

## **Fragilidad de bordos perimetrales ante la falla por erosión debida al desbordamiento**

### **Fragility of flood protection levees for surge only overtopping erosion failure**

Vázquez-Guillén, F.<sup>1</sup>  
Auvinet, G.<sup>2</sup>  
López-Acosta, N. P.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,  
fvazquezg@exii.unam.mx

<sup>2</sup>Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,  
gauvinetg@iingen.unam.mx

<sup>3</sup>Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,  
nlopeza@iingen.unam.mx

Autor para correspondencia: Felipe Vázquez Guillén,  
fvazquezg@exii.unam.mx.

#### **Resumen**

El presente artículo describe un enfoque original para determinar curvas de fragilidad de bordos perimetrales, ante la falla por erosión debida al desbordamiento basado en la simulación de variables aleatorias. El análisis de fragilidad toma en cuenta la incertidumbre asociada con la estimación de los parámetros de un modelo que describe la erosión superficial del material del bordo, y después, las curvas de fragilidad se expresan en función del tirante de agua, por encima de la cresta del bordo. En los análisis de fragilidad, tradicionalmente se supone *a priori* una distribución lognormal para las curvas de fragilidad y sus parámetros se obtienen posteriormente, utilizando alguna técnica de estimación estadística. Los resultados del presente artículo muestran que, al considerar una densidad de probabilidad no gaussiana para el

coeficiente de erodibilidad, las curvas de fragilidad difieren de manera significativa de la distribución lognormal.

**Palabras clave:** curvas de fragilidad, erosión superficial, simulación de variables aleatorias y coeficiente de erodibilidad.

## Abstract

This paper describes an original approach to determine fragility curves for the surge only overtopping erosion failure of levees on the basis of the simulation of random variables. The fragility analysis accounts for uncertainty in estimating the parameters that describe surficial erosion of the levee material and then, fragility curves are expressed as a function of the height of water above the levee crest. Common practice assumes a prior lognormal distribution for the fragility curves and their parameters are then obtained by some statistical estimation technique. The results of this paper shown that when a non-Gaussian probability density function is considered for the erodibility coefficient, the fragility curves differ significantly from the lognormal distribution.

**Keywords:** fragility curves, surficial erosion, simulation of random variables, erodibility coefficient.

Fecha de recibido 01/11/2016

Fecha de aceptado 30/04/2018

## Introducción

La erosión que causa el agua al fluir sobre la superficie de un bordo perimetral puede provocar su rompimiento, inundando súbitamente a la población, agricultura, ganadería e infraestructura que se desea proteger. En la literatura se han documentado varios casos de rompimiento de bordos por desbordamiento (Conagua, 2011; Cenapred, 2014).

Las curvas de fragilidad se han utilizado extensamente en la evaluación probabilista del riesgo estructural desde finales de la década de los setentas (Kennedy, Cornell, Campbell, Kaplan, & Perla, 1980). Posteriormente se utilizaron en el diseño de elementos de cimentación

(Popescu, Deodatis, & Nobahar, 2005). Actualmente es común analizar la fragilidad de bordos para protección de inundaciones (Vorogushyng, Merz & Apel, 2009; Schweckendiek & Vrouwenvelder, 2014 y Bachmann, Huber, Johann, & Schüttrumpf, 2013). Diferentes organismos internacionales incluyen en sus recomendaciones el uso de este concepto en la evaluación probabilista del riesgo (USACE, 2010; SPANCOLD, 2013; CIRIA, 2013).

## Definición de curva de fragilidad

Sea  $\mathbf{x}^T = [X_1, X_2, \dots, X_N]$  un vector de estado que contiene variables aleatorias básicas de diseño  $X_1, X_2, \dots, X_N$  con densidades de probabilidad conjunta  $N$ -variadas, representadas por  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ . Por simplicidad, los eventos de seguridad y falla ante un mecanismo específico se describen en términos de una función de estado  $g(\mathbf{x})$ , escrita de tal manera que:  $\{g(\mathbf{x}) \leq \xi\}$ , representa el evento de seguridad; por ejemplo,  $\{\mathbf{x} \in \mathcal{S}\}$  y  $\{g(\mathbf{x}) > \xi\}$ , representa el evento de falla; por ejemplo,  $\{\mathbf{x} \in \mathcal{F}\}$ ; donde  $\xi$  es un umbral que delimita las regiones de seguridad y falla.

