baigtinių elementų.

Remiantis statine teorema apie ribinę apkrovą [1, 2], pirmiausia sudaryti uždavinių bendri matematiniai modeliai (3) ir (7). Šių modelių diskretizacijai naudojami pusiausvrieji baigtiniai elementai ir įtempimų aproksimavimo funkcijos (9). Optimalumo kriterijumi pasirinkta išorinės apkrovos galingumo pastovumo sąlyga. Sudarytos pusiausvyros lygčių, takumo sąlygų ir geometrinių lygčių diskretinės išraiškos baigtiniam elementui (10)-(12) ir konstrukcijos diskretiniam modeliui (14)-(17). Takumo sąlygos diskretizuojamos panaudojant klasikinius kolokacijų metodus: kolokacijų taške, kolokacijų srityje (elemente) ir Bubnovo-Galiorkino [11,12]. Diskretinio modelio pusiausvyros lygtys (14) sudaromos naudojant virtualių poslinkių principą, o geometrines lygtys - virtualių jėgų principą.

Skirtingai nei kitų autorių darbuose, takumo sąlygos ir geometrines lygtys sudaromos ne tik baigtinių elementų vidui, bet ir jų išoriniams paviršiams. Tai ir leidžia sudaryti nagrinėjamų uždavinių diskretinius matematinis modelius (21)-(26), kuriuose įvertinami poslinkių greičių trūkiai ir energijos disipacijos greitis plastiniuose paviršiuose tarp baigtinių elementų. Uždavinių kinematinės formuluotės matematiniai modeliai (22), (24), (26), (29) ir (32) sudaromi iš atitinkamų statinių formuluočių Lagranžo daugiklių metodu. Taip pat pateikiami modifikuoti uždavinių matematiniai modeliai (27)-(29), kuriuose išelimitos

pusiausvyros lygtys arba geometrinės lygtys pakeistos plastinių deformacijų greičių darnos lygtimis (27), taip sumažinant lygčių ir nežinomųjų skaičių.

Rėmo pavyzdžiu iliustruojama skaitmeninių skaičiavimo rezultatų (ribinės apkrovos parametro) priklausomybė nuo lenkimo momentų aproksimavimo laipsnio ir nuo takumo sąlygų diskretizacijos būdo. 1 lentelėje pateiktos rėmo ribinės apkrovos parametro F_0 reikšmės ir jų procentinės paklaidos ΔF_0 (palyginant su analitiniu sprendiniu $F_0 = 0,4662M_0$), gautos pirmos ir antros eilės baigtiniams elementams (su atitinkamai tiesiniu ir paraboliniu lenkimo momentų pasiskirstymu), diskretizuojant rygelius į 1, 2, 3 ir 4 baigtinius elementus. Skaičiavimo rezultatų analizė rodo, kad tiksliausi ir stabiliausi sprendiniai gaunami diskretizuojant takumo sąlygas Bubnovo-Galiorkino metodu. Diskretizuojant takumo sąlygas taškinės kolokacijos bei kolokacijos srityje būdu skaičiavimo rezultatų tikslumas priklauso ne tik nuo skaičiuojamojo tinklo tankio, bet ir nuo jo konfigūracijos daugiau ar mažiau sėkmingo pasirinkimo.

THE PROBLEMS OF LIMIT LOAD ANALYSIS AND OPTIMIZATION USING EQUILIBRIUM FINITE ELEMENTS

S. Kalanta

Summary

The equilibrium dual discrete mathematical models of the problems of limit load analysis and optimization are investigated in the article. These models are presented in terms of static and kinematic formulation using equilibrium finite elements. In these mathematical models the possible discontinuities of displacement velocities are evaluated and the velocity of energy dissipation is estimated not only within the volume of finite elements, but at the plastic surfaces between elements.

At first, on the basis of the energy principle of the maximum external power [1,2] the general mathematical models (3) and (7) of static formulation of limit load analysis and optimization problems are created. In these models the yield conditions are controlled not only within the volume, but also at the surfaces of finite elements. The equilibrium finite elements and interpolation functions of strains (9) are used for discretization of these models. The constancy of external power is taken as the optimum criterion. The discrete expressions of fundamental relationships - equilibrium and geometric equations, yield conditions (10)-(12) for finite element and (14)-(17) for the discrete model of a body are developed. The discrete

expressions of yield conditions are given using the classic collocation methods: collocation at the point, collocation at the sphere (element) and Bubnov-Galiorkin's collocation method [11,12]. The equilibrium equations of discrete structure are developed on the basis of virtual displacement principle while geometrical equations are derived using virtual force principle.

In contrast to the approach of other authors, yield conditions and geometrical equations are described not only within finite elements, but also at the surfaces between elements. That helps to design the dual discrete mathematical models of the problems (21)-(26), in which the discontinuities of displacement velocities and the velocity of energy dissipation in the place of those discontinuities are estimated. The mathematical models (22), (24), (26), (29) and (32) of kinematic problem formulation are developed from sensible static formulations by Lagrange's multiplier method. The modified mathematical models (27)-(29) are presented. In these models the equilibrium equations are eliminated or the geometrical equations are transformed into compatible equations of plastic stress velocities, in this way decreasing the number of equations and unknown values.

The dependence of the numerical results (limit load) of the frame on the approximation degree of bending moments, as well as on the discretization method of yield conditions are illustrated. In table 1 the values of limit loading parameter F_0 and their error of calculation ΔF_0 (per cent, in comparison with the analytic solution $F_0 = 0,4662M_0$) are presented. They are given for the first and second order finite elements with linear and parabolic distribution of bending moments using different discrete yield conditions and a different number of finite elements. The numerical result shows, that the discretization of yield conditions by Bubnov-Galiorkin's method gives the best accuracy and stable solutions. By discretizing yield conditions using the point's collocation and collocation at the element, the accuracy of numerical results depends not only on the number of elements, but also on a more or less successful choice of finite elements net.

Stanislovas KALANTA. Doctor, Associate Professor. Department of Structural Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University, 11 Saulėtekio Ave, 2054 Vilnius, Lithuania.

Doctor of technical sciences (structural mechanics), 1974. Probation: Leningrad Polytechnic Institute, Moscow Civil Engineering Institute, Kiev Civil Engineering Institute. Research interests: computational mechanics, finite element method, analysis and optimization of elastic-plastic structures.