La probabilidad de falla dado un valor específico  $h$  de la intensidad es la fragilidad y se puede expresar como (Casati & Faravelli, 1991):

$$F_H(h) = P[\mathbf{x} \in \mathcal{F} | H = h] = \int_{\mathcal{F}|h} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

La curva dada por  $F_H(h)$  es la curva de fragilidad y expresa la probabilidad de que la capacidad sea menor que la demanda dada una intensidad  $h$  de la sollicitación. El dominio de falla depende de la intensidad. Conforme la intensidad aumenta, la probabilidad de falla se aproxima a la unidad.

## Enfoque propuesto basado en la simulación de variables aleatorias

En este contexto se define una curva de fragilidad empírica para diferentes valores de  $h$  en la siguiente forma:

$$\hat{F}_H(h) = P[\mathbf{x} \in \mathfrak{S} | H = h] = \int_{\Theta|_h} I(\mathbf{x}) f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2)$$

donde  $\Theta$ , representa el dominio de las variables aleatorias en  $\mathbf{x}$  e  $I(\mathbf{x})$  es una variable aleatoria binaria tal que:  $I(\mathbf{x}) = 0$ , si  $g(\mathbf{x}) \leq \xi$  o  $I(\mathbf{x}) = 1$ , si  $g(\mathbf{x}) > \xi$ . El símbolo " $\hat{\phantom{x}}$ " encima de  $F_H(h)$  enfatiza que la curva dada por la ecuación (2) es una curva de fragilidad empírica (punto por punto). La versión teórica de la curva empírica se puede obtener por medio de algún procedimiento de ajuste (Popescu *et al.*, 2005).

Para determinar el valor que toma la variable aleatoria binaria es necesario simular las variables aleatorias del vector  $\mathbf{x}$ . Para realizar esta tarea, se propone el siguiente algoritmo, basado en el método de descomposición de Cholesky (Rao, 1992):

1. Especificar la matriz de correlación deseada en términos de  $\rho_s$ .
2. Obtener la matriz de correlación  $\mathbf{R}$  en términos de  $r$ , tal que:  
 $r = 2 \text{sen}(\pi \rho_s / 6)$ .
3. Realizar la descomposición de Cholesky de  $\mathbf{R}$ , tal que:  $\mathbf{R} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^T$ .
4. Simular  $N$  variables aleatorias gaussianas independientes:  
 $\mathbf{z}^T = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ .
5. Hacer:  $\mathbf{y} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{z}$ .
6. Obtener:  $\mathbf{U} = \Phi(\mathbf{y})$ ; donde  $\Phi(\cdot)$  es la función de distribución gaussiana.
7. Hacer:  $X_1 = F_1^{-1}(U_1)$ ,  $X_2 = F_2^{-1}(U_2)$ , ...,  $X_N = F_N^{-1}(U_N)$ ; donde  $F_j^{-1}(\cdot)$  para  $j = 1, 2, \dots, N$  son los inversos de las funciones de distribución deseadas.

Con el procedimiento anterior es posible determinar la probabilidad de falla para diferentes valores de la intensidad  $h$  por medio de la ecuación (2). Note que en el paso 1 la correlación entre variables aleatorias se expresa en términos del coeficiente de correlación de Spearman ( $\rho_s$ ) y que en el paso 2 la matriz  $\mathbf{R}$  se obtiene en términos del coeficiente de correlación de Pearson ( $r$ ). El coeficiente de correlación de Pearson se utiliza para expresar la correlación entre las densidades de probabilidad conjuntas, que en el presente trabajo se suponen gaussianas, a partir

del coeficiente de correlación de Spearman, que expresa la correlación deseada entre las variables marginales no gaussianas (Genest & Favre, 2007).

## Análisis de la falla por erosión debida al desbordamiento

Con base en la ecuación del exceso de esfuerzo cortante (Partheniades, 1965), la función de estado para la falla por erosión debida al desbordamiento de un bordo perimetral se puede escribir en la siguiente manera:

$$g(\mathbf{x};h) = \xi - k_d(\tau_0 - \tau_c) \cdot t \quad (3)$$

donde  $\xi$ : erosión [mm],  $t$ : tiempo [h],  $k_d$ : coeficiente de erodibilidad [mm/h/Pa],  $\tau_c$ : esfuerzo cortante crítico [Pa],  $\tau_0$ : esfuerzo cortante en la interfaz suelo-agua [Pa] (Nadal & Hughes, 2009):

$$\tau_0 = \rho g h_0 \text{sen} \theta \quad (4)$$

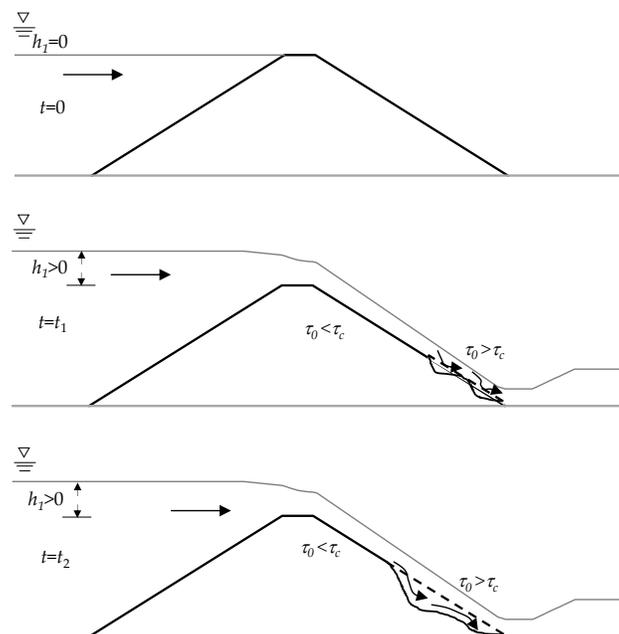
donde  $\rho$ : densidad del agua [kg/m<sup>3</sup>],  $g$ : aceleración de la gravedad [m/s<sup>2</sup>],  $\theta$ : ángulo de inclinación del talud aguas abajo [°] y  $h_0$ : tirante normal al talud [m] (Powledge, Ralston, Miller, Chen, Clopper, & Temple, 1989):

$$h_0 = \frac{\left[ \left( \frac{2}{3} \right)^{3/2} \sqrt{g h_1^{3/2}} \right]^{3/5}}{\left[ \frac{\sqrt{\text{Sen} \theta}}{n} \right]^{3/5}} \quad (5)$$

donde  $h_1$ : altura del desbordamiento [m] y  $n$ : coeficiente de Manning [s/m<sup>1/3</sup>].

En la ecuación (3),  $k_d$  y  $\tau_c$  son propiedades que dependen del material que constituye el bordo y se determinan en pruebas de erosión de

campo o laboratorio;  $k_d$  determina la velocidad con la que ocurre la erosión del bordo y  $\tau_c$  establece el umbral a partir del cual comienza la erosión del bordo. Como se ilustra en la Figura 1, cuando  $\tau_0 > \tau_c$ , comienza la erosión del bordo y ésta ocurrirá a una velocidad dada por  $k_d$ . Los valores de  $k_d$  y  $\tau_c$  utilizados en el presente análisis de fragilidad se estimaron con base en los resultados de las pruebas de erosión de laboratorio reportadas por Briaud, Chen, Govindasamy y Storesund (2008) y Yuan, Tang, Li, Pan, & Amini (2015) para suelos finos compactados.



**Figura 1.** Ilustración del proceso de erosión del bordo.

## Aplicación al caso de un bordo hipotético

En el siguiente ejemplo ilustrativo se analiza la fragilidad de un bordo perimetral de material fino compactado de 5 m de altura y 4 m de ancho, sometido a un desbordamiento en el intervalo:  $0 \leq h_1 \leq 2$  m. Se considera una situación de la práctica en la que el diseñador tiene

incertidumbre en la estimación de cuatro variables básicas de diseño:  $\theta$ ,  $n$ ,  $\tau_c$  y  $k_d$ . Las fragilidades se determinan para diferentes muestras de  $H_1$ , donde  $H_1$  es una variable aleatoria que refleja las fluctuaciones del nivel de agua en el embalse.

Los resultados de ensayos de laboratorio en muestras de materiales finos compactados reportados por Briaud *et al.* (2008) y Yuan *et al.* (2015) se consideraron en la estimación de los valores esperados y dispersiones de  $\tau_c$  (esfuerzo cortante crítico) y  $k_d$  (coeficiente de erodibilidad). Al construir el histograma de los valores reportados para  $\tau_c$  se encontró que la densidad lognormal describe satisfactoriamente los resultados de los ensayos. Se observó además que el parámetro  $k_d$  fluctúa en varios órdenes de magnitud y que su valor mínimo siempre es mayor que cero. Por lo tanto, se adoptó la densidad de Weibull para representar la incertidumbre en este parámetro. En la práctica, por lo general se selecciona un valor esperado para el coeficiente  $n$  de Manning, en función del tipo de material del bordo y se acepta que puede variar dentro de un intervalo conocido (Nadal & Hughes, 2009). La incertidumbre en este caso se modeló a través de la densidad beta descrita en Oboni y Bourdeau (1985). Por simplicidad, las posibles variaciones del ángulo  $\theta$  del talud aguas abajo se representaron por medio de una variable aleatoria gaussiana. Los parámetros del conjunto de variables aleatorias básicas de diseño se indican en la Tabla 1.

**Tabla 1.** Parámetros probabilistas de las variables básicas de diseño.

Parámetro	Unidad	$E\{X\}$	CV	Mín.	Máx.	Tipo
$\theta$	rad	0.197396	0.1	----	----	Normal
$n$	$s/m^{1/3}$	0.0158	0.1	0.01	0.035	Beta
$\tau_c$	Pa	16	6	0.0	----	Lognormal
$k_d$	mm/h/Pa	2.5	6	0.1	----	Weibull

Se ha considerado que existe correlación entre los tres parámetros que dependen del tipo de material del bordo ( $n$ ,  $\tau_c$  y  $k_d$ ). Esta decisión no es subjetiva, se basa en los resultados de las pruebas de erosión de laboratorio reportadas por Briaud *et al.* (2008) y Yuan *et al.* (2015). Se consideró una correlación negativa (-0.7) entre  $\tau_c$  y  $k_d$  para representar que cuando una variable tiende a crecer, la otra tiende a disminuir, como se observa en los resultados de laboratorio reportados por Briaud

*et al.* (2008). Se consideró además, una correlación negativa (-0.8) entre  $\tau_c$  y  $n$  para representar que conforme el coeficiente  $n$  de Manning aumenta, el esfuerzo cortante crítico  $\tau_c$  disminuye. Esta tendencia se fundamenta con base en que los suelos compactados con mayor contenido de arena suelen exhibir coeficientes  $n$  de Manning mayores, pero son menos resistentes a la erosión. Los valores numéricos asignados a los coeficientes de correlación mencionados arriba (-0.7 y -0.8) reflejan el grado de dependencia que el diseñador asigna, de manera parcialmente subjetiva, a dichas tendencias. Como ya se mencionó, esta decisión se basa en el comportamiento observado de dichos parámetros en las pruebas de laboratorio reportadas en la literatura. Para ser congruentes con nuestro razonamiento, deben existir entonces una correlación entre  $n$  y  $k_d$  pero de signo opuesto (0.8).

Con base en las experiencias reportadas por Hughes (2010), en el presente trabajo se adopta una escala de erosión permisible arbitraria en la siguiente manera:

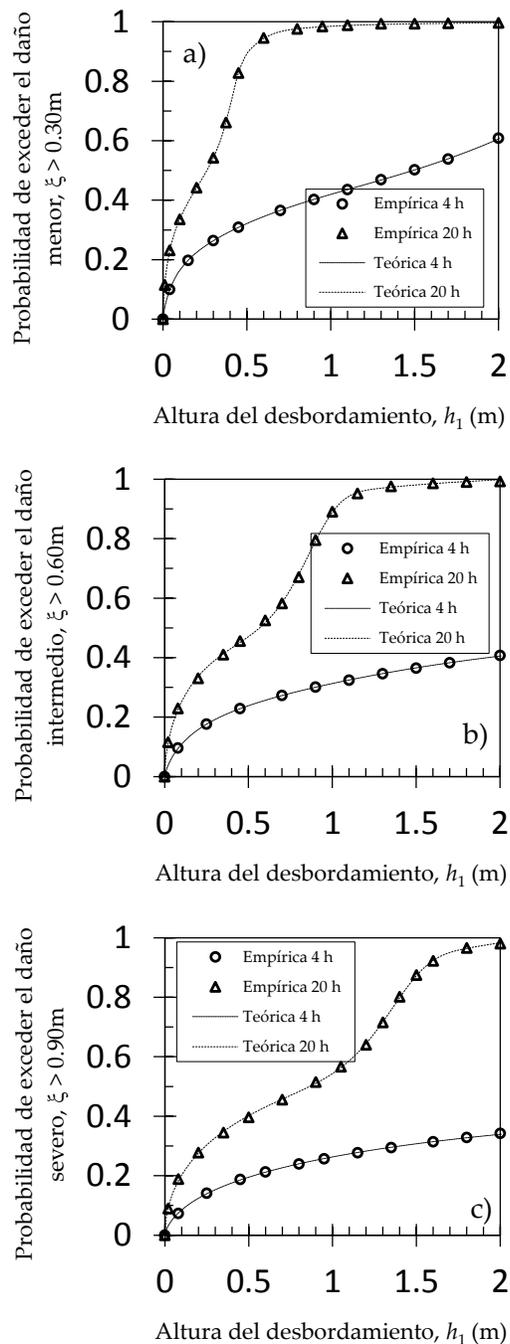
- Daño menor: Si  $\xi > 0.30$  m.
- Daño intermedio: Si  $\xi > 0.60$  m.
- Daño severo: Si  $\xi > 0.90$  m.

La fragilidad del bordo ante el desbordamiento se analiza para cada nivel de daño, especificado arriba y para dos tiempos de permanencia del desbordamiento; es decir, para un periodo de 4 h y otro de 20 h. El primer periodo representa un tiempo típico de análisis y el segundo periodo una condición extrema. Cada punto de la curva de fragilidad empírica se determinó con base en 500 000 simulaciones por medio de la ecuación (2).

## Resultados y discusión

Las Figuras 2a y 2c muestran con símbolos las curvas de fragilidad empíricas correspondientes al primer análisis de fragilidad. Note que conforme la duración del desbordamiento aumenta, la probabilidad de falla aumenta. Se puede observar además que conforme el indicador de falla  $\xi$  aumenta, la probabilidad de falla disminuye porque la frecuencia con la que ocurre una falla más severa es menor si se mantienen constantes los tiempos de análisis. Para un desbordamiento próximo a 2 m de altura que permanece durante 20 h, el bordo alcanza la falla con

probabilidad muy cercana a uno. Siguiendo a Shinozuka (2000), las curvas de fragilidad en las Figuras 2a, 2b y 2c se pueden interpretar como la probabilidad de que el bordo sufra al menos el daño especificado cuando se somete a un desbordamiento con intensidad  $h_1$ . Las probabilidades de falla aun para el periodo típico de análisis de 4 h son, en efecto, elevadas. Considerando que en los análisis se han utilizado valores representativos de las propiedades de erosión de los suelos compactados, por lo tanto estas probabilidades también son representativas de un bordo sometido al desbordamiento y pueden explicar las observaciones publicadas por algunos autores.



**Figura 2.** Curvas de fragilidad para diferentes condiciones de falla: a) Curva de fragilidad para un nivel de daño menor; b) Curva de fragilidad para un nivel de daño intermedio; c) Curva de fragilidad para un nivel de daño severo.

Por ejemplo, Gilbert y Miller (1985) han reportado que la erosión de bordos de arcilla compactada normalmente inicia entre 10 h y 20 h antes de su ruptura. Los resultados del presente análisis de fragilidad también pueden explicar la frecuencia con que ocurren fallas en presas por desbordamiento (48.4%) y tubificación (46.1%) (Foster, Fell, & Spannagle, 2000). Recordemos que la erosión del talud aguas abajo favorece la tubificación de los terraplenes de materiales finos compactados sometidos a un flujo de agua en su interior. Para aumentar la confiabilidad de los bordos ante el desbordamiento, algunos autores muestran las ventajas de sembrar césped sobre el bordo (Powledge *et al.*, 1989); o mejor aún, incrementar la resistencia a la erosión del césped sembrado utilizando geomalla (Yuan *et al.*, 2015).

Las curvas de fragilidad teóricas asociadas a las curvas empíricas se determinaron utilizando la técnica de mínimos cuadrados (Popescu *et al.*, 2005). Se encontró que cada curva teórica está dada por una distribución de Weibull compuesta (Razali & Al-Wakeel, 2013) en la siguiente forma:

$$G_X(x) = \sum_{j=1}^3 w_j F_X(x) \quad (6)$$

donde  $G(x)$ : función de distribución compuesta,  $w_j$ : ponderación asociada a la  $j$ -ésima distribución de Weibull y  $F_X(x)$ : función de distribución de Weibull dada por:  $F_X(x) = 1 - \exp[-(x/\alpha)^\beta]$  con parámetros de escala y forma dados por  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente.

Las curvas de fragilidad teóricas se muestran con líneas discontinuas en las Figuras 2a, 2b y 2c. Los parámetros que definen estas curvas teóricas se indican en la Tabla 2. Note que las curvas teóricas describen exactamente la curva empírica. Dada la forma de la curva teórica se puede concluir que la densidad de probabilidad del parámetro  $k_d$  (coeficiente de erodibilidad) ejerce la mayor influencia sobre la forma de la curva de fragilidad y que la influencia de  $n$  (coeficiente de Manning) y  $\tau_c$  (esfuerzo cortante crítico) es menor que la influencia de  $k_d$ . La forma de la curva teórica dada por la ecuación (6) se puede explicar por la no-linealidad del modelo conjunto de erosión dado por las ecuación (3), ecuación (4) y ecuación (5). Los cálculos realizados durante el presente trabajo mostraron que la correlación entre las variables de diseño modifica los parámetros de la curva teórica, pero no influye en su tipo. Algunos autores han sugerido el uso de densidades exponenciales para los parámetros de erosión de los suelos (Govindaraju, 1998). Otra posibilidad es considerar densidades de probabilidad lognormales para

representar la incertidumbre en la estimación de estos parámetros. Sin embargo, en el caso del coeficiente de erodibilidad, una densidad lognormal no es representativa del comportamiento físico de dicho parámetro, porque la erodibilidad de los materiales finos compactados no puede ser nula; parte de un valor mínimo mayor que cero y estará más alejado del cero conforme las incertidumbres en la calidad de los materiales del banco de préstamo y los procedimientos de colocación de los materiales sean mayores. Dado el efecto del tipo de densidad de  $k_d$  sobre la forma de la curva de fragilidad, es recomendable evaluar sus consecuencias en un análisis probabilista del riesgo en cada caso particular (Tabla 2).

**Tabla 2.** Parámetros descriptivos de las curvas de fragilidad.

Daño	Dura- ción	Ponderación			Escala			Forma		
		$w_1$	$w_2$	$w_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
Menor	4 h	0.179	1.303	0.277	0.065	3.867	0.672	0.804	3.120	1.167
	20 h	0.184	0.551	0.263	0.419	0.112	0.434	9.029	0.601	3.014
Intermedio	4 h	0.196	0.120	0.181	0.163	1.459	1.898	0.762	0.981	1.405
	20 h	0.414	0.505	0.208	0.893	0.255	9.815	5.872	0.636	0.355
Severo	4 h	0.083	0.354	0.037	0.936	1.776	0.102	0.613	0.714	0.714
	20 h	0.345	0.525	0.446	1.392	3.560	0.686	7.480	0.571	0.516

## Conclusiones

El presente artículo mostró que las curvas de fragilidad para la falla por erosión de un bordo perimetral sometido a un desbordamiento difieren significativamente del modelo lognormal cuando se utiliza un modelo probabilista no gaussiano, para el coeficiente de erodibilidad del material del bordo. Este resultado tendrá implicaciones prácticas importantes cuando la curva de fragilidad se combine con la curva asociada con la amenaza específica y las consecuencias para cuantificar el riesgo. Por lo tanto, es recomendable que el efecto de las incertidumbres no gaussianas sobre el riesgo se evalúe en todos los casos. Este trabajo presentó herramientas para modelar apropiadamente este tipo de incertidumbres y se ponen a disposición de los interesados contactando

al primer autor. Finalmente, se recomienda a los organismos nacionales con responsabilidad en proyectos de obras de protección contra inundaciones utilizar el concepto de curvas de fragilidad en la evaluación del riesgo de sus obras de protección y encauzamiento, como sucede en la actualidad con diversos organismos internacionales (USACE, 2010; SPANCOLD, 2013; CIRIA, 2013).

## Agradecimientos

Los autores agradecen a Conagua el financiamiento otorgado a esta investigación, en particular a los ingenieros Horacio Rubio Gutiérrez y Martín Ramírez Reynaga por el interés mostrado durante el desarrollo del proyecto. Los autores también agradecen los comentarios y sugerencias de dos revisores anónimos.

## Referencias

Bachmann, D., Huber, N. P., Johann, G., & Schüttrumpf, H. (2013). Fragility curves in operational dike reliability assessment. *Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards*, 7(1), 49-60. DOI: 10.1080/17499518.2013.767664.

Briaud, J. L., Chen, H. C., Govindasamy, A. V., & Storesund, R. (2008). Levee Erosion by Overtopping in New Orleans during the Katrina Hurricane. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 134(5), 618-632. DOI: 10.1061/(ASCE)1090-0241(2008)134:5(618).

Casciati, F., & Faravelli, L. (1991). *Fragility analysis of complex structural systems*. Nueva York, USA: John Wiley.

CIRIA. (2013). *The International Levee Handbook*. Londres, Inglaterra: CIRIA.

Cenapred, Centro Nacional de Prevención de Desastres. (2014). *Inundaciones*. Ciudad de México, México: Centro Nacional de Prevención de Desastres.

Conagua, Comisión Nacional del Agua. (2011). *Manual para el control de inundaciones*. Ciudad de México, México: Comisión Nacional del Agua.

Foster, M., Fell, R., & Spannagle, M. (2000). The statistics of embankment dam failures and accidents. *Canadian Geotechnical Journal*, 37(5), 1000-1024. Recuperado de <https://doi.org/10.1139/t00-030>.

Gilbert, P. A., & Miller, S. P. (1989). *A study of embankment performance during overtopping* (Technical Report GL-91-23). Mississippi: USA: U.S. Army Engineering Research and Development Center.

Genest, C. & Favre, A. C. (2007). Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 347-368. DOI: 10.1061/(ASCE)1084-0699(2007)12:4(347).

Govindaraju, R. S. (1998). Effective erosion parameters for slopes with spatially varying properties. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 124(2), 81-88. Recuperado de [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9437\(1998\)124:2\(81\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(1998)124:2(81)).

Hughes, S. A. (2010). *Flood-Side Wave Erosion of Earthen Levees: Present State of Knowledge and Assessment of Armoring Necessity*. USA: US Army Engineering Research and Development Center.

Kennedy, R. P., Cornell, C. A., Campbell, R. D., Kaplan, S. & Perla, H. F. (1980). Probabilistic seismic safety study of an existing nuclear power plant. *Nuclear Engineering and Design*, 59(2), 315-338. DOI: 10.1016/0029-5493(80)90203-4.

Nadal, N. C. & Hughes, S. A. (2009). *Shear Stress Estimates for Combined Wave and Surge Overtopping at Earthen Levees*. USA: U.S. Army Engineering Research and Development Center.

Oboni, F. & Bourdeau, P. L. (1985). Simplified use of the beta distribution and sensitivity to the bound locations. *Structural Safety*, 3(1), 63–66. Recuperado de [https://doi.org/10.1016/0167-4730\(85\)90009-8](https://doi.org/10.1016/0167-4730(85)90009-8).

Partheniades, E. (1965). Erosion and deposition of cohesive soils. *Journal of the Hydraulics Division, American Society of Civil Engineers*, 91(1), 105-139.

Popescu, R., Deodatis, G. & Nobahar, A. (2005). Effects of random heterogeneities of soil properties on bearing capacity. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 20, 324-341, DOI:10.1016/j.probengmech.2005.06.003.

Powledge, G. R., Ralston, D. C., Miller, P., Chen, Y. H., Clopper, P. E., & Temple, D. M. (1989). Mechanics of overflow erosion on embankments, II: Hydraulic and design considerations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 115(8), 1056–1075. Recuperado de [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1989\)115:8\(1056\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1989)115:8(1056)).

Rao, S. S. (1992). *Reliability-based design*. USA: McGraw-Hill.

Razali, A. M. & Al-Wakeel, A. A. (2013). Mixture Weibull distributions for fitting failure times data. *Applied Mathematics and Computation*, 219(24), 11358–11364. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2013.05.062>.

Shinozuka, M., Feng, M. Q., Kim, H. & Kim, S. (2000). Nonlinear static procedure for fragility curve development. *Journal of Engineering*

*Mechanics*, 126(12), 65–79. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2000)126:12(1287)

SPANCOLD, Spanish National Committee on Large Dams. (2013). *Risk analysis applied to management of dam safety, Technical Guides on Dam Safety, Technical Guide on Operation of Dams and Reservoirs* (Vol. 1.) España: Asociación de Ingenieros Civiles Profesionales.

USACE (2010). *Beyond the Factor of Safety, Developing Fragility Curves to Characterize System Reliability*. USA: U.S. Army Corps of Engineers, Water Resources Infrastructure Program. <https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a525580.pdf> Schultz, M. T., Gouldby, B. P, Simm, J. D., & Wibowo, J. L. (2010). *Beyond the Factor of Safety, Developing Fragility Curves to Characterize System Reliability* (ERDC SR-10-1). USA: U.S. Army Corps of Engineers, Water Resources Infrastructure Program.

Vorogushyn, S., Merz, B. & Apel, H. (2009). Development of dike fragility curves for piping and micro-instability breach mechanisms. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, (9)4, 295–308. DOI: 10.5194/nhess-9-1383-2009.

Yuan, S., Tang, H., Li, L., Pan, Y. & Amini, F. (2015). Combined wave and surge overtopping erosion failure model of HPTRM levees: Accounting for grass-mat strength. *Ocean Engineering*, 109, 256–269. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.1016/j.oceaneng.2015.09.005>.